Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Lehrbuch des Rechnens mit imaginären und komplexen Zahlen

Krüger, Richard

Stuttgart, 1891

a) Ueber die Exponentialreihe im allgemeinen

urn:nbn:de:bsz:31-101180

Visual Library

F. Ueber die Exponentialreihe und einige Anwendungen derselben auf die vorliegenden Probleme.

Anmerkung 13. Vorausgesetzt werden Kenntnisse vom binomischen Lehrsatze, von der Logarithmenrechnung und der Goniometrie.

a) Ueber die Exponentialreihe im allgemeinen.

Frage 94. Was versteht man unter der Exponentialreihe? Wie wird dieselbe entwickelt?

Antwort. Nach dem binomischen Lehrsatze (siehe Erkl. 79) gibt:

$$(a+b)^n = a^n + n\cdot a^{n-1}\cdot b + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot a^{n-2}\cdot b^2 + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot a^{n-3}\cdot b^3 + \cdots$$

Setzt man in diese Gleichung 1 statt a und $\frac{x}{n}$ statt b, worin x irgend eine ganze oder gebrochene, reelle Zahl bedeute, so erhält man:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1^n + n\cdot 1^{n-1}\cdot\frac{x}{n} + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot 1^{n-2}\cdot\frac{x^2}{n^2} + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 1^{n-3}\cdot\frac{x^3}{n^3} + \cdots$$

oder, da:

$$\frac{n\cdot(n-1)}{n^2} = \frac{n^2-n}{n^2} = 1-\frac{1}{n}$$

und

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{n^3} = \frac{n^3-3n^2+2n}{n^3} = 1-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2} = \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots$$

gibt:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1+x+\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{x^2}{1\cdot 2}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots$$

Ist die Anzahl der Glieder der vorstehenden Reihe unendlich gross, ist also $n=\infty$, so ist:

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\frac{2}{n} = \frac{2}{\infty} = 0 \quad \text{u. s. w.}$$

und man erhält:

$$1-\frac{1}{n} = 1-0 = 1$$

$$1-\frac{2}{n} = 1-0 = 1 \quad \text{u. s. w.}$$

oder für:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1+x+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots \text{ (bis ins Unendliche)}$$

Wird 1 statt x gesetzt, so ergibt sich:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots \text{ (bis ins Unendliche)}$$

Berechnet man die rechte Seite dieser Gleichung, so erhält man einen unendlichen Dezimalbruch, dessen erste 6 Ziffern:

2,71828

Erkl. 211. Mittelst der für e^x entwickelten unendlichen Reihe können beliebige Potenzen oder Wurzeln von $e = 2{,}71828\cdots$ berechnet werden, weil x jede beliebige, positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahl sein kann.

Diese Reihe führt den Namen „Exponentialreihe“.

sind. Dieser Dezimalbruch wird in der mathematischen Wissenschaft mit e bezeichnet. Es ist also:

$$e = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\cdots \text{ (bis ins Unendliche)}$$

und

$$e^x = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1+x+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots \text{ (bis ins Unendliche)}$$

ferner:

$$e^{-x} = \left(1-\frac{x}{n}\right)^n = 1-x+\frac{x^2}{1\cdot 2}-\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\cdots \text{ (bis ins Unendliche)}$$

(siehe Erkl. 211)

Frage 95. Was erhält man für:

e^{ix} und e^{-ix}?

Erkl. 212. Ist $x = 0$, so ergibt sich:

$$\cos 0^0 = 1-\frac{0}{1\cdot 2}+\frac{0}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\frac{0}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\cdots = 1$$

$$\sin 0^0 = 0-\frac{0}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{0}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}-\cdots = 0$$

Setzt man für $x = -x$, so folgt:

$$\cos(-x) = 1-\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\cdots = \cos x$$

$$\sin(-x) = -x+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}-\frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\cdots$$

$$= -\sin x \text{ (vergl. Erkl. 141)}$$

Ferner gibt:

$$e^{ix}\cdot e^{-ix} = e^{ix-ix} = e^0 = 1 \text{ (nach Erkl. 24)}$$

und

$$(\cos x + i\sin x)\cdot(\cos x - i\sin x) = \cos^2 x + \sin^2 x$$

Da:

$$e^{ix}\cdot e^{-ix} = \cos^2 x + \sin^2 x$$

ist, so muss:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

sein, was (nach Erkl. 130) richtig ist.

