Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Lehrbuch des Rechnens mit imaginären und komplexen Zahlen

Krüger, Richard

Stuttgart, 1891

Anhang

urn:nbn:de:bsz:31-101180

Visual Library

oder, weil sich die Faktoren 2 und i sämtlicher Glieder der Klammer gegen 2^n bezw. i^n im Nenner fortheben und

$$i^{n-1} = i^{2\cdot\left(\frac{n-1}{2}\right)} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

ist:

$$\sin^n \varphi = \frac{1}{2^{n-1}\cdot(-1)^{\frac{n-1}{2}}}\cdot\left[\sin n\varphi - n\cdot\sin(n-2)\varphi + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\sin(n-4)\varphi - \cdots\right]$$

(vergl. Erkl. 221)

Anhang.

A. Verzeichnis der Resultate der ungelösten Aufgaben.

1) Imaginäre Zahlen.

Aufgabe 3. $\sqrt[2]{-121} = \pm 11\,i$; reeller Faktor rational

Aufgabe 4. $\sqrt[2]{-5} = \pm 2{,}236\cdots i$; reeller Faktor irrational

Aufgabe 6. a) $+1$, b) $+i$, c) -1, d) $-i$, e) $+1$, f) $-i$, g) -1, h) $+i$

Aufgabe 8. a) $-2i$, b) $-\frac{194x^2yi}{117z^2}$, c) $+59i\sqrt{5}$, d) $-\frac{ai}{3b}\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}$, e) $+5i\sqrt{7}$, f) $+\frac{i}{x}\cdot\sqrt{\frac{y}{x}}$

Aufgabe 10. a) $+a^3$, b) $-\frac{x^4y^2}{z^2}$, c) $-10i$, d) $-6\cdot\left(3\sqrt{2}-4\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$, e) $y^2(z-x)$, f) $2\cdot(3\sqrt{10}-8)$, g) $+6$, h) $-(616{,}5+822\cdot\sqrt{2})\,i = 545{,}808\,i$

Aufgabe 13. a) -24, b) $+\frac{y}{x}i\sqrt{z}$, c) $-2{,}7$, d) $2\frac{1}{4}(1+i)$, e) $+3i$, f) $-3\frac{3}{20}+1\frac{1}{2}i$

Aufgabe 16. a) 64, b) $64i\sqrt{2}$, c) -128, d) $-128i\sqrt{2}$, e) $\frac{1}{36}$, f) $-\frac{i}{36\cdot\sqrt{6}}$, g) $-\frac{1}{216}$, h) $+\frac{i}{216\cdot\sqrt{6}}$

Aufgabe 17. a) $+\frac{a^2b}{c}$, b) $-32i\cdot\sqrt{\frac{1}{8}}$, c) $-a^{10}b^{10}\sqrt{ab}$, d) $-60\frac{3}{4}$, e) $+\frac{20}{2187}$

2) Komplexe Zahlen.

Aufgabe 19. a) $+5-33i$, b) $1+i$, c) 0; d) $+3{,}8i$, e) $-18+4\frac{3}{4}i$, f) $+24-57i$, g) $+\frac{14x}{y^2z^3}$

Aufgabe 23. a) $0{,}06i-0{,}03 = 0{,}03(2i-1)$, b) $8-i$, c) 25, d) $\frac{8}{9}$, e) $x\cdot(1-\sqrt{y}+y)+yi\sqrt{x}$, f) $a^2-b^2+c^2-2bci$,
g) $-41+i\left(30-42-28\sqrt{\frac{3}{2}}+30\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = -41-22{,}82i = -(41+22{,}82i)$
h) $+\frac{4}{3}$

Aufgabe 24. Norm $= +225$, Modulus $= +15$

Aufgabe 25. Norm $= +2025$, Modulus $= +45$

Aufgabe 28. a) $-\frac{1}{29}\cdot(19+4i)$, b) $+\frac{1}{11}\cdot(5-4i\sqrt{6})$, c) $0{,}2299-0{,}9974i$, d) $+2i$,
e) $+1$, f) $2\cdot(3+i\sqrt{3})$, g) $3\frac{9}{13}+5\frac{7}{13}i$, h) $0{,}0414-0{,}5428i$,
i) $0{,}1824\cdots+0{,}06289\cdots i$

Aufgabe 29. Norm $=\frac{81}{100}$, Modulus $=\frac{9}{10}$

Aufgabe 35. a) $-164+3360i$, b) $8\cdot(1-i)$, c) $\frac{666-413i}{614125}$,
d) $-465-531i=-3\cdot(155+177i)$

Aufgabe 36. $+48i$

Aufgabe 37. Die erste Potenz gibt: $2\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}-3\cdot\sqrt{-\frac{1}{3}}$, die zweite: $-1\frac{2}{3}-4i$,
die dritte: $-\sqrt{\frac{1}{3}}\cdot\left(15\frac{1}{3}+3i\right)$, die vierte: $-13\frac{2}{9}+13\frac{1}{3}i$,
die fünfte: $+\sqrt{\frac{1}{3}}\cdot\left(13\frac{5}{9}+66\frac{1}{3}i\right)$

Aufgabe 40. a) $\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot(3+i)$, b) $\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot(1-5i)$, c) $\pm\sqrt{\frac{11}{2}}\cdot(1+i)$,
d) $2(1-\sqrt{6})+i(4+\sqrt{6})=-2{,}898\cdots+6{,}449\cdots i$, e) $\frac{43-19i}{26}$,
f) $\frac{5x}{z}\cdot\sqrt{r}-2xi\cdot\sqrt{\frac{y}{r}}$, g) $\pm 2\cdot\sqrt{\frac{2+\sqrt{68}}{2}}=\pm 2\cdot\sqrt{1+\sqrt{17}}$

---

3) Graphische und trigonometrische Darstellung der imaginären und komplexen Zahlen.

