Schulfhefte - K 1534

Dalgauer, Karl

[S.l.], 1823.1852-1857

Geometrie-Heft

17

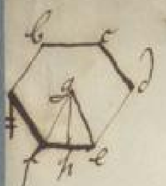
Geometrie „ Heft

von

A. Walder.

Aug 15. Oct. 1854.

r eines 6eckes = 8', welches flächeninhalt desselben?



$$gh = r = 8'$$

$$abcde = \frac{6(fe \times gh)}{2} = \frac{6fe \cdot 8}{2} = 24fe$$

$$\frac{gf\sqrt{3}}{2} = r = 8. \quad ;\ ?\ gf.$$

$$\frac{x\sqrt{3}}{2} = 8$$

$$x\sqrt{3} = 16$$

$$x = \frac{16}{\sqrt{3}}$$

$$= 16 : 1{,}73 = 1600 : 173 = 9{,}2 \ldots$$

$$\begin{array}{r} 1557 \\ \hline 430 \\ 346 \\ \hline \end{array}$$

$$gf = 9{,}2' \ldots$$

$$gf = fe$$

$$fe = 9{,}2' \ldots$$

$$abcde = \cancel{24 \times 8{,}8 = 55{,}2\,\square'}$$

$$= 24 \times 9{,}2' = 220{,}8\,\square'$$

$$\begin{array}{r} 9{,}2 \\ 24 \\ \hline 368 \\ 184 \\ \hline 220{,}8 \end{array}$$

[illegible]

1) $bhue = bh \cdot ue$

2) $hiek = \frac{(ik+he)hi}{2}$

3) $ikno = \frac{(no+ik)in}{2}$

4) $novw = \frac{(vw+no)nv}{2}$

5) $vwz\alpha = \frac{(z\alpha+vw)vz}{2}$

6) $z\alpha\beta c = \frac{(c\beta+z\alpha)zc}{2}$

7) $utfe = \frac{(ue+tf)ut}{2}$

8) $tsgf = \frac{(tf+sg)ts}{2}$

9) $sgar = sg \cdot sr$

10) $grml = \frac{(gr+lm)rm}{2}$

11) $lmqp = \frac{(lm+pq)mq}{2}$

12) $pqyx = \frac{(pq+xy)qy}{2}$

13) $xy\eta\varepsilon = \frac{(xy+\varepsilon\eta)y\eta}{2}$

14) $\varepsilon\eta\delta\zeta = \varepsilon\eta \times \eta\delta$

15) $\gamma\varepsilon\zeta\delta = \frac{(\gamma\delta+\varepsilon\zeta)\delta\zeta}{2}$

16) $\alpha\gamma\delta\beta = \frac{(\alpha\beta+\gamma\delta)\beta\delta}{2}$

Flächeninhalt d. $A = abdc - (1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16)$

$= (ab \cdot ad) - s.$

S. d. ungleichen Fünfecks.

$S_{2n\ell} = \sqrt{(2r^2 - r\sqrt{(4r^2 - S_{n\ell}^2)})}$

$S_{2n\ell}^2 = 2r^2 - r\sqrt{(4r^2 - S_{n\ell}^2)}$

$2r^2 - S_{2n\ell}^2 = r\sqrt{(4r^2 - S_{n\ell}^2)}$

$\left(\frac{2r^2 - S_{2n\ell}}{r}\right)^2 = 4r^2 - S_{n\ell}^2$

$S_{n\ell}^2 = \sqrt{\left(4r^2 - \left(\frac{2r^2 - S_{2n\ell}^2}{r}\right)^2\right)}$

Welches ist die seite des fünfeckes innerhalb, welches auszerhalb des kreises, wenn $r = 100$!

<u>S. d. i. 5 ecks</u>

$ab = S_{n\ell}$. $ad = db$

$\triangle cfd = agd$

$\angle adg = cdf$

$\triangle agd \sim cfd$

$ag : ad = cf : cd$

$ag = \frac{ad \times cf}{cd}$; für cf = cd, d. i.:

$cf^2 = cd^2 - fd^2$

$cf^2 = cd^2 - \left(\frac{ad}{2}\right)^2$

$cf = \sqrt{\left(cd^2 - \left(\frac{ad}{2}\right)^2\right)} = \frac{\sqrt{(4cd^2 - ad^2)}}{2}$

$ag = \frac{ad \times \sqrt{(4cd^2 - ad^2)}}{2cd}$

$\frac{ab}{2} = \frac{ad \times \sqrt{(4cd^2 - ad^2)}}{2cd}$

$ab = \frac{ad \times \sqrt{(4cd^2 - ad^2)}}{cd}$

$= S_{n\ell}$.
$= S_{2n\ell}$.
$= r$

Also: $S_{n\ell} = \frac{S_{2n\ell} \times \sqrt{(4r^2 - S_{2n\ell}^2)}}{r} = \frac{S_{2n\ell}}{r} \times \sqrt{(4r^2 - S_{2n\ell}^2)}$.

