Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Lehrbuch des Rechnens mit imaginären und komplexen Zahlen

Krüger, Richard

Stuttgart, 1891

d) Ueber die Darstellung von cos φ und sin φ durch Exponentialreihen

urn:nbn:de:bsz:31-101180

Visual Library

Erkl. 217. Die auf die Basis $e = 2{,}71828\cdots$ bezogenen Logarithmen heissen natürliche oder nach ihrem Erfinder Napier (1614) die Napierschen; alle Logarithmen, welche eine andere Basis besitzen (z. B. die Basis 10), nennt man künstliche. Die natürlichen Logarithmen bezeichnet man mit log nat (logarithmus naturalis, d. h. natürlicher Logarithmus) oder kurz mit l. Die auf die Basis 10 bezogenen Logarithmen heissen gemeine oder nach ihrem Erfinder Briggs (geb. 1556, gest. 1630) die Briggschen Logarithmen. Man bezeichnet sie einfach mit log (siehe die Erkl. 206, 207. 209 und 210). Die natürlichen Logarithmen werden hauptsächlich in der höheren, die gemeinen in der niederen Mathematik benutzt.

Erkl. 218. Ein Satz aus der Logarithmenrechnung lautet:

„Der Logarithmus der Basis ist gleich 1."

Erkl. 219. Der Logarithmus einer Wurzel ist gleich dem Logarithmus des Radikandus, geteilt durch den Wurzelexponenten.

und

$$a + bi = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

(nach Antwort auf Frage 57)

ist, so gibt:

$$a + bi = r\cdot e^{\varphi i}$$

und

$$l(a + bi) = l(r\cdot e^{\varphi i})$$

oder:

$$= lr + \varphi i le \quad \text{(n. Erkl. 206a)}$$

oder, weil $le = 1$ ist (nach Erkl. 218):

$$l(a + bi) = lr + \varphi i$$

Hierin bedeutet:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{(nach Antw. auf Frage 55)}$$

und φ einen, mit dem Halbmesser $= 1$ beschriebenen Kreisbogen, dessen Tangente $= \frac{b}{a}$ ist (siehe Erkl. 98 und 98a), also:

$$\varphi = \text{arc}\cdot\text{tg}\frac{b}{a}$$

Man erhält demnach:

$$l(a + bi) = l\cdot\sqrt[2]{a^2 + b^2} + i\cdot\text{arc tg}\frac{b}{a}$$

oder endlich, weil:

$$l\sqrt[2]{a^2 + b^2} = \frac{1}{2}\cdot l(a^2 + b^2)$$

ist (nach Erkl. 219):

$$l(a + bi) = \frac{1}{2}l(a^2 + b^2) + i\cdot\text{arc tg}\frac{b}{a}$$

---

d) Ueber die Darstellung von $\cos^n\varphi$ und $\sin^n\varphi$ durch Exponentialreihen.

Frage 98. Wie lässt sich:

$$\cos^n\varphi$$

durch Exponentialreihen darstellen?

Antwort. Aus den Gleichungen:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

und

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$$

folgt:

$$e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi + \cos\varphi - i\sin\varphi$$
$$= 2\cos\varphi$$

Demnach ist:

$$2^n\cdot\cos^n\varphi = (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})^n$$

oder nach dem binomischen Lehrsatze:

$$2^n\cdot\cos^n\varphi = e^{ni\varphi} + n\cdot e^{(n-1)i\varphi}\cdot e^{-i\varphi}$$
$$+ \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot e^{(n-2)i\varphi}\cdot e^{-2i\varphi}$$
$$+ \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot e^{(n-3)i\varphi}\cdot e^{-3i\varphi} + \cdots$$
$$+ n\cdot e^{i\varphi}\cdot e^{-(n-1)i\varphi} + e^{-ni\varphi}$$

oder (nach Erkl. 220):