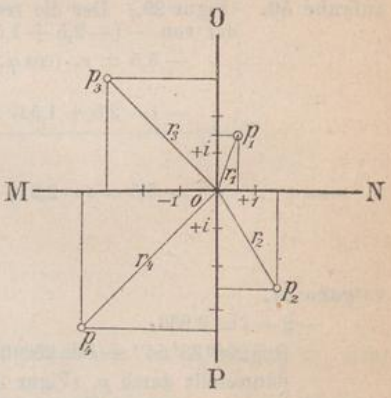
Aufgabe 42. a) Der Modulus ist:
$r_1=\sqrt{0{,}5^2+1{,}5^2}=\sqrt{2{,}5}=1{,}58\cdots$
der die Komplexe darstellende Punkt ist p_1 (Figur 28).

b) Der Modulus ist:
$r_2=\sqrt{1{,}5^2+2{,}5^2}=\sqrt{8{,}5}=2{,}9\cdots$
der die Komplexe darstellende Punkt ist p_2.

c) $r_3=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{18}=4{,}24\cdots$
der Punkt von $-3+\sqrt{-9}$ ist p_3.

d) $r_4=\sqrt{3{,}5^2+3{,}5^2}=\sqrt{24{,}5}=4{,}949\cdots$
der Punkt von:
$+i\cdot\sqrt{-12{,}25}-\sqrt{-12{,}25}$
ist p_4.

Figur 28.



Aufgabe 44. a) $r=\sqrt{25}=5$; $\varphi=36^0\,52'\,12''$; $4+3i=5\cdot(\cos 36^0\,52'\,12''+i\sin 36^0\,52'\,12'')$

b) $r=\sqrt{1754}=$ rund 48; $\varphi=180^0-33^0\,18'\,38''=146^0\,41'\,22''$;
$-35+23i=48\cdot(\cos 146^0\,41'\,22''+i\cdot\sin 146^0\,41'\,22'')$

c) $r=\sqrt{324}=18$; $\varphi=360^0-39^0\,31'\,10''=320^0\,28'\,50''$;
$13-\sqrt{-155}=18\cdot(\cos 320^0\,28'\,50''+i\sin 320^0\,28'\,50'')$

d) $r=\sqrt{121}=11$; $\varphi=180^0+65^0\,22'\,42''=245^0\,22'\,42''$;
$-\sqrt{21}-10i=11\cdot(\cos 245^0\,22'\,42''+i\sin 245^0\,22'\,42'')$

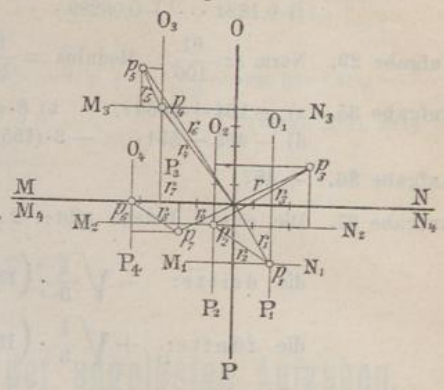
BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Baden-Württemberg

4) Das graphische und trigonometrische Rechnen mit imaginären und komplexen Zahlen.

Aufgabe 48. Der die komplexe Zahl $+2-3i$ darstellende Punkt ist p_1, der von $-3+2i$: p_2, der von $+5+3i$: p_3, der von der Summe dieser Komplexen: p_6 (Figur 29).

$$2-3i = r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$
$$= 3{,}6056\cdot(\cos 303^0 41' 23'' + i\sin 303^0 41' 23'')$$
oder:
$$= 3{,}6056\cdot(\cos 56^0 18' 37'' - i\sin 56^0 18' 37'')$$
$$-3+2i = r_2\cdot(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$
$$= 3{,}6056\cdot(\cos 146^0 18' 36'' + i\sin 146^0 18' 36'')$$
oder:
$$= 3{,}6056\cdot(-\cos 33^0 41' 24'' + i\sin 33^0 41' 24'')$$
$$+5+3i = r_3\cdot(\cos\varphi_3 + i\sin\varphi_3)$$
$$= 5{,}831\cdot(\cos 30^0 57' 51'' + i\sin 30^0 57' 51'')$$
$$(+2-3i)+(-3+2i)+(+5+3i)$$
$$= +4+2i = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$
$$= 4{,}4721\cdot(\cos 26^0 33' 54'' + i\sin 26^0 33' 54'')$$

Figur 29.



Aufgabe 49. (Figur 29.) Der die komplexe Zahl $-4+5i$ darstellende Punkt ist p_4 (bezogen auf $MNOP$); der Punkt von $-(+1-2i)$ oder $-1+2i$ ist p_5 (bezogen auf $M_3N_3O_3P_3$); der Punkt der Differenz ist p_6 (bezogen auf $MNOP$).

$$-4+5i = r_4\cdot(\cos\varphi_4 + i\sin\varphi_4) = 6{,}403\cdot(\cos 128^0 39' 36'' + i\sin 128^0 39' 36'')$$
oder $= 6{,}403\cdot(-\cos 51^0 20' 24'' + i\sin 51^0 20' 24'')$
$$-(+1-2i) = -1+2i = r_5\cdot(\cos\varphi_5 + i\sin\varphi_5)$$
$$= 2{,}2361\cdot(\cos 116^0 33' 56'' + i\sin 116^0 33' 56'')$$
oder $= 2{,}2361\cdot(-\cos 63^0 26' 4'' + i\sin 63^0 26' 4'')$
$$(-4+5i)-(+1-2i) = r_6\cdot(\cos\varphi_6 + i\sin\varphi_6)$$
$$= 8{,}6023\cdot(\cos 125^0 32' 20'' + i\sin 125^0 32' 20'')$$
oder $= 8{,}6023\cdot(-\cos 54^0 27' 40'' + i\sin 54^0 27' 40'')$

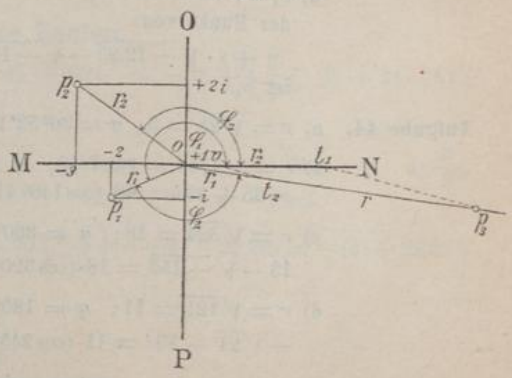
Aufgabe 50. (Figur 29.) Der die reelle Zahl darstellende Punkt ist p_6 (bezogen auf $MNOP$), der von $-(-2{,}5+1{,}5i) = +2{,}5-1{,}5i$ ist p_7 (bezogen auf $M_4N_4O_4P_4$).

