Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Lehrbuch des Rechnens mit imaginären und komplexen Zahlen

Krüger, Richard

Stuttgart, 1891

B. Formelverzeichnis

urn:nbn:de:bsz:31-101180

Visual Library

B. Formelverzeichnis.

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ i^{4n} = +1 \\ 2)\ i^{4n+1} = +i \\ 3)\ i^{4n+2} = -1 \\ 4)\ i^{4n+3} = -i \end{array}\right\}$$ wenn n irgend eine reelle, positive oder negative Zahl (einschliesslich Null) bedeutet. (Siehe Antwort auf Frage 5.)

5) $(\pm\sqrt{-a}) + (\pm\sqrt{-b}) = [(\pm\sqrt{a}) + (\pm\sqrt{b})]\cdot\sqrt{-1}$ (Siehe Antwort auf Frage 6.)

6) $(\pm\sqrt{-a}) - (\pm\sqrt{-b}) = [(\pm\sqrt{a}) - (\pm\sqrt{b})]\cdot\sqrt{-1}$ oder $= (\pm\sqrt{a}\mp\sqrt{b})\cdot\sqrt{-1}$ (S. Antw. auf Frage 7.)

7) $\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b} = -\sqrt{ab}$ (Siehe Antwort auf Frage 8.)

8) $\sqrt{a}\cdot\sqrt{-b} = \sqrt{-ab}$ (Siehe Antwort auf Frage 9.)

9) $\sqrt{a}\cdot\sqrt{-a} = ai$ (Siehe Antwort auf Frage 10.)

10) $\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-a} = -a$ (Siehe Antwort auf Frage 11.)

11) $\dfrac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$ (Siehe Antwort auf Frage 12.)

12) $\dfrac{\sqrt{-a}}{\sqrt{b}} = i\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ (Siehe Antwort auf Frage 13a.)

13) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}} = -i\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ (Siehe Antwort auf Frage 13b.)

$$\left.\begin{array}{l} 14)\ (r\cdot i)^{4n} = r^{4n} \\ 15)\ (r\cdot i)^{4n+1} = i\cdot r^{4n+1} \\ 16)\ (r\cdot i)^{4n+2} = -r^{4n+2} \\ 17)\ (r\cdot i)^{4n+3} = -i\cdot r^{4n+3} \\ 18)\ (r\cdot i)^{-4n} = \left(\dfrac{1}{r}\right)^{4n} \\ 19)\ (r\cdot i)^{-(4n+1)} = -\dfrac{i}{r^{4n+1}} \\ 20)\ (r\cdot i)^{-(4n+2)} = -\left(\dfrac{1}{r}\right)^{4n+2} \\ 21)\ (r\cdot i)^{-(4n+3)} = +\dfrac{i}{r^{4n+3}} \end{array}\right\}$$ wenn r den reellen Faktor der imaginären Zahl bedeutet und n eine positive ganze Zahl ist. (Siehe Antwort auf Frage 18.)

---

22) $(\pm a \pm bi) + (\pm\alpha \pm \beta i) = (\pm a \pm \alpha) + (\pm b \pm \beta)\cdot i$ (S. Antwort auf Frage 26.)

23) $(\pm a \pm bi) - (\pm\alpha \pm \beta i) = (\pm a \mp \alpha) + (\pm b \mp \beta)\cdot i$ (S. Antwort auf Frage 29.)

24) $(\pm a \pm bi)\cdot(\pm\alpha \pm \beta i) = (\pm a\cdot\alpha \mp b\cdot\beta) + (\pm\alpha b \pm a\beta)\cdot i$ (S. Antwort auf Frage 33.)

$$\left.\begin{array}{l} 25)\ (a+bi)\cdot\alpha = a\cdot\alpha + \alpha\cdot bi \\ 26)\ (a+bi)\cdot\beta i = a\cdot\beta i - b\cdot\beta \end{array}\right\}$$ (S. Antwort auf Frage 34.)

27) $(a+bi)\cdot(a-bi) = a^2 + b^2$ (S. Antwort auf Frage 35.)

