Ausführliches Lehrbuch der Elementar-Geometrie

Lübsen, Heinrich B.

Leipzig, 1885

urn:nbn:de:bsz:31-264714

Ausführliches Lehrbuch

der

Elementar-Geometrie.

Ebene und körperliche Geometrie.

Zum

Selbstunterricht

mit Rücksicht auf die Zwecke des praktischen Lebens

bearbeitet

von

[Heinrich]
H. B. Lübsen.
[Borchert]

Störe mir meine Kreise nicht.
Archimedes.

Sechsundzwanzigste Auflage mit 193 Figuren im Text.

Leipzig.
Friedrich Brandstetter.
1885.

Zu Archimedes kam ein wifsbegieriger Jüngling.
„Weihe mich,“ sprach er zu ihm, „ein in die göttliche Kunst,
Die so herrliche Frucht dem Vaterlande getragen
Und die Mauern der Stadt vor der Sambuca beschützt!“
„Göttlich nennst du die Kunst? Sie ist's,“ versetzte der Weise;
„Aber das war sie, mein Sohn, eh' sie dem Staat noch gedient.“

Schiller.

Vorwort.

Wie die Arithmetik einen durch den Rechenunterricht wohl vorbereiteten Gedankenkreis, Fertigkeit im Rechnen und Berechnen, und Geübtheit aus gegebenen Gründen Folgen abzuleiten vorfindet, so sollte auch die Geometrie einen Reichtum von Formen, Fertigkeit im Zeichnen und Konstruieren und Übung in denkender Bearbeitung geometrischer Gebilde voraussetzen dürfen, auf deren Grunde sie sogleich ungestört ihr Gebäude ausführen könnte. Das ist aber meistens nicht der Fall. Oft findet sie entweder gar keine Vorbereitung oder nicht die rechte. Daher hat gewöhnlich der geometrische Unterricht trotz der Anschaulichkeit gröſsere Schwierigkeiten zu überwinden, als der arithmetische. Um diese zu vermindern, nahm der Verfasser die sinnliche Anschauung und das empirische Interesse in den Dienst des Unterrichts. Wenn er aber seinen Vortrag so anschaulich als möglich einzurichten suchte, so sollte die Anschaulichkeit doch nie den Beweis oder die denkende Bearbeitung der Gebilde ersetzen, sondern nur der Auffassung der Begriffe zu Hilfe kommen und das punctum saliens, den Punkt, auf den es ankommt, scharf hervorheben. Eben so nahm er auch die Empirie d. h. die Anwendung in den Dienst des Denkens. Denn wird alles Wissen sofort in ein Können übergeführt, findet alle Erkenntnis Anwendung und Verwertung, wird also die Arbeit belohnt und der Geist zugleich durch neue Gesichtspunkte bereichert, so wächst die Kraft für das Verständnis und das Interesse für den rein wissenschaftlichen Inhalt. Man wird daher die Rücksicht auf die Praxis angemessen und zweckmäſsig finden. Sind aber Anschaulichkeit und Anwendung meistens schon für den Schulunterricht, selbst für den Wohlvorbereiteten, wünschenswert, so werden sie für den Selbstunterricht geradezu notwendig, weil diesem der Lehrer fehlt, der die dunklen und schweren Stellen erleuchten und erleichtern könnte. So hofft der Verfasser, daſs seine Arbeit das Selbststudium der Geometrie erfolgreich fördern werde, ohne es irgendwie zu verflachen, und überhaupt allen denen nützen könne, welche sich in den Stand setzen wollen, die Natur und das Leben mit Hilfe der Mathematik verstehen zu lernen.

Hamburg.

H. B. Lübsen.

Vorwort zur 25. Auflage.