$$-5{,}5 = r_7\cdot(\cos\varphi_7 + i\sin\varphi_7) = 5{,}5\cdot(\cos 180^0 + i\sin 180^0)$$
$$= 5{,}5\cdot(-\cos 0^0 + i\sin 0^0)$$
$$-(-2{,}5+1{,}5i) = +2{,}5-1{,}5i = r_8\cdot(\cos\varphi_8 + i\sin\varphi_8)$$
$$= 2{,}916\cdot(\cos 329^0 2' 9'' + i\sin 329^0 2' 9'')$$
oder $= 2{,}916\cdot(\cos 30^0 57' 51'' + i\sin 30^0 57' 51'')$
$$-5{,}5-(-2{,}5+1{,}5i) = -3-1{,}5i = r_9\cdot(\cos\varphi_9 + i\sin\varphi_9)$$
$$= 3{,}354\cdot(\cos 206^0 33' 54'' + i\sin 206^0 33' 54'')$$
oder $= 3{,}354\cdot(\cos 26^0 33' 54'' - i\sin 26^0 33' 54'')$

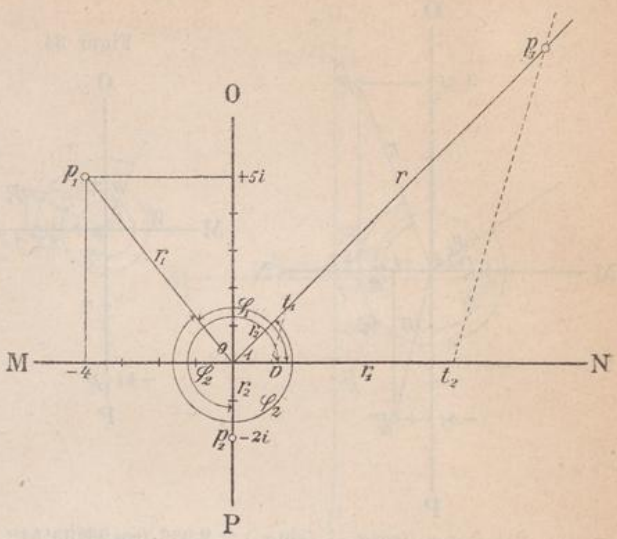
Aufgabe 54.

$$-2-i = 2{,}236\cdot(\cos 206^0 33' 54'' + i\sin 206^0 33' 54'')$$
dargestellt durch p_1 (Figur 30).
$$(-3+2i) = 3{,}6056\cdot(\cos 146^0 18' 36'' + i\sin 146^0 18' 36'')$$
dargestellt durch p_2.
$$(-2-i)\cdot(-3+2i) = 2{,}236\cdot 3{,}6056\cdot(\cos 352^0 52' 30'' + i\sin 352^0 52' 30'')$$
oder auch:
$$= 8{,}06\cdot(\cos 7^0 7' 30'' - i\cdot\sin 7^0 7' 30'')$$
dargestellt durch p_3.

Figur 30.



Figur 31.



Aufgabe 55.

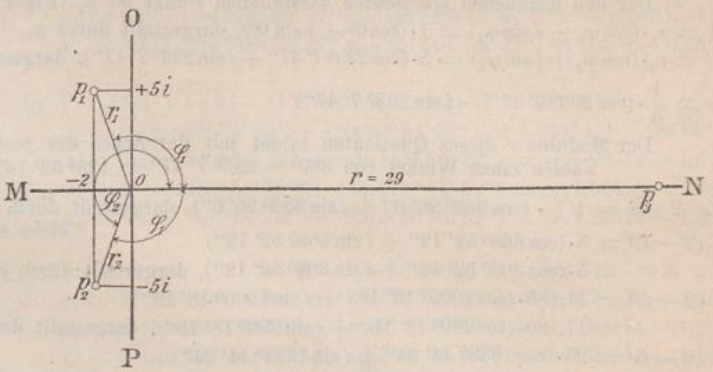
$-4+5i = 6{,}403\cdot$
$(\cos 128^0 39' 36'' + i \sin 128^0 39' 36'')$
dargestellt durch p_1 (Figur 31).

$-2i = 2\cdot(\cos 270^0 + i \sin 270^0)$
dargestellt durch p_2.

$(-4+5i)\cdot(-2i) = 12{,}806\cdot$
$(\cos 398^0 39' 36'' + i \sin 398^0 39' 36'')$
oder auch:
$= 12{,}806\cdot$
$(\cos 38^0 39' 36'' + i \sin 38^0 39'' 36'')$
dargestellt durch p_3.

Aufgabe 56. $-2+5i = 5{,}385\cdot(\cos 111^0 48' 7'' + i \sin 111^0 48' 7'')$, dargestellt durch p_1 (Fig. 32).
$-2-5i = 5{,}385\cdot(\cos 248^0 11' 53'' + i \sin 248^0 11' 53'')$, dargestellt durch p_2,
$(-2+5i)\cdot(-2-5i) = 5{,}385^2\cdot(\cos 360^0 + i \sin 360^0)$
$= 29$, dargestellt durch p_3.

Figur 32.