$S_{5\ell} = \frac{S_{10\ell}}{r}\sqrt{(4r^2 - S_{10\ell}^2)} = \frac{\frac{r}{2}\times(-1+\sqrt{5})}{r} \times \sqrt{\left(4r^2 - \left(\frac{r}{2}(-1+\sqrt{5})\right)^2\right)} =$

$= \frac{r(-1+\sqrt{5})}{2r}\sqrt{\left(4r^2 - \frac{r^2}{4}(1 - 2\sqrt{5} + \sqrt{25})\right)} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\sqrt{\left(\frac{16r^2 - r^2}{4}(6 - 2\sqrt{5})\right)} =$

$= \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\sqrt{\left(\frac{16r^2 - 6r^2 + 2r^2\sqrt{5}}{4}\right)} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\sqrt{\left(\frac{10r^2 + 2r^2\sqrt{5}}{4}\right)} = \frac{r}{2}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})} =$

$= \frac{r}{2}\sqrt{\left(\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2(10+2\sqrt{5})\right)} = \frac{r}{2}\sqrt{\left(\left(\frac{1-2\sqrt{5}+\sqrt{25}}{4}\right)(10+2\sqrt{5})\right)} - \frac{r}{2}\sqrt{\left(\left(\frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right)(10+2\sqrt{5})\right)} =$

$= \frac{r}{2}\sqrt{\left(\frac{60 - 20\sqrt{5} + 12\sqrt{5} - 4\sqrt{25}}{4}\right)} = \frac{r}{2}\sqrt{\left(\frac{60 - 8\sqrt{5} - 20}{4}\right)} = \frac{r}{2}\sqrt{\left(\frac{40 - 8\sqrt{5}}{4}\right)} = \frac{r}{2}\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}$

$r = 1$

$= \frac{1}{2}\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})} = \frac{1}{2}\sqrt{(10 - 2\times 2{,}236)} = \frac{1}{2}\sqrt{(10 - 4{,}472)} = \frac{1}{2}\sqrt{5{,}528} = \frac{2{,}351}{2} = 1{,}1755$

$r = 100$.

$1 : 1{,}1755 = 100 : x$

$x = 117{,}55$

$6{,}18$
25
3090
1236
15450

$3{,}09$
25
1545
618
7725

$$\text{S}N_u = \frac{2r \times \text{Sen}\,l}{\sqrt{(4r^2 - \text{Sen}\,l^2)}} \;;\; \text{Se}\,H = \frac{r}{2}\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}$$

$$\text{Su}\,5l = \frac{2r \times \frac{r}{2}\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}{\sqrt{\left(4r^2 - \left(\frac{r}{2}\sqrt{(10-2\sqrt{5})}\right)^2\right)}} = \frac{\frac{2r^2}{2}\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}{\sqrt{\left(4r^2 - \left(\frac{r^2}{4}\sqrt{(\right.\right.}}$$

$$\text{S}N_l = \frac{2\,\text{Snl} \times r}{\sqrt{(4r^2 - \text{Snl}^2)}}$$

$$\text{S}5l\,\text{u} = \frac{2 \times 117 \times 100}{\sqrt{(4 \times 100^2 - 117^2)}} = \frac{23400}{\sqrt{(40000 - 13689)}} = \frac{23400}{\sqrt{26311}} = \frac{23400}{162} =$$

$$= 144{,}44$$

Allgemeine Begriffe von der Ausdehnung.

§. 1.

Begriff von Körper, Fläche u. Linie geometrisch betrachtet, von gerader u. krummer Linie u. von gerader u. krummer Fläche

§. 2.

Begriff vom Messen.

Aufgabe.

Suche das gemeinschaftliche Maß der gegebenen Linien AB u. CD.

Auflösung.