Erkl. 220. Man erhält für:

$$e^{(n-1)i\varphi}\cdot e^{-i\varphi} = e^{(n-1)i\varphi - i\varphi} \quad \text{(nach Erkl. 23)}$$

oder:

$$= e^{ni\varphi - i\varphi - i\varphi} = e^{ni\varphi - 2i\varphi} = e^{(n-2)i\varphi}$$

(nach Erkl. 26)

ferner für:

$$e^{(n-2)i\varphi} + e^{-2i\varphi} = e^{(n-2)i\varphi - 2i\varphi} =$$
$$e^{ni\varphi - 2i\varphi - 2i\varphi} = e^{ni\varphi - 4i\varphi} = e^{(n-4)i\varphi}$$

und so fort.

$$2^n \cdot \cos^n \varphi = e^{ni\varphi} + n e^{(n-2)i\varphi} + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot e^{(n-4)i\varphi} + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot e^{(n-6)i\varphi} + \cdots + n\cdot e^{-(n-2)i\varphi} + e^{-ni\varphi}$$

oder, indem man das erste und letzte, zweite und vorletzte Glied u. s. w. zusammenfasst und die ganze Gleichung durch 2^n teilt:

$$\cos^n \varphi = \frac{1}{2^n}\cdot\left[(e^{ni\varphi} + e^{-ni\varphi}) + n\cdot(e^{(n-2)i\varphi} + e^{-(n-2)i\varphi}) + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot(e^{(n-4)i\varphi} + e^{-(n-4)i\varphi}) + \cdots\right]$$ (siehe Frage 100)

Frage 99. Wie lässt sich:

$\sin^n \varphi$

durch Exponentialreihen darstellen?

Antwort. Aus den Gleichungen:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

und

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$$

folgt:

$$e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi - \cos\varphi + i\sin\varphi = 2i\sin\varphi$$

Demnach ist:

$$2^n \cdot i^n \cdot \sin^n \varphi = (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})^n$$

oder nach dem binomischen Lehrsatze:

$$2^n \cdot i^n \cdot \sin^n \varphi = e^{ni\varphi} - n\cdot e^{(n-1)i\varphi}\cdot e^{-i\varphi} + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot e^{(n-2)i\varphi}\cdot e^{-2i\varphi} + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot e^{(n-3)i\varphi}\cdot e^{-3i\varphi} - \cdots \mp n\cdot e^{i\varphi}\cdot e^{-(n-1)i\varphi} \pm e^{-ni\varphi}$$

Ist n eine gerade Zahl, so ist $e^{-ni\varphi}$ positiv, also $n\cdot e^{i\varphi}\cdot e^{-(n-1)i\varphi}$ negativ (siehe Erkl. 202) und man erhält demnach mit Bezug auf Erkl. 220

bei geradem n

für:

$$2^n \cdot i^n \cdot \sin^n \varphi = e^{ni\varphi} - n\cdot e^{(n-2)i\varphi} + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot e^{(n-4)i\varphi} - \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot e^{(n-6)i\varphi} - \cdots - n\cdot e^{-(n-2)i\varphi} + e^{-ni\varphi}$$

oder, indem man die ganze Gleichung durch $2^n \cdot i^n$ teilt:

$$\sin^n \varphi = \frac{1}{2^n\cdot i^n}\cdot\left[(e^{ni\varphi} + e^{-ni\varphi}) - n\cdot(e^{(n-2)i\varphi} + e^{-(n-2)i\varphi}) + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot(e^{(n-4)i\varphi} + e^{-(n-4)i\varphi}) - \cdots\right]$$

Ist n eine ungerade Zahl, so ist das letzte Glied der Reihe negativ, das vorletzte positiv (nach Erkl. 202) und es gibt hiernach

bei ungeradem n:

$$2^n \cdot i^n \cdot \sin^n \varphi = e^{ni\varphi} - n\cdot e^{(n-2)i\varphi} + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot e^{(n-4)i\varphi} - \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot e^{(n-6)i\varphi} - \cdots + n\cdot e^{-(n-2)i\varphi} - e^{-ni\varphi}$$

oder endlich:

$$\sin^n \varphi = \frac{1}{2^n\cdot i^n}\cdot\left[(e^{ni\varphi} - e^{-ni\varphi}) - n\cdot(e^{(n-2)i\varphi} + e^{-(n-2)i\varphi}) + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot(e^{(n-4)i\varphi} - e^{-(n-4)i\varphi}) - \cdots\right]$$