Erkl. 213. Die Gleichungen:

$$1-\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\cdots = \cos x$$

und

$$x-\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}-\cdots = \sin x$$

sind zuerst von Newton (geb. 1643, gest. 1727) entwickelt worden. Euler (geb. 1707, gest. 1783) hat diese aus den Werten von $\cos xy$ und $\sin xy$ abgeleitet.

(Siehe Baltzer, Elemente der Mathematik I, Seite 183, Anm.)

Antwort. Da nach vorstehender Antwort:

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots$$

ist, so gibt:

$$e^{ix} = 1+ix+\frac{i^2x^2}{1\cdot 2}+\frac{i^3x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{i^4x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots$$

oder, weil:

$$i^2 = -1$$
$$i^3 = -i$$
$$i^4 = 1 \text{ u. s. w.}$$

ist (siehe Antwort auf Frage 5):

$$e^{ix} = 1+ix-\frac{x^2}{1\cdot 2}-\frac{ix^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\cdots$$

oder:

$$= \left(1-\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\cdots\right)$$
$$+ i\cdot\left(x-\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}-\cdots\right)$$

Ebenso erhält man für:

$$e^{-ix} = \left(1-\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\cdots\right)$$
$$- i\cdot\left(x-\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}-\cdots\right)$$

Nun kann man für:

$$\left(1-\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\cdots\right) = \cos x$$

und für:

$$\left(x-\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}-\cdots\right) = \sin x$$

setzen, weil diese beiden Klammerausdrücke sämtliche Eigenschaften von $\cos x$ bezw. $\sin x$ besitzen, was immer auch für x eingesetzt werden möge (siehe Erkl. 212).

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Baden-Württemberg

Demnach ist:

$$e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x$$

und

$$e^{-ix} = \cos x - i \cdot \sin x \quad \text{(vgl. Erkl. 214)}$$

Setzt man für $x = 2k\pi$ ein, so erhält man:

$$e^{2k\pi i} = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi$$

oder, weil:

$$\cos 2k\pi = 1$$

und

$$\sin 2k\pi = 0$$

ist, wenn k eine positive Ganzzahl (einschliesslich 0) bedeutet (siehe Erkl. 162 und Antwort auf Frage 82):

$$e^{2k\pi i} = 1$$

Ist $x = (2k+1)\pi$, so ergibt sich:

$$e^{(2k+1)\pi} = \cos(2k+1)\pi + i \sin(2k+1)\pi$$

oder, weil:

$$\cos(2k+1)\pi = -1$$

und

$$\sin(2k+1)\pi = 0$$

ist (nach Antwort auf Frage 82):

$$e^{(2k+1)\pi} = -1$$

Erkl. 214. In e^{ix} bedeutet x einen, mit dem Halbmesser $= 1$ beschriebenen und durch Teile desselben dargestellten Kreisbogen, während x in $\cos x + i \sin x$ den Winkel bedeutet, welcher zu jenem Bogen gehört.

Erkl. 215. Aus der Exponentialreihe lässt sich ein neuer Beweis des Moivreschen Satzes (siehe Erkl. 156) herleiten.

Da:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

ist, so ist auch:

$$e^{2ix} = \cos 2x + i \sin 2x$$

oder allgemein:

$$\ldots \quad e^{nix} = \cos nx + i \sin nx$$

---

b) Ueber die Berechnung von i^i.

Frage 96. Was erhält man für:

$$\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}?$$

Antwort. Setzt man in die Gleichung:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$\frac{\pi}{2}$ statt x ein, so erhält man:

$$e^{\frac{i\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2} = \cos 90^0 + i \sin 90^0 = 0 + i = +i$$

Demnach ist:

$$e^{\left(\frac{i\pi}{2}\right)^i} = i^i$$

Nun gibt:

$$\left(\frac{i\pi}{2}\right) \cdot i = \frac{i^2\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

folglich ist:

$$i^i \text{ oder } \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} = e^{-\frac{\pi}{2}} \text{ oder } = \frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}} \quad \text{(nach Erkl. 24)}$$

(vergl. Erkl. 216)

Erkl. 216. Die Lösung des Problems i^i stammt von Euler.

---

c) Ueber die Darstellung von $l(a+bi)$.

Frage 97. Wie lässt sich:

$$l(a+bi)$$

bilden?

Antwort. Da:

$$e^{\varphi i} = \cos\varphi + i \sin\varphi$$

(nach Antwort auf Frage 95)