

Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Reine Mathematik

Lorenz, Johann Friedrich

Leipzig, 1811

3. Von der trigonometrischen Tafeln

[urn:nbn:de:bsz:31-101174](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:31-101174)

$$= \frac{\sec 2x^2 - 1}{(\sec 2x + 1)^2},$$
 wenn man mit $\sec 2x \mp 1$ dividirt.

Folglich ist $\tan x = \frac{\sec 2x - 1}{\tan 2x}$, oder
$$= \frac{\tan 2x}{\sec 2x + 1}.$$

3. Von den trigonometrischen Tafeln.

§. 45. Aufg. Die Sinustafeln zu berechnen, d. i. für einen gegebenen Halbmesser die Sinus bis auf einzelne Minuten selbst sowohl als deren Logarithmen, oder die natürlichen und künstlichen Sinus zu finden.

Auflös. 1. Aus §. 2. 3. hat man $\sin 18^\circ$ und $\sin 15^\circ$, folglich auch $\cos 18^\circ$ und $\cos 15^\circ$. Hieraus findet man nach den Formeln in §. 35. $\sin (18^\circ - 15^\circ) = \sin 3^\circ = 523359562$ für den Halbmesser $= 10000000000$, und $\cos (18^\circ - 15^\circ) = \cos 3^\circ = 9986295347$. Hieraus läßt sich nach den Formeln §. 38. $\sin \frac{3}{4}^\circ$, $\cos \frac{3}{4}^\circ$, und $\sin \frac{3}{2}^\circ$, $\cos \frac{3}{2}^\circ$, d. i. $\sin 45'$, $\cos 45'$ finden. Hiedurch kann man nach den Formeln §. 35. $\sin (x+y)$ und $\cos (x+y)$ die Sinus und Cosinus aller Winkel von $\frac{3}{4}$ zu $\frac{3}{4}$ Grad berechnen.

2. Aus Sinus und Cosinus von $45'$ findet man mittelst §. 38. nach und nach Sinus und Cosinus von $\frac{45}{2}'$, $\frac{45}{4}'$, $\frac{45}{8}'$, $\frac{45}{16}'$, $\frac{45}{32}'$, $\frac{45}{64}'$, nämlich $\sin \frac{45}{2}' = 4090615,32$ und $\sin \frac{45}{64}' = 2045307,7$. Da nun beide letztere Winkel, und ihre Sinus für den angenommenen Halbmesser die Hälften von einander, folglich proportionirt sind, so setzt man $\frac{45}{64}' : 1' = \sin \frac{45}{64}' : \sin 1' = 2045307,7 : \sin 1'$, und findet dadurch $\sin 1' = 290882,06$. Hiedurch kann man mittelst der Formeln §. 38. 35. nun auch die Sinus und Cosinus für alle einzelnen Minuten des Quadranten berechnen.

3. Aus

3. Aus den gefundenen Zahlen für die Sinus findet man auch deren Logarithmen oder die künstlichen Sinus, nach Anweisung der Ar. S. 456, da dann bey dem angenommenen Halbmesser $\log \sin \text{tot} = 10,0000000$ ist.

§ 46. Zus. 1. Aus den gefundenen Sinus und Cosinus hat man auch die Tangenten und Cotangenten nach den Formeln §. 20. 25. $\text{tang } x = \frac{r. \sin x}{\cos x}$, und $\text{cot } x = \frac{r. \cos x}{\sin x}$, und hiedurch auch aus den Logarithmen der Sinus und Cosinus die Logarithmen der Tangenten und Cotangenten.

§. 47. Zus. 2. Auf eben die Art können auch die Secanten und Naersinus selbst sowohl als ihre Logarithmen gefunden, oder besser bey vorkommenden Gelegenheiten einzeln berechnet werden.