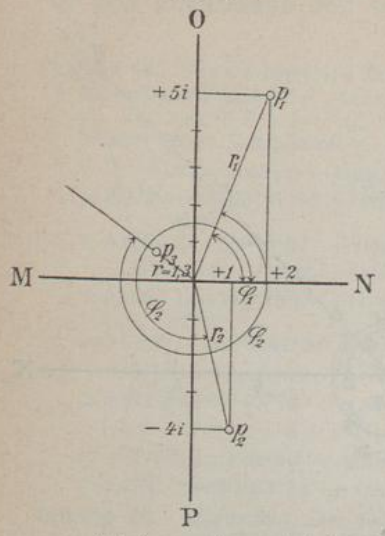
Aufgabe 58. a) Der den gegebenen Quotienten darstellende Punkt ist p_3 (Figur 33, siehe nächste Seite).

$$2+5i = r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = 5{,}385\cdot(\cos 68^0 11' 53'' + i \sin 68^0 11' 53'')$$
$$1-4i = r_2\cdot(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = 4{,}123\cdot(\cos 284^0 2' 12'' + i \sin 284^0 2' 12'')$$
$$\frac{2+5i}{1-4i} = \frac{5{,}385}{4{,}123}\cdot[\cos(68^0 11' 53'' - 284^0 2' 12'') + i \sin(68^0 11' 53'' - 284^0 2' 12'')]$$
$$\text{oder} = 1{,}306\cdot(\cos 215^0 50' 19'' - i \sin 215^0 50' 19'')$$

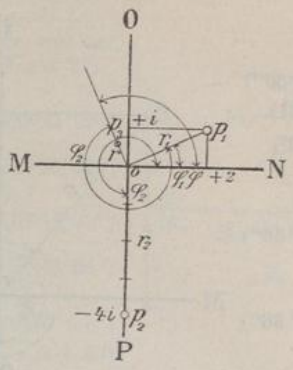
Der Modulus r des Quotienten schliesst mit der Achse der positiven reellen Zahlen einen Winkel von $360^0 - 215^0 50' 19'' = 144^0 9' 41''$ ein.

b) Der den gegebenen Quotienten $\frac{+2+i}{-4i}$ darstellende Punkt ist p_3 (Figur 34, siehe nächste Seite).

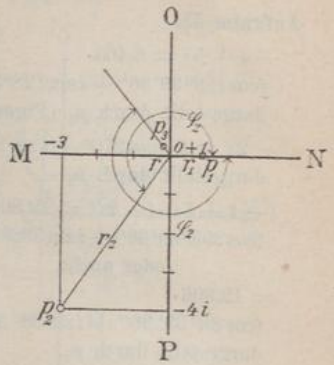
Figur 33.



Figur 34.



Figur 35.



$2+i = r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = 2{,}236 \cdot (\cos 26^0\,33'\,54'' + i\sin 26^0\,33'\,54'')$, dargestellt durch p_1.

$-4i = r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = 4 \cdot (\cos 270^0 + i\sin 270^0)$, dargestellt durch p_2.

$$\frac{2+i}{-4i} = \frac{2{,}236}{4} \cdot [\cos(26^0\,33'\,54'' - 270^0) + i\sin(26^0\,33'\,54'' - 270^0)]$$

$$= 0{,}559 \cdot (\cos 243^0\,26'\,6'' - i\sin 243^0\,26'\,6'')$$

Der Modulus r dieses Quotienten schliesst mit der Achse der positiven reellen Zahlen einen Winkel von $360^0 - 243^0\,26'\,6'' = 116^0\,33'\,54''$ ein.

c) Der den gegebenen Quotienten darstellende Punkt ist p_3 (Figur 35).

$1 = r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = 1 \cdot (\cos 0^0 + i\sin 0^0)$, dargestellt durch p_1.

$-3-4i = r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = 5 \cdot (\cos 233^0\,7'\,47'' + i\sin 233^0\,7'\,47'')$, dargestellt durch p_2.

$$\frac{1}{-3-4i} = \frac{1}{5} \cdot (\cos 233^0\,7'\,47'' - i\sin 233^0\,7'\,47'')$$

Der Modulus r dieses Quotienten bildet mit der Achse der positiven reellen Zahlen einen Winkel von $360^0 - 233^0\,7'\,47'' = 126^0\,52'\,13''$.

Aufgabe 62. $2-i = \sqrt{5} \cdot (\cos 333^0\,26'\,6'' + i\sin 333^0\,26'\,6'')$, dargestellt durch p_1 (Figur 36, siehe nebenstehend).

$(2-i)^2 = 5 \cdot (\cos 666^0\,52'\,12'' + i\sin 666^0\,52'\,12'')$
$= 5 \cdot (\cos 306^0\,52'\,12'' + i\sin 306^0\,52'\,12'')$, dargestellt durch p_2.

$(2-i)^3 = 11{,}180 \cdot (\cos 1000^0\,18'\,18'' + i\sin 1000^0\,18'\,18'')$
$= 11{,}180 \cdot (\cos 280^0\,18'\,18'' + i\sin 280^0\,18'\,18'')$, dargestellt durch p_3.

$(2-i)^4 = 25 \cdot (\cos 1333^0\,44'\,24'' + i\sin 1333^0\,44'\,24'')$
$= 25 \cdot (\cos 253^0\,44'\,24'' + i\sin 253^0\,44'\,24'')$, dargestellt durch p_4.

$(2-i)^5 = 55{,}9 \cdot (\cos 1667^0\,10'\,30'' + i\sin 1667^0\,10'\,30'')$
$= 55{,}9 \cdot (\cos 227^0\,10'\,30'' + i\sin 227^0\,10'\,30'')$, dargestellt durch p_5.

Aufgabe 63. $(+1{,}5\,i)^{-1} = \frac{1}{1{,}5} \cdot (\cos 90^0 - i\sin 90^0) = 0{,}667 \cdot (\cos 270^0 + i\sin 270^0)$ dargestellt durch p_2 (Figur 37, siehe nebenstehend).

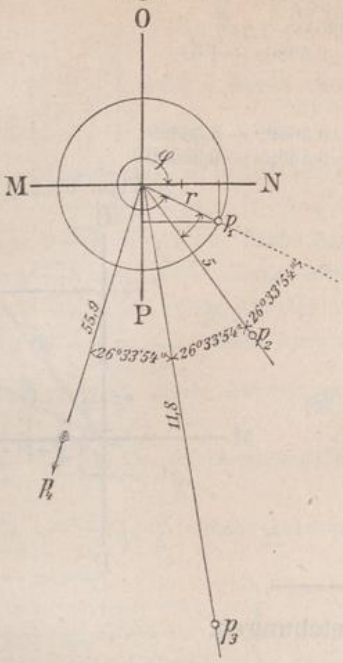
$(+1{,}5\,i)^{-2} = \frac{1}{1{,}5^2} \cdot (\cos 180^0 - i\sin 180^0) = 0{,}444 \cdot (\cos 180^0 + i\sin 180^0)$ dargestellt durch p_3.

