

Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Reine Mathematik

Lorenz, Johann Friedrich

Leipzig, 1811

3. Die logarithmischen Differentiale

[urn:nbn:de:bsz:31-101174](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:31-101174)

Setze man $Z=0$, für $x=b$: so ist $C=\frac{a^3}{b}$, folglich

$$Z=\frac{-a^3}{x}+\frac{a^3}{b}=\frac{-a^3b+a^3x}{bx}=\frac{a^3x-b}{bx}$$
, welches für
 $AG=b$ den Raum $GCMP$ giebt.

3. Die logarithmischen Differentiale.

§. 355. Aufg. (Fig. 242.) Eine krumme Linie zu verzeichnen, deren Abscissen die Logarithmen des zugehörigen Ordinaten vorstelle, und welche daher die logarithmische Linie, oder die Logistif, logarithmica, s. logistica, heißt.

Auflös. Durch den Anfang der Abscisse A sey AB senkrecht, und $AP=AB=1$, auch $PC=c$ mit AB parallel, und es laufe durch B und C eine krumme Linie so, daß für $x=AR$, und $y=RE$, $AB:RE=p(AB:PC)$ sey, wenn $\frac{AR}{AP}=p$ ist, p mag nun eine ganze Zahl oder ein Bruch seyn: so stellen die Abscissen dieser krummen Linie die Logarithmen der zugehörigen Ordinaten vor, und es ist $\frac{RE}{AB}$ so groß, als des Quotienten $\frac{PC}{AB}$ Potenz, deren Exponent $\frac{AR}{AP}$ ist, folglich, weil $AB=AP=1$ gesetzt wird, $y=c^x$.

§. 356. Zus. 1. Für eine andere Abscisse $x+m$ setze man die Ordinate $y+m$, daß also $y+n=c^{x+m}$ sey: so muß, weil $y=c^x$ ist, $\frac{y+n}{y}=\frac{c^{x+m}}{c^x}=c^m$ seyn. Soll dem

Demnach $z : z + p = y + n$ seyn, so ist allemal $\frac{z+p}{z} = c^m$,

d. i. wenn zwey Paar Ordinaten einerley Verhältniß haben sollen, so ist das Stück der Abscissenlinie zwischen jedem dieser Paare gleich groß, und umgekehrt, wenn dieses ist, so ist jenes. 3. E. Ist $PQ = QR$: so ist $PC : QD = QD : RE$.

Demnach stellt diese Linie ein logarithmisches System vor, wo $PC = c$ die Zahl bedeutet, deren Logarithmus $= 1$ ist.

§. 357. Zus. 2. (Fig. 243.) Wäre $AB = AP = 1$, und $PC = c$, oder $PG = f$: so hätten die beyden krummen Linien BC, BG , nur den Punkt B gemein, daß für die erste $y = c^x$, für die zweyte $y = f^x$ wäre, und stellten also zwey Systeme vor, in deren einem der Logarithmus von c , im andern aber von f , $= 1$ wäre.

§. 358. Zus. 3. Da die Ordinaten, von A nach R zu, unendlich wachsen, so nehmen sie von A nach O zu unendlich ab, und c^{-x} , wo $c > 1$, wird immer kleiner, behält aber immer noch einen Werth, d. i. die Abscissenlinie nähert sich der Curve immer mehr, doch ohne sie je zu treffen, und ist also ihre Asymptote.

§. 359. Zus. 4. Ist $AP = 1$ in r Theile getheilt, deren jeder m §. 357, daß also $1 = r \cdot m$, wobey r eine ganze Zahl bedeutet: so sey für das erste m von A an, die Ordinate $1 + q$, so daß $r(1 + q) = 1 : c$ wird. Demnach ist $c^m = (1 + q)^m = 1 + q$, folglich $c^m - 1 = q$. Hieraus erhellet:

1) wenn r , d. i. m und c , nach Belieben festgesetzt ist, daß dadurch q bestimmt sey.