Ich trage die Linie CD über auf die Linie AB, u. finde dann, daß AB = CD u. den Rest EB; nun trage ich den Rest EB über auf die Linie CD, u. finde, daß CD gleich ist 3 EB.

$AB = CD + EB = 4\,EB.$
$CD = 3\,EB.$

Folglich ist EB das gemeinschaftliche Maaß.

§. 3.

Treffen 2 Linien, welche Neigung zu einander haben, in einem Punkt zusammen, so wird der zwischen diesen 2 Linien liegende unbestimmte Raum Winkel genannt. Die Theile u. die Bezeichnungsart eines Winkels

2 Winkel sind einander gleich, wenn sie, aufeinandergelegt, sich völlig decken.

§. 4.

Fig 1)

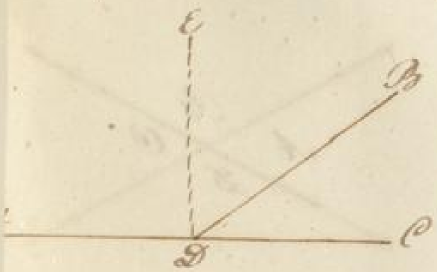
Die gegenseitige Lage zweier gerader Linien hängt von dem von ihnen eingeschlossenen Winkel ab. Trifft eine gerade Linie ab Fig 1) so auf eine andere bc, daß sie, nachdem bc nach beiden Enden gehörig verlängert würde, mit ihr 2 völlig gleiche Winkel bildet, so sagt man, die Linie ab habe in Beziehung auf die Linie bc eine perpendikuläre Lage oder ab stehe senkrecht auf bc.
Solche auf diese Art entstandene Winkel, wie abc u. abd heißen rechte Winkel, jeder Winkel, der größer ist als ein rechter, wird ein stumpfer genannt u. ein Winkel, der kleiner kleiner ist, als ein rechter heißt ein spitzer Winkel. Alle r. Winkel sind einander gleich.

§. 5.

Fig. 2)

2 Winkel, welche einen gemeinschaftlichen Schenkel u. Scheitel haben, u. deren beide andere Schenkel eine gerade Linie bilden, heißen Nebenwinkel, solche Winkel sind bcd (Fig 2) u. bda.

Von Nebenwinkeln kann bewiesen werden, daß sie zusammen 2 Rechte betragen.



Beweis Fig. 2)

$\measuredangle ADB + \measuredangle BDC = 2R$

Ich ziehe vom Scheitel D die Linie DE $\perp$ auf AC, nun ist

$$\measuredangle ADB = 1R + EDB.$$
$$\measuredangle BDC = 1R - EDB.$$
$$\measuredangle ADB + \measuredangle BDC = 2R.$$

w. z. b. war.

Folgerung.

1. Alle Winkel, welche an einer Seite einer geraden Linie u. um einen auf dieser Linie als Scheitel angenommenen Punkt liegen, betragen zusammen 2 R.

2) Sämtliche Winkel um einen Punkt herum betragen zusammen 4 R.

§. 6.

Werden 2 Linien, welche sich in einem Punkte treffen, über ihren Durchschnittspunkt verlängert, so entstehen 4 Winkel, von denen je 2 einander vom Scheitel liegen, solche Winkel Scheitel-winkel.

Die Scheitelwinkel sind einander gleich.

Beweis Fig. 3

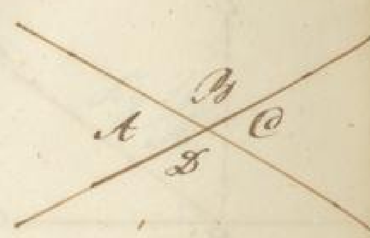
$\angle b = \angle d$

$\angle b + \angle c = 2\,R.$
$\angle d + \angle c = 2\,R.$

$\angle b + \cancel{\angle c} = \angle d + \cancel{\angle c}$.
$\angle b = \angle d$

w. z. bew. war.

Fig. 3.



Wenn 2 Linien eine solche Richtung haben, daß sie einander nie schneiden, so weit man sie auch verlängert, so sind sie parallel.

Werden 2 Parallellinien durch eine dritte gerade Linie durchschnitten, so entstehen 8 Winkel, von denen je 2 in Beziehung auf ihre gegenseitige Lage bestimmte Namen haben, u. zwar unterscheiden wir:

Fig. 4.)