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

Frage 100. Wie lassen sich die in den Antworten auf die Fragen 98 und 99 abgeleiteten Formeln für:

$$\cos^n \varphi \text{ und } \sin^n \varphi$$

vereinfachen?

Erkl. 221. Wie aus nebenstehender Antwort ersichtlich ist, lassen sich mit Hilfe der Exponentialreihe genau dieselben Formeln für $\sin^n \varphi$ und $\cos^n \varphi$ ableiten, welche in den Antworten auf die Fragen 90 und 91 auf einem anderen Wege entwickelt wurden.

Antwort. Da nach der Antwort auf Frage 99:

$$e^{ni\varphi} + e^{-ni\varphi} = 2\cos n\varphi$$

also auch:

$$e^{(n-2)i\varphi} + e^{-(n-2)i\varphi} = 2\cdot\cos(n-2)\varphi$$

und

$$e^{(n-4)i\varphi} + e^{-(n-4)i\varphi} = 2\cdot\cos(n-4)\varphi$$

u. s. w.

ist, so erhält man für:

$$\cos^n \varphi = \frac{1}{2^n}\cdot\left[(e^{ni\varphi} + e^{-ni\varphi}) + n\cdot(e^{(n-2)i\varphi} + e^{-(n-2)i\varphi}) + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot (e^{(n-4)i\varphi} + e^{-(n-4)i\varphi}) + \cdots\right]$$

$$\cos^n \varphi = \frac{1}{2^n}\cdot\left[2\cos n\varphi + 2n\cos(n-2)\varphi + \frac{2n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\cos(n-4)\varphi + \cdots\right]$$

oder, da sämtliche Glieder der eckigen Klammern den Faktor 2 besitzen, welchen man vor die Klammer setzen und gegen 2^n im Nenner fortheben kann:

$$\cos^n \varphi = \frac{1}{2^{n-1}}\cdot\left[\cos n\varphi + n\cdot\cos(n-2)\varphi + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\cos(n-4)\varphi + \cdots\right]$$

(vergl. Erkl. 221)

Ferner ergibt sich

bei geradem n

für:

$$\sin^n \varphi = \frac{1}{2^n\cdot i^n}\cdot\left[(e^{ni\varphi} + e^{-ni\varphi}) - n\cdot(e^{(n-2)i\varphi} + e^{-(n-2)i\varphi}) + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot (e^{(n-4)i\varphi} + e^{-(n-4)i\varphi}) - \cdots\right]$$

$$\sin^n \varphi = \frac{1}{2^n\cdot i^n}\cdot\left[2\cos n\varphi - 2n\cos(n-2)\varphi + \frac{2n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\cos(n-4)\varphi - \cdots\right]$$

oder, weil:

$$i^n = i^{2\cdot\left(\frac{n}{2}\right)} = (-1)^{\frac{n}{2}}$$

ist und sich der Faktor 2 sämtlicher Glieder der eckigen Klammer gegen 2^n im Nenner forthebt:

$$\sin^n \varphi = \frac{1}{2^{n-1}\cdot(-1)^{\frac{n}{2}}}\cdot\left[\cos n\varphi - n\cdot\cos(n-2)\varphi + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\cos(n-4)\varphi - \cdots\right]$$

Endlich erhält man, weil:

$$e^{ni\varphi} - e^{-ni\varphi} = 2i\sin n\varphi$$

also auch:

$$e^{(n-2)i\varphi} - e^{-(n-2)i\varphi} = 2i\sin(n-2)\varphi$$

und

$$e^{(n-4)i\varphi} - e^{-(n-4)i\varphi} = 2i\sin(n-4)\varphi$$

u. s. w.