$(+1{,}5\,i)^{-3} = \frac{1}{1{,}5^3} \cdot (\cos 270^0 - i\sin 270^0) = 0{,}296 \cdot (\cos 90^0 + i\sin 90^0)$ dargestellt durch p_4.

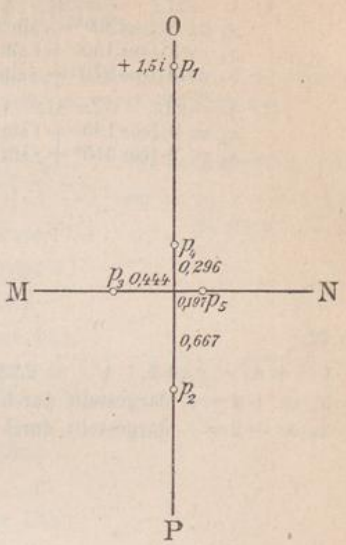
$(+1{,}5\,i)^{-4} = \frac{1}{1{,}5^4} \cdot (\cos 360^0 - i\sin 360^0) = 0{,}197 \cdot (\cos 0^0 + i\sin 0^0)$ dargestellt durch p_5.

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Baden-Württemberg

Figur 36.



Figur 37.



Aufgabe 70. a) $\sqrt[3]{35-23i}$, $r=1754$, $\sqrt[3]{r}=3{,}473$, $\varphi=326^0\,41'\,22''$

$x_1=3{,}473\cdot(\cos 108^0\,53'\,47''+i\sin 108^0\,53'\,47'')=-1{,}125+3{,}286\,i$

$x_2=3{,}473\cdot(\cos 228^0\,53'\,47''+i\sin 228^0\,53'\,47'')=-2{,}283-2{,}617\,i$

$x_3=3{,}473\cdot(\cos 348^0\,53'\,47''+i\sin 348^0\,53'\,47'')=3{,}408-0{,}669\,i$

b) $\sqrt[4]{-15+\sqrt{-31}}$ 1) Erste Lösung: $r=16$, $\sqrt[4]{r}=2$, $\varphi=159^0\,38'\,9''$

$x_1=2\cdot(\cos 39^0\,54'\,32''+i\sin 39^0\,54'\,32'')=1{,}53414+1{,}28314\,i$

$x_2=2\cdot(\cos 129^0\,54'\,32''+i\sin 129^0\,54'\,32'')=-1{,}28314+1{,}53414\,i$

$x_3=2\cdot(\cos 219^0\,54'\,32''+i\sin 219^0\,54'\,32'')=-1{,}53414-1{,}28314\,i$

$x_4=2\cdot(\cos 309^0\,54'\,32''+i\sin 309^0\,54'\,32'')=+1{,}28314-1{,}53414\,i$

2) Zweite Lösung: $r=16$, $\sqrt[4]{r}=2$, $\varphi=339^0\,38'\,9''$

$x_1=2\cdot(\cos 129^0\,54'\,32''+i\sin 129^0\,54'\,32'')=-1{,}28314+1{,}53414\,i$

$x_2=2\cdot(\cos 219^0\,54'\,32''+i\sin 219^0\,54'\,32'')=-1{,}53414-1{,}28314\,i$

$x_3=2\cdot(\cos 309^0\,54'\,32''+i\sin 309^0\,54'\,32'')=+1{,}28314-1{,}53414\,i$

$x_4=2\cdot(\cos 399^0\,54'\,32''+i\sin 399^0\,54'\,32'')$

$=2\cdot(\cos 39^0\,54'\,32''+i\sin 39^0\,54'\,32'')=1{,}53414+1{,}28314\,i$

c) $\sqrt[4]{625}$, $r=625$, $\sqrt[4]{r}=5$

$x_1=5\cdot(\cos 0^0+i\sin 0^0)=+5$, $x_2=5\cdot(\cos 90^0+i\sin 90^0)=+5\,i$

$x_3=5\cdot(\cos 180^0+i\sin 180^0)=-5$, $x_4=5\cdot(\cos 270^0+i\sin 270^0)=-5\,i$

d) $\sqrt[5]{-243}$, $r=243$, $\sqrt[5]{r}=3$

$x_1=3\cdot(\cos 36^0+i\sin 36^0)=2{,}42706+1{,}76337\,i$

$x_2=3\cdot(\cos 108^0+i\sin 108^0)=-0{,}92706+2{,}85318\,i$

$x_3=3\cdot(\cos 180^0+i\sin 180^0)=-3$

$x_4=3\cdot(\cos 252^0+i\sin 252^0)=-0{,}92706-2{,}85318\,i$

$x_5=5\cdot(\cos 324^0+i\sin 324^0)=+2{,}42706-1{,}76337\,i$

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Baden-Württemberg

e) $\sqrt[3]{-27i}$, $r = 27$, $\sqrt[3]{r} = 3$

$x_1 = 3\cdot(\cos 30^0 + i \sin 30^0) = 2{,}59809 + 1{,}5\,i$

$x_2 = 3\cdot(\cos 150^0 + i \sin 150^0) = -2{,}59809 + 1{,}5\,i$

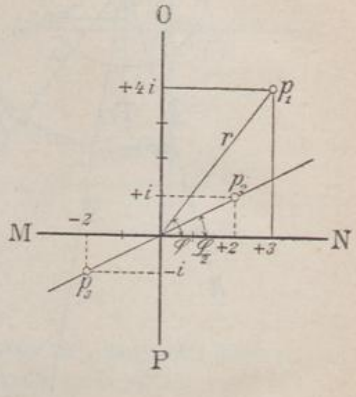
$x_3 = 3\cdot(\cos 270^0 + i \sin 270^0) = -3\,i$

f) $\sqrt{-81i}$, $r = 81$, $\sqrt{r} = 9$

$x_1 = 9\cdot(\cos 135^0 + i \sin 135^0) = -6{,}36399 + 6{,}36399\,i$

$x_2 = 9\cdot(\cos 315^0 + i \sin 315^0) = +6{,}36399 - 6{,}36399\,i$

Figur 38.