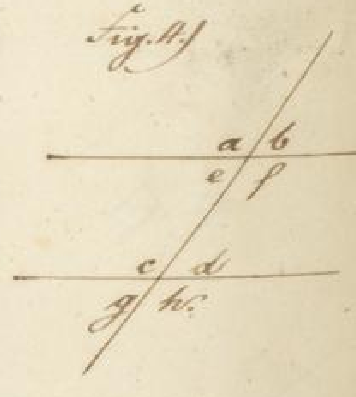


Fig. 4.) 1. Nebenwinkel wie: a u. b, b u. f, f u. c, c u. a u. s. w.
2. Scheitelwinkel, wie a u. f, b u. e, d u. g, c u. h.
3. Gegen, oder correspondirende Winkel, wie a u. c, b u. d, e u. g, f u. h.
4.) Innere Wechselwinkel, wie e u. d, f u. c.
5. Äussere Wechselwinkel, wie a u. h, b u. g.

6. Äußere an einerlei Seite liegende Winkel wie b u. h, a u. g.

7. Innere an einerlei Seite liegende Winkel wie f u. d, e u. c.

§. 8.

1. Die correspondirenden oder Gegenwinkel sind einander gleich.

Beweis Fig. 5.

$\angle EGB = \angle EHD$.

Denkt man sich die Linie CD auf die Linie AB gelegt, so muß sie in Beziehung auf die durchschneidende Sekante EF dieselbe Lage beibehalten, wie die Linie AB, da sie mit derselben parallel ist; es wird also der Punkt H in G, der Schenkel HD auf den Sch. GB u. der Schenkel HE auf GE zu liegen kommen, u. decken sich mithin die Scheitel u. Schenkel der beiden Winkel, folglich sind dieselben einander gleich. Auf ähnliche Weise wird die Gleichheit der übrigen Gegenwinkel nachgewiesen.

2. Die innern Wechselwinkel sind einander gleich.

Beweis Fig. 11.

$\angle c = \angle d.$

$\angle e = \angle b$

$\angle d = \angle b$

$\angle e = \angle d.$

$\angle f = \angle c.$

$\angle f = \angle a$

$\angle c = \angle a$

$\angle f = \angle c.$

3. Die äussern Wechselwinkel sind ebenfalls einander gleich.

Beweis Fig. 4.)

$\angle a = \angle h.$

$\angle a = \angle f.$

$\angle h = \angle f.$

$\angle a = \angle h.$ oder:

$\angle a + \angle b = 2R.$

$\angle h + \angle d = 2R.$

$\angle a + \angle b = \angle h + \angle c$

$\angle b = \angle d$

$\angle a = \angle h.$

4. Die äußeren an einerlei Seite liegenden Winkel betragen zusammen 2R.

Beweis Fig. 4

$\angle b + \angle h = 2R$

$\angle b + \angle f = 2R.$

$\angle f = \angle h$

$\angle b + \angle h = 2R.$

$\angle a + \angle g = 2R.$

$\angle a + \angle e = 2R.$

$\angle e = \angle g$

$\angle a + \angle g = 2R.$

5) Die inneren an einerlei Seite liegenden Winkel betragen zusammen 2R.

Beweis Fig. 4.

$\angle e + \angle c = 2R.$

$\angle e + \angle f = 2R.$

$\angle f = \angle c$

$\angle e + \angle c = 2R$ oder:

$\angle e + \angle a = 2R.$

$\angle a = \angle c$

$\angle e + \angle c = 2R.$

§. 9.

Winkel, deren Schenkel paarweise parallel sind, u. deren Oeffnungen nach einerlei Richtung liegen, sind einander gleich.

Beweis Fig. 6

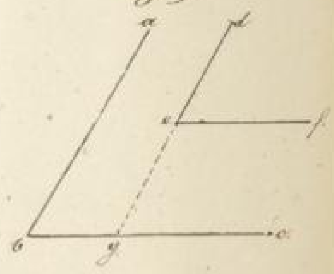
$\angle abc = def$

$\angle abc = \angle dgc$

$\angle def = \angle dgc$

$\angle abc = def$ w. z. bew. w.

Fig. 6



§. 10.