§. 48. Anm. Die Absicht obiger Aufgabe und ihrer Auflösung geht blos dahin, die allgemeine Möglichkeit und Methode zu zeigen, wie die trigonometrischen Tafeln haben berechnet werden können. Eine vollständige Anweisung hiezu, nebst Anzeige der hiebey dienlichen Abkürzungen, ist nicht dieses Orts; wohl aber eine Nachricht von der Einrichtung und dem Gebrauche der gemeinen Tafeln. Hievon ist Folgendes zu merken:

1) Die Bequemlichkeit erfordert, daß die Winkel unter 45 Grad, und ihre Ergänzungen zu 90 Grad beysammen stehen, mit bey dem Sinus und Tangens zugleich den Cosinus und Cotangens zu haben. Auch braucht man blos einen Quadranten, worauf sich die Bogen über 90 Grad leicht bringen lassen.

2) Bey Berechnung der Tafeln hat man den Halbmesser $= 10\,000$ Millionen gesetzt, aber in den gemeinen Ausgaben bey den berechneten Zahlen die drey letzten Ziffern weggelassen, also sie nur für den Halbmesser 10 Millionen gegeben. Diese Zahl muß man also in den Formeln für die trigonometrischen Linten mit in Rechnung bringen, §. 31. Es sey nämlich unter $\sin x$ der Sinus des Winkels x für den Halbmesser 1, und unter $\sin \text{tab } x$ der

derselbe Sinus für den Halbmesser r der Tafeln zu verstehen, so hat man $\sin x = \frac{\sin \text{tab } x}{r}$ und $r \cdot \sin x = \sin \text{tab } x$. Z. E. $\sin \text{tab } 12^\circ = 2079117$. folglich $\sin 12^\circ = 0,2079117$.

Was vom Sinus gesagt worden, gilt eben so von allen übrigen trigonometrischen Linien, und den Formeln §. 34. 35 u. vergl. §. 31.

3) Die Logarithmen der trigonometrischen Linien sind für den Halbmesser 10000 Millionen berechnet, und noch eben so für den abgekürzten Halbmesser 10 Millionen beybehalten worden. Z. E. $\log \sin 10^\circ$ ist für den großen Halbmesser 10, und für den kleinen nur 7; aber man hat diesem auch 10 gelassen.

Dieses bringt bey der Rechnung mit bloßen Logarithmen keinen Fehler, indem man bey den Linien, deren Logarithmen sie sind, nicht auf ihre wirklichen Größen, sondern nur auf ihre Verhältnisse sieht.

Aber das ist unrichtig, daß man insgemein für $\sin$ und $\tan$ des Bogens 0 den Logarithmus auch 0 setzt, da doch $0 = \log 1$, und $\sin$ sowohl als $\tan$ des Bogens $0^\circ 0' 0'' 0'''$ $0^{\text{iv}} 4^{\text{v}} 27^{\text{vi}} = 1$ ist.

4) Will man einen Logarithmus für den Halbmesser 1 haben, so muß man von den Logarithmen der Tafeln 10 abziehen, welches am bequemsten nach Nr. §. 456. Aufl. 4. geschieht. So ist z. E. $\log \sin = 6,4637261 - 10 = 0,4637261 - 4$.

Hat man die allgemeinen trigonometrischen Formeln für den Halbmesser der Tafeln eingerichtet, so ergibt sich von selbst ihre logarithmische Berechnung. Z. E. $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ und $\tan \text{tab } x = \frac{r \cdot \sin x}{r \cdot \cos x} = \frac{\sin \text{tab } x}{\cos \text{tab } x}$, folglich $\log \tan \text{tab } x = \log r + \log \sin \text{tab } x - \log \cos \text{tab } x$.

Eben so ist $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, folglich $\sec \text{tab } x = \frac{r}{\cos x}$; aber $\cos x = \frac{\cos \text{tab } x}{r}$, folglich $\sec \text{tab } x = \frac{r^2}{\cos \text{tab } x}$, folglich $\log \sec \text{tab } x = 2 \log r - \log \cos \text{tab } x$.

5) Die

5) Die trigonometrischen Linien werden zwar unter gewissen Umständen verneinend, aber man sieht sie doch, in so fern von ihren Logarithmen die Rede ist, als bejahend an. Denn diese Linien behalten auch noch verneinend einerley Logarithmen, weil sich die Logarithmen bloß auf die Größe der Linien beziehen, und das Verneinende bloß die entgegengesetzte Lage bedeutet.