Aufgabe 72.

$\sqrt{3+4i}$, $r = 5$, $\sqrt{r} = 2{,}236$

$x_1 = +2 + i$, dargestellt durch p_2 (Figur 38).

$x_2 = -2 - i$, dargestellt durch p_3.

5) Binomische Gleichungen.

Aufgabe 74. a) $x_1 = +i$, $x_2 = -i$

b) $x_1 = +1$, $x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{3}$, $x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\sqrt{3}$

c) $x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{2}$

$x_3 = \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2} i\sqrt{2}$, $x_4 = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2} i\sqrt{2}$

d) $x_1 = 1$, $x_2 = 0{,}30902 + 0{,}95106\,i$, $x_3 = -0{,}80902 + 0{,}58779\,i$

$x_4 = 0{,}30902 - 0{,}95106\,i$, $x_5 = -0{,}80902 - 0{,}58779\,i$

6) Darstellung von $\sin^n\varphi$ und $\cos^n\varphi$ durch $\sin n\varphi$ und $\cos n\varphi$.

Aufgabe 79. a) $\cos^3\varphi = \frac{1}{4}\cdot(\cos 3\varphi + 3\cos\varphi)$

b) $\cos^4\varphi = \frac{1}{8}\cdot(\cos 4\varphi + 4\cos 2\varphi + 3)$

c) $\sin^5\varphi = \frac{1}{16}\cdot(\sin 5\varphi + 5\sin 3\varphi + 10\sin\varphi)$

d) $\sin^6\varphi = \frac{1}{32}\cdot(-\cos 6\varphi + 6\cos 4\varphi - 15\cos 2\varphi + 10)$

Aufgabe 80. a) $\cos^3 40^0 = 0{,}44953$, b) $\cos^4 40^0 = 0{,}344364$, c) $\sin^5 20^0 = 0{,}0047$

d) $\sin^6 20^0 = 0{,}0016$

7) Darstellung von $\sin n\varphi$ und $\cos n\varphi$ durch $\sin^n\varphi$ und $\cos^n\varphi$.

Aufgabe 85. a) $\sin 3\varphi = 3\cdot\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi - \sin^3\varphi$

b) $\sin 4\varphi = 4\cdot\cos^3\varphi\cdot\sin\varphi - 4\cdot\cos\varphi\cdot\sin^3\varphi$

c) $\cos 5\varphi = \cos^5\varphi - 10\cdot\cos^3\varphi\cdot\sin^2\varphi + 5\cdot\cos\varphi\cdot\sin^4\varphi$

d) $\cos 6\varphi = \cos^6\varphi - 15\cdot\cos^4\varphi\cdot\sin^2\varphi + 15\cdot\cos^2\varphi\cdot\sin^4\varphi - \sin^6\varphi$

Aufgabe 86. a) $\sin 3\varphi = \sin 60^0 = 0{,}86603$, b) $\sin 4\varphi = \sin 80^0 = 0{,}98441$

c) $\cos 5\varphi = \cos 275^0 = 0{,}08716$, d) $\cos 6\varphi = \cos 330^0 = 0{,}86603$

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Baden-Württemberg

B. Formelverzeichnis.

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ i^{4n} = +1 \\ 2)\ i^{4n+1} = +i \\ 3)\ i^{4n+2} = -1 \\ 4)\ i^{4n+3} = -i \end{array}\right\}$$ wenn n irgend eine reelle, positive oder negative Zahl (einschliesslich Null) bedeutet. (Siehe Antwort auf Frage 5.)

5) $(\pm\sqrt{-a}) + (\pm\sqrt{-b}) = [(\pm\sqrt{a}) + (\pm\sqrt{b})]\cdot\sqrt{-1}$ (Siehe Antwort auf Frage 6.)

6) $(\pm\sqrt{-a}) - (\pm\sqrt{-b}) = [(\pm\sqrt{a}) - (\pm\sqrt{b})]\cdot\sqrt{-1}$ oder $= (\pm\sqrt{a}\mp\sqrt{b})\cdot\sqrt{-1}$ (S. Antw. auf Frage 7.)

7) $\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b} = -\sqrt{ab}$ (Siehe Antwort auf Frage 8.)

8) $\sqrt{a}\cdot\sqrt{-b} = \sqrt{-ab}$ (Siehe Antwort auf Frage 9.)

9) $\sqrt{a}\cdot\sqrt{-a} = ai$ (Siehe Antwort auf Frage 10.)

10) $\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-a} = -a$ (Siehe Antwort auf Frage 11.)

11) $\dfrac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$ (Siehe Antwort auf Frage 12.)

12) $\dfrac{\sqrt{-a}}{\sqrt{b}} = i\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ (Siehe Antwort auf Frage 13a.)

13) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}} = -i\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ (Siehe Antwort auf Frage 13b.)

$$\left.\begin{array}{l} 14)\ (r\cdot i)^{4n} = r^{4n} \\ 15)\ (r\cdot i)^{4n+1} = i\cdot r^{4n+1} \\ 16)\ (r\cdot i)^{4n+2} = -r^{4n+2} \\ 17)\ (r\cdot i)^{4n+3} = -i\cdot r^{4n+3} \\ 18)\ (r\cdot i)^{-4n} = \left(\dfrac{1}{r}\right)^{4n} \\ 19)\ (r\cdot i)^{-(4n+1)} = -\dfrac{i}{r^{4n+1}} \\ 20)\ (r\cdot i)^{-(4n+2)} = -\left(\dfrac{1}{r}\right)^{4n+2} \\ 21)\ (r\cdot i)^{-(4n+3)} = +\dfrac{i}{r^{4n+3}} \end{array}\right\}$$ wenn r den reellen Faktor der imaginären Zahl bedeutet und n eine positive ganze Zahl ist. (Siehe Antwort auf Frage 18.)

---

22) $(\pm a \pm bi) + (\pm\alpha \pm \beta i) = (\pm a \pm \alpha) + (\pm b \pm \beta)\cdot i$ (S. Antwort auf Frage 26.)

23) $(\pm a \pm bi) - (\pm\alpha \pm \beta i) = (\pm a \mp \alpha) + (\pm b \mp \beta)\cdot i$ (S. Antwort auf Frage 29.)

