Lehrbuch des Rechnens mit imaginären und komplexen Zahlen

Krüger, Richard

Stuttgart, 1891

c) Ueber die Darstellung von l(a + bi)

urn:nbn:de:bsz:31-101180

Demnach ist:

$$e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x$$

und

$$e^{-ix} = \cos x - i \cdot \sin x \quad \text{(vgl. Erkl. 214)}$$

Setzt man für $x = 2k\pi$ ein, so erhält man:

$$e^{2k\pi i} = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi$$

oder, weil:

$$\cos 2k\pi = 1$$

und

$$\sin 2k\pi = 0$$

ist, wenn k eine positive Ganzzahl (einschliesslich 0) bedeutet (siehe Erkl. 162 und Antwort auf Frage 82):

$$e^{2k\pi i} = 1$$

Ist $x = (2k+1)\pi$, so ergibt sich:

$$e^{(2k+1)\pi} = \cos(2k+1)\pi + i \sin(2k+1)\pi$$

oder, weil:

$$\cos(2k+1)\pi = -1$$

und

$$\sin(2k+1)\pi = 0$$

ist (nach Antwort auf Frage 82):

$$e^{(2k+1)\pi} = -1$$

Erkl. 214. In e^{ix} bedeutet x einen, mit dem Halbmesser $= 1$ beschriebenen und durch Teile desselben dargestellten Kreisbogen, während x in $\cos x + i \sin x$ den Winkel bedeutet, welcher zu jenem Bogen gehört.

Erkl. 215. Aus der Exponentialreihe lässt sich ein neuer Beweis des Moivreschen Satzes (siehe Erkl. 156) herleiten.

Da:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

ist, so ist auch:

$$e^{2ix} = \cos 2x + i \sin 2x$$

oder allgemein:

$$e^{nix} = \cos nx + i \sin nx$$

---

b) Ueber die Berechnung von i^i.

Frage 96. Was erhält man für:

$$\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}?$$

Erkl. 216. Die Lösung des Problems i^i stammt von Euler.

Antwort. Setzt man in die Gleichung:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$\frac{\pi}{2}$ statt x ein, so erhält man:

$$e^{\frac{i\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2} = \cos 90^0 + i \sin 90^0 = 0 + i = +i$$

Demnach ist:

$$e^{\left(\frac{i\pi}{2}\right)i} = i^i$$

Nun gibt:

$$\left(\frac{i\pi}{2}\right)\cdot i = \frac{i^2\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

folglich ist:

$$i^i \text{ oder } \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} = e^{-\frac{\pi}{2}} \text{ oder } = \frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}} \quad \text{(nach Erkl. 24)}$$

(vergl. Erkl. 216)

---

c) Ueber die Darstellung von $l(a+bi)$.

Frage 97. Wie lässt sich:

$$l(a+bi)$$

bilden?

Antwort. Da:

$$e^{\varphi i} = \cos\varphi + i \sin\varphi$$

(nach Antwort auf Frage 95)

Erkl. 217. Die auf die Basis $e = 2{,}71828\cdots$ bezogenen Logarithmen heissen natürliche oder nach ihrem Erfinder Napier (1614) die Napierschen; alle Logarithmen, welche eine andere Basis besitzen (z. B. die Basis 10), nennt man künstliche. Die natürlichen Logarithmen bezeichnet man mit log nat (logarithmus naturalis, d. h. natürlicher Logarithmus) oder kurz mit l. Die auf die Basis 10 bezogenen Logarithmen heissen gemeine oder nach ihrem Erfinder Briggs (geb. 1556, gest. 1630) die Briggschen Logarithmen. Man bezeichnet sie einfach mit log (siehe die Erkl. 206, 207. 209 und 210). Die natürlichen Logarithmen werden hauptsächlich in der höheren, die gemeinen in der niederen Mathematik benutzt.

Erkl. 218. Ein Satz aus der Logarithmenrechnung lautet:

„Der Logarithmus der Basis ist gleich 1."

Erkl. 219. Der Logarithmus einer Wurzel ist gleich dem Logarithmus des Radikandus, geteilt durch den Wurzelexponenten.

und

$$a + bi = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

(nach Antwort auf Frage 57)

ist, so gibt:

$$a + bi = r\cdot e^{\varphi i}$$

und

$$l(a + bi) = l(r\cdot e^{\varphi i})$$

oder:

$$= lr + \varphi i le \quad \text{(n. Erkl. 206a)}$$

oder, weil $le = 1$ ist (nach Erkl. 218):

$$l(a + bi) = lr + \varphi i$$

Hierin bedeutet:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{(nach Antw. auf Frage 55)}$$

und φ einen, mit dem Halbmesser $= 1$ beschriebenen Kreisbogen, dessen Tangente $= \frac{b}{a}$ ist (siehe Erkl. 98 und 98a), also:

$$\varphi = \text{arc}\cdot\text{tg}\frac{b}{a}$$

Man erhält demnach:

$$l(a + bi) = l\cdot\sqrt[2]{a^2 + b^2} + i\cdot\text{arc tg}\frac{b}{a}$$

oder endlich, weil:

$$l\sqrt[2]{a^2 + b^2} = \frac{1}{2}\cdot l(a^2 + b^2)$$

ist (nach Erkl. 219):

$$l(a + bi) = \frac{1}{2}\,l(a^2 + b^2) + i\cdot\text{arc tg}\frac{b}{a}$$

---

d) Ueber die Darstellung von $\cos^n\varphi$ und $\sin^n\varphi$ durch Exponentialreihen.

Frage 98. Wie lässt sich:

$$\cos^n\varphi$$

durch Exponentialreihen darstellen?

Erkl. 220. Man erhält für:

$$e^{(n-1)i\varphi}\cdot e^{-i\varphi} = e^{(n-1)i\varphi - i\varphi} \quad \text{(nach Erkl. 23)}$$

oder:

$$= e^{ni\varphi - i\varphi - i\varphi} = e^{ni\varphi - 2i\varphi} = e^{(n-2)i\varphi}$$

(nach Erkl. 26)

ferner für:

$$e^{(n-2)i\varphi} + e^{-2i\varphi} = e^{(n-2)i\varphi - 2i\varphi} = e^{ni\varphi - 2i\varphi - 2i\varphi} = e^{ni\varphi - 4i\varphi} = e^{(n-4)i\varphi}$$

und so fort.

Antwort. Aus den Gleichungen:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

und

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$$

folgt:

$$e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi + \cos\varphi - i\sin\varphi = 2\cos\varphi$$

Demnach ist:

$$2^n\cdot\cos^n\varphi = (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})^n$$

oder nach dem binomischen Lehrsatze:

$$2^n\cdot\cos^n\varphi = e^{ni\varphi} + n\cdot e^{(n-1)i\varphi}\cdot e^{-i\varphi} + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot e^{(n-2)i\varphi}\cdot e^{-2i\varphi} + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot e^{(n-3)i\varphi}\cdot e^{-3i\varphi} + \cdots + n\cdot e^{i\varphi}\cdot e^{-(n-1)i\varphi} + e^{-ni\varphi}$$

oder (nach Erkl. 220):