6) Bey Auflösung der trigonometrischen Aufgaben kann man die Rechnung auf doppelte Art führen; entweder mit den natürlichen Linien, oder mit den künstlichen, d. i. mit ihren Logarithmen; welches letztere in den meisten Fällen vorzuziehen ist. Von einem vorteilhaften Gebrauche der natürlichen Linien zum Ausmessen und Auftragen der Winkel sollen einige Aufgaben folgen, wenn zuvor noch ein Umstand berichtigt ist. Nämlich

7) die großen Tafeln gehen bis zu 10, oder gar bis zu einigen Secunden, die kleinen aber nur bis zu Minuten. Um hieraus nun auch einzelne Secunden zu finden, nimmt man wie Ar. §. 456 an, daß kleine Differenzen der Winkel, wie die Differenzen der zugehörigen Linien, oder ihrer Logarithmen, sich verhalten. Von der Art, dieses zu bewerkstelligen, sollen ein Paar Aufgaben folgen. Der Grund aber, worauf die Voraussetzung beruht, ist:

8) (Fig. 204.) Es sey $BD = \text{arc } 1' = \text{arc } 60''$, und $BE = \text{arc } x''$: so betrachtet man BED als eine gerade Linie, und setzet $BD:BE = DF:EG$, wo $BD = AD - AB$, $BE = AB + BE$, $DF = DN - BM$, und $EH = BM + EG$ ist.

Aus den größern Tafeln erhellet, daß diese Proportion bey den Sinus und Cosinus aller Winkel, und bey den Tangenten aller Winkel unter 45 Grad, so gut als völlig richtig sey, hingegen bey den Tangenten nahe bey 90 Grad, und bey den Logarithmen der Sinus und Tangenten kleiner Winkel etwas von der Wahrheit abweiche. Wo also mehrere Genauigkeit verlangt wird, muß man bey den ersten und letzten drey oder vier Graden des Quadranten sich solcher Tafeln bedienen, die von 10 zu 10 Secunden berechnet sind.

§. 49. Aufg. Es ist ein Bogen in Secunden gegeben; man soll den dazu gehörigen natürlichen und künstlichen Sinus finden.

Alorenz Elemente 1 Th.

Cc

Auf.

Auflös. Man setze nach §. 48. Anm. 8: Wie sich 60 verhält zu der gegebenen Zahl der Secunden, so verhält sich die Differenz der beiden nächsten Bogen in den Tafeln, zwischen welche der gegebene fällt, zu dem, was zu dem kleinern Sinus der Tafeln addirt werden muß.

3. E. der gegebene Bogen sey $27^{\circ} 18' 33''$, so hat man aus den Tafeln

$$\begin{array}{rcl} 1) \sin 27^{\circ} 18' 9'' & = & 4589080 \\ \sin 27^{\circ} 18' & = & 4586496 \end{array}$$

Differenz der nächsten Bogen $= 2584$; und nun

$60:33=2584:\frac{2584 \cdot 33}{60}$, welches zu $\sin 27^{\circ} 18'$ addirt den $\sin 27^{\circ} 18' 33''$ giebt.

$$\begin{array}{rcl} 2) \log \sin 27^{\circ} 19' & = & 9,6617257 \\ \log \sin 27^{\circ} 18' & = & 9,6614810 \end{array}$$

Differenz $= 2447$; und nun

$60:33=2447:\frac{2447 \cdot 33}{60}$, welches zu $\log \sin 27^{\circ} 18'$ addirt $\log \sin 27^{\circ} 18' 33''$ giebt.

Anm. Für Tangenten ist es eben so; auch läßt es sich leicht auf Cosinus und Cotangenten anwenden, wo man, statt zu addiren, subtrahirt.

§. 50. Aufg. Es ist ein natürlicher und künstlicher Sinus, der nicht in den Tafeln steht, gegeben; man soll den dazu gehörigen Bogen in Secunden finden.

Aufl. Man suche die Differenz der beiden nächsten Sinus in den Tafeln, und die Differenz des kleinern vom dem gegebenen, und setze nach §. 48. Anm. 8. wie sich die erste Differenz verhält zur zweyten, so verhält sich 60 zu der Zahl der Secunden, die zu dem kleinern Bogen der Tafeln addirt werden muß.