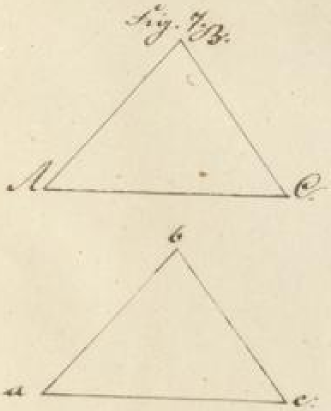
Um einen Raum durch gerade Linien einzuschließen, braucht man 3 Linien. Der von 3 geraden Linien eingeschlossene Raum heißt Dreieck (Triangel.) Man unterscheidet beim Dreieck 6 Stücke, nämlich 3 Seiten u. 3 Winkel. In Beziehung auf die Seiten gibt es gleichseitige, gleichschenklige u. ungleichseitige Dreiecke, in Beziehung auf die Winkel unterscheidet man rechtwinklige, stumpfwinklige u. spitzwinklige Dreiecke.

§. 11.

Wenn 2 oder mehrere Figuren gleiche Größe haben, d. h. gleichen Raum einnehmen, so sagt man, sie seien einander gleich u. bezeichnet dies durch =; haben 2 oder mehrere Figuren gleiche Form, ohne daß sie einander an Größe gleich sind, so sagt man, sie seien einander ähnlich u. bezeichnet dies durch ∼; vereinigen 2 oder mehrere Figuren gleiche Größe mit gleicher Form, so sagt man, sie seien identisch oder congruent u. bezeichnet solches durch ≅.

§ 12.

Fig. 7



Dreiecke sind im Allgemeinen congruent, wenn die Seiten u. Winkel im einzeln genommen den Seiten u. Winkeln im andern Dreieck gleich sind. Man kann aber schon auf die Congruenz zweier Dreiecke schließen, wenn

1.) 2 Seiten u. der von ihnen eingeschlossene Winkel in einem Dreieck einzeln genommen so groß sind, als 2 Seiten u. der v. ihnen eingeschlossene Winkel im andern Dreieck.

Beweis Fig. 7) $\triangle ABC \cong abc$.

1te Voraussetzung

$AB = ab$

$BC = bc$

$\angle B = \angle b$

$\triangle ABC \cong abc$.

Wenn man das Dreieck ABC so auf das Dreieck abc legt, daß der Punct B auf b zu liegen kommt, so muß auch die Seite BA in die Richtung der Seite ba und die Seite BC muß in die Richtung der Seite bc zu liegen kommen; die Seitenlinien müssen aber nicht nur der Richtung nach in einander fallen, sondern sie müssen einander vollkommen decken, da sie nach der Voraussetzung einander gleich sind; es muß also der Punct A auf a u. Punct C auf c fallen; es decken sich mithin die Endpuncte der Dreiecke u. folglich auch die zwischen den Puncten liegenden Linien; die Dreiecke sind also congruent.

2) Zwei Dreiecke sind ferner congruent, wenn eine Seite u. die daran liegenden Winkel in einem Dreieck einzeln genommen so groß sind, als diese Stücke im andern Dreieck.

Beweis fig. 71.

Es ist vorausgesetzt, daß AC gleich ac, $\angle A = \angle a$ u. $\angle C = \angle c$; ich lege das Dreieck ABC so auf das Dreieck abc, daß die beiden gleichen Seiten AC u. ac einander decken, so daß also der Punct A auf a u. Punct C auf c zu liegen kommt; da der Winkel

A = a, so muß AB in die Richtung von ab fallen, u. da der Winkel C = c, so muß B in die Richtung von bc zu liegen kommen; es wird nun der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt B auf den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt b fallen; es decken sich nun wieder wie vorhin die Punkte und Seiten der Dreiecke, mithin die Dreiecke selbst.

3) Dreiecke sind endlich noch congruent, wenn 3 Seiten des einen einzeln genommen den 3 Seiten des andern Dreiecks decken.

Beweis Fig. 7)

Voraussetzung.

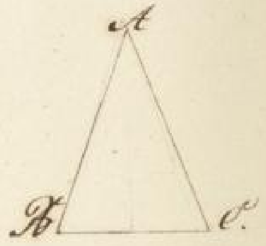
AB = ab
BC = bc
AC = ac

In diesem Falle kann ich jede Seite des Dreiecks ABC auf die entsprechende im Dreiecke abc legen, diese werden sich der Gleichheit wegen völlig decken; es fallen also wieder die Endpunkte der Dreiecke und die Seiten auf einander und die Dreiecke decken sich.

§. 13.

Sind in einem Dreieck 2 Seiten einander gleich, so sind es auch die diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel.

Fig. 8.



Voraussetzung.

$AB = AC$

Beweis.

$\angle C = \angle B$.