ist (nach der Antwort auf Frage 99)

bei ungeradem n

für:

$$\sin^n \varphi = \frac{1}{2^n\cdot i^n}\cdot\left[2i\sin n\varphi - 2ni\sin(n-2)\varphi + \frac{2\cdot n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}i\sin(n-4)\varphi - \cdots\right]$$

oder, weil sich die Faktoren 2 und i sämtlicher Glieder der Klammer gegen 2^n bezw. i^n im Nenner fortheben und

$$i^{n-1} = i^{2\cdot\left(\frac{n-1}{2}\right)} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

ist:

$$\sin^n \varphi = \frac{1}{2^{n-1}\cdot(-1)^{\frac{n-1}{2}}}\cdot\left[\sin n\varphi - n\cdot\sin(n-2)\varphi + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\sin(n-4)\varphi - \cdots\right]$$

(vergl. Erkl. 221)

Anhang.

A. Verzeichnis der Resultate der ungelösten Aufgaben.

1) Imaginäre Zahlen.

Aufgabe 3. $\sqrt[2]{-121} = \pm 11\,i$; reeller Faktor rational

Aufgabe 4. $\sqrt[2]{-5} = \pm 2{,}236\cdots i$; reeller Faktor irrational

Aufgabe 6. a) $+1$, b) $+i$, c) -1, d) $-i$, e) $+1$, f) $-i$, g) -1, h) $+i$

Aufgabe 8. a) $-2i$, b) $-\frac{194x^2yi}{117z^2}$, c) $+59i\sqrt{5}$, d) $-\frac{ai}{3b}\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}$, e) $+5i\sqrt{7}$, f) $+\frac{i}{x}\cdot\sqrt{\frac{y}{x}}$

Aufgabe 10. a) $+a^3$, b) $-\frac{x^4y^2}{z^2}$, c) $-10i$, d) $-6\cdot\left(3\sqrt{2}-4\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$, e) $y^2(z-x)$, f) $2\cdot(3\sqrt{10}-8)$, g) $+6$, h) $-(616{,}5+822\cdot\sqrt{2})\,i = 545{,}808\,i$

Aufgabe 13. a) -24, b) $+\frac{y}{x}i\sqrt{z}$, c) $-2{,}7$, d) $2\frac{1}{4}(1+i)$, e) $+3i$, f) $-3\frac{3}{20}+1\frac{1}{2}i$

Aufgabe 16. a) 64, b) $64i\sqrt{2}$, c) -128, d) $-128i\sqrt{2}$, e) $\frac{1}{36}$, f) $-\frac{i}{36\cdot\sqrt{6}}$, g) $-\frac{1}{216}$, h) $+\frac{i}{216\cdot\sqrt{6}}$

Aufgabe 17. a) $+\frac{a^2b}{c}$, b) $-32i\cdot\sqrt{\frac{1}{8}}$, c) $-a^{10}b^{10}\sqrt{ab}$, d) $-60\frac{3}{4}$, e) $+\frac{20}{2187}$

2) Komplexe Zahlen.

Aufgabe 19. a) $+5-33i$, b) $1+i$, c) 0; d) $+3{,}8i$, e) $-18+4\frac{3}{4}i$, f) $+24-57i$, g) $+\frac{14x}{y^2z^3}$

Aufgabe 23. a) $0{,}06i-0{,}03 = 0{,}03(2i-1)$, b) $8-i$, c) 25, d) $\frac{8}{9}$, e) $x\cdot(1-\sqrt{y}+y)+yi\sqrt{x}$, f) $a^2-b^2+c^2-2bci$,
g) $-41+i\left(30-42-28\sqrt{\frac{3}{2}}+30\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = -41-22{,}82i = -(41+22{,}82i)$
h) $+\frac{4}{3}$

Aufgabe 24. Norm $= +225$, Modulus $= +15$

Aufgabe 25. Norm $= +2025$, Modulus $= +45$