3. E.

3. E. der gegebene Sinus sey = 1081234, und der gegebene $\log \sin = 9,7181325$: so hat man aus den Tafeln

$$1) \ 1082885 = \sin 6^\circ 13'$$

$$1081234 = \sin x$$

$$1079994 = \sin 6^\circ 12'$$

$$2891 = \text{ersten Differenz}$$

$$1204 = \text{zweyten Differenz; und nun}$$

$$2891 : 1240 = 60 : y; \text{ da dann der gesuchte Bogen } x = 6^\circ 12' + y'' \text{ ist.}$$

$$2) \ 9,7182012 = \log \sin 31^\circ 31'$$

$$9,7181325 = \log \sin x$$

$$9,7180851 = \log \sin 31^\circ 30'$$

$$1161 = \text{ersten Differenz}$$

$$474 = \text{zweyten Differenz; und nun}$$

$$1161 : 474 = 60 : y; \text{ da dann } x = 31^\circ 30' + y'' \text{ ist. Hier gilt auch die Anmerkung in §. 49.}$$

§ 51. Aufg. (Fig. 205. 206.) Einen gegebenen Winkel ACB mit Hülfe der Tafeln genauer als mit dem Transporteur zu messen.

Auflös. I. (Fig. 205.) Nach einem verjüngten Maasstabe mache man $CB = 1000$, und BA senkrecht auf CA; messe nach eben dem Maasstabe $BA = \sin ACB$, oder $CA = \cos ACB$, und suche die gefundene Zahl in den Sinustafeln für den Halbmesser = 1000: so steht dabey die Größe des gegebenen Winkels.

II. (Fig. 206.) Oder man mache $CA = CB = 1000$, ziehe AB, messe sie nach eben dem Maasstabe, und suche die Hälfte der gefundenen Zahl in den Sinustafeln für den Halbmesser = 1000: so steht dabey die Hälfte des gegebenen Winkels, weil ein Perpendikel von C auf AB diese sowohl als den Winkel halbiert, da dann $\frac{1}{2} AB = \sin \frac{1}{2} ACB$ ist.

§. 52.¹ Aufg. (Fig. 205. 206.) Einen Winkel x , der in Graden und Minuten gegeben ist, mit Hülfe der Tafeln genauer als mit dem Transporteur aufzutragen.

Auflös. I. (Fig. 205.) Man mache $CA=1000$, und die auf CA senkrechte $AB=\text{tang } x$ aus den Tafeln für den Halbmesser 1000, und ziehe CB : so ist $ACB=x$.

Wäre $x > 45^\circ$, folglich $\text{tang } x > 1000$: so mache man die auf AC senkrechte $CD=1000$, und die auf CD senkrechte $DE=\text{cot } x$ aus den Tafeln für $r=1000$, und ziehe CE : so ist $ACE=x$.

Wäre $x > 90^\circ$: so verzeichne man seinen Nebenwinkel nach Obigen.

II. (Fig. 206.) Mit $CA=1000$ beschreibe man aus C einen Kreisbogen, trage darein $AB=2\sin \frac{1}{2}x$ aus den Tafeln für $r=1000$, und ziehe CB : so ist $ACB=x$.

4. Trigonometrische Auflösung der Triangel.

§. 54. Lehrs. (Fig. 207.) In jedem Triangel ABC verhalten sich die Seiten, wie die Sinus der gegenüberstehenden Winkel.

Bew. Da sich um jeden Triangel ABC ein Kreis beschreiben läßt (Geom. §. 196.): so sind dessen Seiten Sehnen der Bogen, auf denen die gegenüberliegenden Winkel stehen, ihre Hälften aber die Sinus der halben Bogen, folglich die Sinus der gegenüberliegenden Winkel (Geom. §. 170.). Demnach ist für den Halbmesser des Kreises

$$\sin A : \sin B = \frac{1}{2}BC : \frac{1}{2}AC = BC : AC$$

$$\sin A : \sin C = \frac{1}{2}BC : \frac{1}{2}AB = BC : AB$$

$$\sin B : \sin C = \frac{1}{2}AC : \frac{1}{2}AB = AC : AB$$

§. 54.