24) $(\pm a \pm bi)\cdot(\pm\alpha \pm \beta i) = (\pm a\cdot\alpha \mp b\cdot\beta) + (\pm\alpha b \pm a\beta)\cdot i$ (S. Antwort auf Frage 33.)

$$\left.\begin{array}{l} 25)\ (a+bi)\cdot\alpha = a\cdot\alpha + \alpha\cdot bi \\ 26)\ (a+bi)\cdot\beta i = a\cdot\beta i - b\cdot\beta \end{array}\right\}$$ (S. Antwort auf Frage 34.)

27) $(a+bi)\cdot(a-bi) = a^2 + b^2$ (S. Antwort auf Frage 35.)

28) $\dfrac{\pm a \pm bi}{\pm\alpha \pm \beta i} = \dfrac{(\pm a\cdot\alpha \pm b\cdot\beta) + (\pm\alpha\cdot b \mp a\cdot\beta)\cdot i}{\alpha^2 + \beta^2}$ (S. Antwort auf Frage 38.)

$$\left.\begin{array}{l} 29)\ (a+bi):\alpha = \dfrac{a}{\alpha} + \dfrac{bi}{\alpha} \\ 30)\ (a+bi):\beta i = -\dfrac{ai}{\beta} + \dfrac{b}{\beta} \end{array}\right\}$$ (S. Antwort auf Frage 40.)

31) $\dfrac{1}{a \pm bi} = \dfrac{a \mp bi}{a^2 + b^2}$ (S. Antwort auf Frage 42.)

32) $$(a \pm bi)^n = a^n - \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot a^{n-2}\cdot b^2 + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot a^{n-4}\cdot b^4 - \cdots$$
$$+ \left(\pm n\cdot a^{n-1}\cdot b \mp \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot a^{n-3}\cdot b^3 \pm \cdots\right)\cdot i$$

(Alle oberen Zeichen gelten für $(a+bi)^n$, alle unteren für $(a-bi)^n$ (S. Antw. auf Fr. 48.)

33) $(a \pm bi)^{-n} = \frac{1}{(a \pm bi)^n}$ (Siehe Formel 32.)

34) $\sqrt{+a \pm bi} = \pm\left[\sqrt{\frac{+a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \pm i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right]$ (S. Antw. auf Frage 51.)

---

35) $(a+bi)\cdot(\alpha+\beta i)\cdot(\gamma+\delta i)\cdots = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r_1\cdot r_2\cdot r_3\cdots$
$[\cos(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\cdots) + i\cdot\sin(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\cdots)]$ (S. Antwort auf Frage 67.)

36) $\frac{a+bi}{\alpha+\beta i} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\cdot\sin(\varphi_1-\varphi_2)]$,
wenn $(a+bi) = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ und $(\alpha+\beta i) = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ ist.
(S. Antwort auf Frage 71.)

37) $\frac{1}{a+bi} = \frac{1}{r_1}\cdot(\cos\varphi_1 - i\sin\varphi_1)$, wenn $(a+bi) = r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ ist. (S. Antwort auf Fr. 72.)

38) $(a+bi)^n = r^n\cdot(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$, wenn $(a+bi) = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ist.
(S. Antwort auf Frage 76.)

39) $(a+bi)^{-n} = \frac{1}{r^n}\cdot(\cos n\varphi - i\sin n\varphi)$ od. $\frac{1}{r^n}[\cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi)]$ (S. Antwort auf Frage 76.)

40) $(a-bi)^n = r^n\cdot(\cos n\varphi - i\sin n\varphi)$, wenn $(a-bi) = r\cdot(\cos\varphi - i\sin\varphi)$ ist.
(S. Antwort auf Frage 77.)

41) $\sqrt[n]{a+bi} = \sqrt[n]{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$, wenn $(a+bi) = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ist.
(S. Antwort auf Frage 80 und Formel 45 und 46.)

42) $(\sqrt[n]{a+bi})^m$ oder $\sqrt[n]{(a+bi)^m} = \sqrt[n]{r^m}\cdot\left(\cos\frac{m\varphi}{n} + i\sin\frac{m\varphi}{n}\right)$ (S. Antw. auf Frage 81.)

43) $\sqrt[n]{+1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\cdot\sin\frac{2k\pi}{n}$

44) $\sqrt[n]{-1} = \cos\frac{(2k+1)\cdot\pi}{n} + i\cdot\sin\frac{(2k+1)\cdot\pi}{n}$

45) $\sqrt[n]{+(a+bi)} = \sqrt[n]{r}\cdot\left[\cos\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\right]$

46) $\sqrt[n]{-(a+bi)} = \sqrt[n]{r}\cdot\left\{\cos\left[\frac{\varphi+(2k+1)\cdot\pi}{n}\right] + i\cdot\sin\left[\frac{\varphi+(2k+1)\cdot\pi}{n}\right]\right\}$

(S. Antwort auf Frage 83.)

47) $\sqrt[n]{+ai} = \sqrt[n]{a}\cdot\left[\cos\frac{(4k+1)\cdot\pi}{2n} + i\cdot\sin\frac{(4k+1)\cdot\pi}{2n}\right]$

48) $\sqrt[n]{-ai} = \sqrt[n]{a}\cdot\left[\cos\frac{(4k+3)\cdot\pi}{2n} + i\cdot\sin\frac{(4k+3)\cdot\pi}{2n}\right]$

(S. Antwort auf Frage 84.)

---

49) $\cos^n\varphi = \frac{1}{2^{n-1}}\cdot\left[\cos n\varphi + n\cdot\cos(n-2)\varphi + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\cos(n-4)\varphi\right.$
$\left. + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\cos(n-6)\varphi\cdots + \frac{1}{2}\cdot\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots\left(\frac{n+2}{2}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots\frac{n}{2}}\right]$ bei geradem n. (S. Antw. auf Frage 90.)

50) $\cos^n\varphi = \frac{1}{2^{n-1}}\cdot\left[\cos n\varphi + n\cdot\cos(n-2)\varphi + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\cos(n-4)\varphi\right.$
$\left. + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\cos(n-6)\varphi + \cdots + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots\left(\frac{n+3}{2}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots\left(\frac{n-1}{2}\right)}\cdot\cos\varphi\right]$

bei ungeradem n. (S. Antwort auf Frage 90.)