28) $\dfrac{\pm a \pm bi}{\pm\alpha \pm \beta i} = \dfrac{(\pm a\cdot\alpha \pm b\cdot\beta) + (\pm\alpha\cdot b \mp a\cdot\beta)\cdot i}{\alpha^2 + \beta^2}$ (S. Antwort auf Frage 38.)

$$\left.\begin{array}{l} 29)\ (a+bi):\alpha = \dfrac{a}{\alpha} + \dfrac{bi}{\alpha} \\ 30)\ (a+bi):\beta i = -\dfrac{ai}{\beta} + \dfrac{b}{\beta} \end{array}\right\}$$ (S. Antwort auf Frage 40.)

31) $\dfrac{1}{a \pm bi} = \dfrac{a \mp bi}{a^2 + b^2}$ (S. Antwort auf Frage 42.)

32) $$(a \pm bi)^n = a^n - \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot a^{n-2}\cdot b^2 + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot a^{n-4}\cdot b^4 - \cdots$$
$$+ \left(\pm n\cdot a^{n-1}\cdot b \mp \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot a^{n-3}\cdot b^3 \pm \cdots\right)\cdot i$$

(Alle oberen Zeichen gelten für $(a+bi)^n$, alle unteren für $(a-bi)^n$ (S. Antw. auf Fr. 48.)

33) $(a \pm bi)^{-n} = \frac{1}{(a \pm bi)^n}$ (Siehe Formel 32.)

34) $\sqrt{+a \pm bi} = \pm\left[\sqrt{\frac{+a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \pm i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right]$ (S. Antw. auf Frage 51.)

---

35) $(a+bi)\cdot(\alpha+\beta i)\cdot(\gamma+\delta i)\cdots = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r_1\cdot r_2\cdot r_3\cdots$
$[\cos(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\cdots) + i\cdot\sin(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\cdots)]$ (S. Antwort auf Frage 67.)

36) $\frac{a+bi}{\alpha+\beta i} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\cdot\sin(\varphi_1-\varphi_2)]$,
wenn $(a+bi) = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ und $(\alpha+\beta i) = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ ist.
(S. Antwort auf Frage 71.)

37) $\frac{1}{a+bi} = \frac{1}{r_1}\cdot(\cos\varphi_1 - i\sin\varphi_1)$, wenn $(a+bi) = r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ ist. (S. Antwort auf Fr. 72.)

38) $(a+bi)^n = r^n\cdot(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$, wenn $(a+bi) = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ist.
(S. Antwort auf Frage 76.)

39) $(a+bi)^{-n} = \frac{1}{r^n}\cdot(\cos n\varphi - i\sin n\varphi)$ od. $\frac{1}{r^n}[\cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi)]$ (S. Antwort auf Frage 76.)

40) $(a-bi)^n = r^n\cdot(\cos n\varphi - i\sin n\varphi)$, wenn $(a-bi) = r\cdot(\cos\varphi - i\sin\varphi)$ ist.
(S. Antwort auf Frage 77.)

41) $\sqrt[n]{a+bi} = \sqrt[n]{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$, wenn $(a+bi) = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ist.
(S. Antwort auf Frage 80 und Formel 45 und 46.)

42) $(\sqrt[n]{a+bi})^m$ oder $\sqrt[n]{(a+bi)^m} = \sqrt[n]{r^m}\cdot\left(\cos\frac{m\varphi}{n} + i\sin\frac{m\varphi}{n}\right)$ (S. Antw. auf Frage 81.)

43) $\sqrt[n]{+1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\cdot\sin\frac{2k\pi}{n}$

44) $\sqrt[n]{-1} = \cos\frac{(2k+1)\cdot\pi}{n} + i\cdot\sin\frac{(2k+1)\cdot\pi}{n}$

45) $\sqrt[n]{+(a+bi)} = \sqrt[n]{r}\cdot\left[\cos\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\right]$

46) $\sqrt[n]{-(a+bi)} = \sqrt[n]{r}\cdot\left\{\cos\left[\frac{\varphi+(2k+1)\cdot\pi}{n}\right] + i\cdot\sin\left[\frac{\varphi+(2k+1)\cdot\pi}{n}\right]\right\}$

(S. Antwort auf Frage 83.)

47) $\sqrt[n]{+ai} = \sqrt[n]{a}\cdot\left[\cos\frac{(4k+1)\cdot\pi}{2n} + i\cdot\sin\frac{(4k+1)\cdot\pi}{2n}\right]$

48) $\sqrt[n]{-ai} = \sqrt[n]{a}\cdot\left[\cos\frac{(4k+3)\cdot\pi}{2n} + i\cdot\sin\frac{(4k+3)\cdot\pi}{2n}\right]$

(S. Antwort auf Frage 84.)