Nicht nur die neue Orthographie, sondern auch mancherlei Anforderungen des jetzigen Standpunktes der mathematischen Wissenschaften lieſsen eine neue Auflage der höchst praktischen Geometrie des schon vor längeren Jahren mit Tode abgegangenen rühmlichst bekannten Verfassers wünschenswert erscheinen. Der Unterzeichnete, mit der Bearbeitung beauftragt, fand in der That wesentliche Umgestaltungen, Verbesserungen und Vermehrungen dringend geboten, namentlich hinsichtlich der Kongruenz und Ähnlichkeit. Letztere wurde noch in der Euklid'schen Auffassung beibehalten, um die vorhergehenden Auflagen neben der neuen benutzen zu können.

Möge das Buch in dieser neuen Gestalt sich viele neue Freunde erwerben!

Leipzig, Ostern 1882.

Richard Schurig.

Einleitung.

I.

Mutmaſslicher Ursprung der Geometrie.

Von der ursprünglichen Geschichte aller menschlichen Kenntnisse in den ersten Zeiten des menschlichen Geschlechts ist so wenig auf uns gekommen, daſs fast alles, was man über einzelne gerettete Bruchstücke berichtet, sich in reine Mutmaſsungen von zweifelhaftestem Werte verliert. Sogar die erste Spur der allgemeinen Geschichte des nach langen Zeiträumen schon auf eine gewisse Kultur gehobenen Menschengeschlechts hat sich in tiefes, nie zu lichtendes Dunkel gehüllt.

Erst lange nachher, als die ägyptische Finsternis riſs (wovon in den meisten Schulen noch ein Stück zu sehen ist), bricht eine Art Dämmerung in der Geschichte an, und hiernach soll diejenige mathematische Wissenschaft, welche den Namen „Geometrie" als Titel führt, zuerst durch die alljährlichen Überschwemmungen des Nils veranlaſst sein. (Herodot.)

Wenn der Nil, so wird erzählt, aus seinen Ufern trat, so pflegte er nicht selten die Grenzen und Befriedigungen der ägyptischen Ländereien zu zerstören und unkenntlich zu machen, sondern auch nach und nach hier ein Stück Land abzureiſsen und dort wieder anzusetzen. Es muſste also oftmals von neuem wieder geteilt und jedem das Seinige zugewiesen werden, um nach Recht und Billigkeit die Steuern regulieren zu können.

Diese Teilungen und Grenzenbestimmungen mögen nun aber anfangs aufs Geratewohl, durch bloſse Schätzung nach dem Augenmaſse bewirkt und deshalb manche Streitigkeiten entstanden, und dadurch denkende Köpfe veranlaſst worden sein, auf untrüglichere, nicht von dem Augenmaſse abhängende Mittel zu sinnen.

Auf solche und ähnliche Veranlassungen sind nun wahrscheinlich einige für die Landmesskunst wichtige Sätze erfunden (z. B. gleichlaufende gerade Linien abzustecken und auszumessen, Nivellieren etc.), deren Richtigkeit — weil sie sich nicht bloſs auf Erfahrung, sondern auf reine Vernunft gründeten — jeder Vernünftige anerkennen muſste und nach welchen die fraglichen Gröſsen und Grenzenbestimmungen sicher geleitet, etwa begangene Irrtümer und absichtliche Betrügereien leicht entdeckt und berichtigt werden konnten.

Auſserdem bezeugen die vielen groſsen Pyramiden, Gnomonen, unterirdischen Gänge, Grabmäler, Palläste, Schiffsgräben und Kanäle,*) dass die Ägypter sich viel mit der Baukunst, Fortifikation, Astronomie und Schiffahrt beschäftigt haben, wozu einige Kenntnis der Geometrie nicht allein sehr nützlich, sondern sogar unentbehrlich war.