51) $$\sin^n\varphi = \frac{1}{2^{n-1}\cdot(-1)^{\frac{n}{2}}}\cdot\left[\cos n\varphi - n\cdot\cos(n-2)\varphi + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\cos(n-4)\varphi\right.$$
$$\left. - \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\cos(n-6)\varphi + \cdots + \frac{1}{2}\cdot\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots\left(\frac{n+2}{2}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots\cdots\frac{n}{2}}\right]$$

bei geradem n. (Siehe Antwort auf Frage 91.)

52) $$\sin^n\varphi = \frac{1}{2^{n-1}\cdot(-1)^{\frac{n-1}{2}}}\cdot\left[\sin n\varphi - n\cdot\sin(n-2)\varphi + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\sin(n-4)\varphi\right.$$
$$\left. - \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\sin(n-6)\varphi + \cdots + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots\left(\frac{n+3}{2}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots\left(\frac{n-1}{2}\right)}\cdot\sin\varphi\right]$$

bei ungeradem n. (S. Antwort auf Frage 91.)

53) $$\cos n\varphi = \cos^n\varphi - \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\cos^{n-2}\varphi\cdot\sin^2\varphi + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\cos^{n-4}\varphi\cdot\sin^4\varphi$$
$$- \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)\cdot(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\cdot\cos^{n-6}\varphi\cdot\sin^6\varphi + \cdots$$ (S. Antw. auf Fr. 92.)

54) $$\sin^n\varphi = n\cdot\cos^{n-1}\varphi\cdot\sin\varphi - \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\cos^{n-3}\varphi\cdot\sin^3\varphi$$
$$+ \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot\cos^{n-5}\varphi\cdot\sin^5\varphi - \cdots$$ (S. Antw. auf Fr. 93.)

---

55) $$e = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \cdots$$

56) $$e^x = \left(1+\frac{x}{n}\right)^x = 1 + x + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots$$

57) $$e^{-x} = \left(1-\frac{x}{n}\right)^x = 1 - x + \frac{x^2}{1\cdot 2} - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdots$$

(S. Antw. auf Frage 94.)

58) $$i^i = e^{-\frac{\pi}{2}} \text{ oder } = \frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}}$$ (S. Antwort auf Frage 96.)

59) $$l(a+bi) = \frac{1}{2}\cdot l(a^2+b^2) + i\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}$$ (S. Antwort auf Frage 97.)

60) $$\cos^n\varphi = \frac{1}{2^n}\cdot\left[\left(e^{ni\varphi} + e^{-ni\varphi}\right) + n\cdot\left(e^{(n-2)i\varphi} + e^{-(n-2)i\varphi}\right) + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\right.$$
$$\left.\cdot\left(e^{(n-4)i\varphi} + e^{-(n-4)i\varphi}\right) + \cdots\right]$$ (S. Antwort auf Frage 98.)

61) $$\sin^n\varphi = \frac{1}{2^n\cdot i^n}\cdot\left[\left(e^{ni\varphi} - e^{-ni\varphi}\right) - n\cdot\left(e^{(n-2)i\varphi} + e^{-(n-2)i\varphi}\right) + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\right.$$
$$\left.\cdot\left(e^{(n-4)i\varphi} - e^{-(n-4)i\varphi}\right) - \cdots\right]$$ (S. Antwort auf Frage 99.)

C. Litteratur-Verzeichnis.

Vom Verfasser wurden bei der Ausarbeitung des vorliegenden Buches folgende mathematischen Werke vorzugsweise benutzt:

1) Dr. R. Baltzer, Elemente der Mathematik. (Leipzig 1865.) S. 105 bis 108, 113 bis 114.

2) Lejeune Dirichlets Werke, herausgegeben von L. Kronecker. (Berlin 1889.) I. Band. S. 511 bis 532.

3) Dr. H. Durège, Elemente der Theorie der Funktionen einer komplexen veränderlichen Grösse. (Leipzig 1881.) S. 1 bis 11.

4) Dr. F. Grelle, Prinzipien der Arithmetik. (Hannover 1863.) S. 162 bis 179.

5) Handbuch der Mathematik. (Breslau 1879.) I. Bd.: Arithmetik und Algebra, bearbeitet von Dr. F. Reidt. S. 40 bis 42, 61 bis 65.

6) Dasselbe. IV. Bd.: Integralrechnung, II. Teil, bearbeitet von Dr. R. Heger. (S. 678 bis 681.)

7) Dr. E. Heis, Aufgabensammlung aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra. (Köln 1863.) S. 97 und 98.

8) Dr. O. Hermes, Elementaraufgaben aus der Algebra. (Berlin 1875.) S. 86 bis 90.

9) Meier Hirsch, Aufgabensammlung aus der Buchstabenrechnung und Algebra. (Altenburg 1881.) S. 53 bis 55.

10) H. B. Lübsen, Lehrbuch der Analysis. (Leipzig 1868.) S. 85 bis 101, 129 bis 134.

11) Dr. L. Mathiessen, Kommentar zur Heisschen Aufgabensammlung. (Köln 1881.) S. 67 bis 70.

12) Dr. E. Meissel, Lehrbuch der Arithmetik und Algebra. (Berlin 1861.) S. 102 bis 111.

13) Dr. C. Spitz, Lehrbuch der allgemeinen Arithmetik. (Leipzig u. Heidelberg 1873.) S. 279 bis 285.

Zu den logarithmischen und trigonometrischen Berechnungen wurden benutzt:

14) Dr. O. Schlömilch, Fünfstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln. (Braunschweig 1878.)

15) Dr. Th. Wittstein, Fünfstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln. (Hannover 1874.)

D. Druckfehler-Berichtigung.

Seite 27, Zeile 9 von oben lies: $i^{4n+3} = -i$ statt: $i^{4n+3} = +i$.

Seite 141, Zeile 16 und 19 von oben lies: $-\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\cos(n-6)\varphi$

statt: $-\frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\cos(n-6)\varphi$

BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK KARLSRUHE