---

49) $\cos^n\varphi = \frac{1}{2^{n-1}}\cdot\left[\cos n\varphi + n\cdot\cos(n-2)\varphi + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\cos(n-4)\varphi\right.$
$\left. + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\cos(n-6)\varphi\cdots + \frac{1}{2}\cdot\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots\left(\frac{n+2}{2}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots\frac{n}{2}}\right]$ bei geradem n. (S. Antw. auf Frage 90.)

50) $\cos^n\varphi = \frac{1}{2^{n-1}}\cdot\left[\cos n\varphi + n\cdot\cos(n-2)\varphi + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\cos(n-4)\varphi\right.$
$\left. + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\cos(n-6)\varphi + \cdots + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots\left(\frac{n+3}{2}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots\left(\frac{n-1}{2}\right)}\cdot\cos\varphi\right]$

bei ungeradem n. (S. Antwort auf Frage 90.)

51) $$\sin^n\varphi = \frac{1}{2^{n-1}\cdot(-1)^{\frac{n}{2}}}\cdot\left[\cos n\varphi - n\cdot\cos(n-2)\varphi + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\cos(n-4)\varphi\right.$$
$$\left. - \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\cos(n-6)\varphi + \cdots + \frac{1}{2}\cdot\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots\left(\frac{n+2}{2}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots\cdots\frac{n}{2}}\right]$$

bei geradem n. (Siehe Antwort auf Frage 91.)

52) $$\sin^n\varphi = \frac{1}{2^{n-1}\cdot(-1)^{\frac{n-1}{2}}}\cdot\left[\sin n\varphi - n\cdot\sin(n-2)\varphi + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\sin(n-4)\varphi\right.$$
$$\left. - \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\sin(n-6)\varphi + \cdots + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots\left(\frac{n+3}{2}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots\left(\frac{n-1}{2}\right)}\cdot\sin\varphi\right]$$

bei ungeradem n. (S. Antwort auf Frage 91.)

53) $$\cos n\varphi = \cos^n\varphi - \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\cos^{n-2}\varphi\cdot\sin^2\varphi + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\cos^{n-4}\varphi\cdot\sin^4\varphi$$
$$- \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)\cdot(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\cdot\cos^{n-6}\varphi\cdot\sin^6\varphi + \cdots$$ (S. Antw. auf Fr. 92.)

54) $$\sin^n\varphi = n\cdot\cos^{n-1}\varphi\cdot\sin\varphi - \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\cos^{n-3}\varphi\cdot\sin^3\varphi$$
$$+ \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot\cos^{n-5}\varphi\cdot\sin^5\varphi - \cdots$$ (S. Antw. auf Fr. 93.)

---

55) $$e = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \cdots$$

56) $$e^x = \left(1+\frac{x}{n}\right)^x = 1 + x + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots$$

57) $$e^{-x} = \left(1-\frac{x}{n}\right)^x = 1 - x + \frac{x^2}{1\cdot 2} - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdots$$

(S. Antw. auf Frage 94.)

58) $$i^i = e^{-\frac{\pi}{2}} \text{ oder } = \frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}}$$ (S. Antwort auf Frage 96.)

59) $$l(a+bi) = \frac{1}{2}\cdot l(a^2+b^2) + i\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}$$ (S. Antwort auf Frage 97.)

60) $$\cos^n\varphi = \frac{1}{2^n}\cdot\left[\left(e^{ni\varphi} + e^{-ni\varphi}\right) + n\cdot\left(e^{(n-2)i\varphi} + e^{-(n-2)i\varphi}\right) + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\right.$$
$$\left.\cdot\left(e^{(n-4)i\varphi} + e^{-(n-4)i\varphi}\right) + \cdots\right]$$ (S. Antwort auf Frage 98.)

61) $$\sin^n\varphi = \frac{1}{2^n\cdot i^n}\cdot\left[\left(e^{ni\varphi} - e^{-ni\varphi}\right) - n\cdot\left(e^{(n-2)i\varphi} + e^{-(n-2)i\varphi}\right) + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\right.$$
$$\left.\cdot\left(e^{(n-4)i\varphi} - e^{-(n-4)i\varphi}\right) - \cdots\right]$$ (S. Antwort auf Frage 99.)