2) wenn c und q nach Belieben festgesetzt ist, daß dadurch r , d. i. m bestimmt sey.

An 4.

§. 360.

§. 360. Zuſ. 5. Für zwey Ordinaten $y + n$ und y , §. 356. iſt der Unterſchied $n = c^{x+m} - c^x = c^x(c^m - 1) = y \cdot q$, §. 359. Folglich iſt $\frac{y}{n} = \frac{1}{q}$, folglich $\frac{ym}{n} = \frac{m}{q}$ eine Größe, die für alle y einerley iſt. §. 359.

Wächſt nun r unendlich, ſo nehmen m und n unendlich ab, und $\frac{ym}{n}$ verwandelt ſich in $\frac{ydx}{dy}$, d. i. in die Subtangenten, daß alſo die Subtangenten der logarithmiſchen Linie $= \frac{m}{q}$ unveränderlich iſt, aber auch endlich, weil eine Linie, deren Subtangenten $= 0$ oder $= \infty$ wäre, der Abſciſſenlinie ſenkrecht oder parallel ſeyn müßte, beides aber bey der logarithmiſchen Linie nicht ſtatt findet.

Demnach iſt $\frac{ydx}{dy} = a$ die Gleichung für die logarithmiſche Linie, wobey a eine unveränderliche endliche Größe bedeutet.

§. 361. Zuſ. 6. Aus voriger Gleichung hat man $\frac{dx}{a} = \frac{dy}{y}$, folglich $\frac{x}{a} = \int \left(\frac{dy}{y}\right)$ d. i. $\frac{x}{a}$ muß eine ſolche Function von y ſeyn, daß, wenn man ſie durch y ausdrückt, ihr Differential $\frac{dy}{y}$ ſey.

Nun iſt $y = c^x$ §. 355, folglich $ly = xlc$, oder, weil $lc = 1$ iſt, $ly = x$. Folglich iſt $d(\log y) = \frac{ady}{y}$, und $\frac{ly}{a} = \int \left(\frac{dx}{y}\right)$.

Weiſſ man alſo, wie groß a iſt, d. i. wie ſich die Subtangen-

tangente zu AB verhält, und kann man $\frac{dy}{y}$ integrieren, so giebt dies Integral mit a multiplicirt den Logarithmus von y in diesem Systeme.

§. 362. Anm. Das Integral von $\frac{dy}{y}$ (wo im Zähler das Differential der veränderlichen Größe des Nenners befindlich ist) kann keine Potenz von y seyn, oder $\frac{dy}{y}$ läßt sich nicht als das Differential einer Potenz von y betrachten. Denn wollte man $y^{-1} dy$ wie gewöhnlich integrieren: so erhielte man $\frac{y^0}{0} + C = \frac{1}{0} + C$, welches offenbar ungereimt ist, weil das Integral weder unveränderlich noch unendlich seyn kann. Man vergleiche auch §. 347.

4. Reihen für die Logarithmen.

§. 365. Aufg. Den einer gegebenen Zahl zugehörigen Logarithmus durch eine unendliche Reihe auszudrücken.

Auflös. Die Zahl heiße y, ihr Logarithmus x, und man setze $y = 1 + u$, daß u eine Zahl, welche man will, bedeute: so ist $x = \log(1 + u)$, folglich aus §. 361. $dx = a \frac{du}{1+u}$, und wenn man nach Arithm. §. 192 dividirt, $dx = a(du - udu + u^2du - u^3du \dots)$ und integrirt $x = a(u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 + \frac{1}{5}u^5 \dots)$

Für die Constante setze man $u = 0$, so ist, weil $\log 1 = 0$ ist, $x = 0$, folglich $0 = C$, also das gefundene Integral vollständig. Soll nun dasselbe convergiren, so muß $u < 1$, folglich $y < 2$ seyn.

An 5

§. 364.