Kurzum, vielfältige praktische Bedürfnisse müssen schon früh, bei allen zivilisierten Völkern, die Kultur und Pflege dieser vielleicht uralten Wissenschaft (Geometrie) veranlaſst haben. Denkende Köpfe, bei den Ägyptern wohl besonders die Priester, bei den Griechen, Persern, Arabern, Chinesen etc. die Philosophen, unter denen auch Fürsten, strengten sich an, noch immer mehr neue geometrische Sätze zu entdecken. Hie und da unternahm es dann einer (später z. B. der Grieche Euklides 300 v. C. durch seine Reisen in Ägypten etc.) diese anfangs sehr zerstreuten geometrischen Lehren zu sammeln und sie, nicht allein wegen ihres praktischen Nutzens, sondern auch als äuſserst merkwürdige Produkte des menschlichen

---

*) „Um die Kosten der Kanalbauten zu decken, wurde von Sesostris das der Kriegerkaste zugewiesene Dritteil des Landes einer Grundsteuer unterworfen. Die Ausdehnung der Überschwemmung bestimmte dort jährlich, welche Ländereien steuerbar sein würden, und da feste Grenzen unter diesen Umständen nutzlos gewesen wären, so muſste alljährlich mittelst vorgenommener Vermessung jedem Grundbesitzer ein gleiches Stück des vom Nil befruchteten Landes zugeteilt werden. Beides, die Landesvermessung, wie die Steuererhebung, war ein Geschäft der Priesterkaste.“ S. Reynier, De l'écon. polit. et rurale des Égyptiens et Carthaginois, p. 190, und Rau, Grunds. der Finanzwiss.; Pölitz, Neue Jahrb. der Politik und Geschichte, 1840, Oktbr.-Heft, und Montucla, Histoire des mathématiques.

Scharfsinns, zu ordnen, zu vervollkommnen, zum vorkommenden Gebrauche und zur Bildung des Geistes für die Nachwelt aufzubewahren, und weil doch die Erd- oder Feldmeſskunst die mutmaſsliche Veranlassung zur Entdeckung dieser Sätze gewesen war, so gab oder lieſs man der ganzen Sammlung derselben den Titel Geometrie (Erdmessung).

Seitdem ist aber diese Wissenschaft so sehr erweitert und vervollkommnet, daſs für die richtige Bezeichnung derselben der ursprüngliche Name „Geometrie“ in der wörtlichen Bedeutung „Erdmessung“ gar nicht mehr passt, oder vielmehr nie gepaſst hat. Die Erd- oder Feldmeſskunst ist allerdings eine Anwendung der Geometrie, aber auch auf andere ganz verschiedene Wissenschaften wird sie angewandt, z. B. auf Astronomie, Schiffahrtskunst, Optik, Mechanik, Wasserbaukunst, Fortifikation etc., und so unpassend es also sein würde, das Wort *„Geometrie“* durch Himmelsmesskunst, Mechanik etc. zu übersetzen, eben so unpassend würde es sein, dies Wort jetzt noch in der anfänglichen Bedeutung *„Erdmeſskunst“* zu nehmen.

Um nun aber einen vorläufigen Begriff von dieser Wissenschaft geben und andeuten zu können, worauf man beim Studium derselben seine Aufmerksamkeit zu richten und was man von ihr zu erwarten hat, ist es durchaus notwendig, erst ihren eigentlichen Gegenstand, Zweck und Wesen hervorzuheben und kennen zu lernen, so wie auch einige notwendige Vorbegriffe vorauszuschicken.

II.

Gegenstand der Geometrie.

Räumliche Gröſsen: Körper, Flächen und Linien.

Körper. Jeder Mensch hat die Vorstellung von dem nach allen Richtungen bis ins Unendliche ausgedehnten Raume. Von diesem unbegrenzten Raume denke man sich beliebig groſse, von allen Seiten begrenzte Stücke (z. B. den Raum, welcher von den Wänden, Decke und Boden eines Zimmers eingeschlossen (begrenzt) ist, so hat man sich das gedacht, was man Körper oder auch wohl geometrische Körper nennt, um sie durch dieses Beiwort „geometrisch“ von den materiellen oder physischen Körpern zu unterscheiden, welche aufser ihrer Ausdehnung und Form noch andere Merkmale haben, wie z. B. Materialität — Gewicht, Farbe etc. Der geometrische Körper ist also nichts Materielles, sondern nur ein begrenzter leerer Raum. Spricht man von der Grösse und Form eines physischen Körpers, so abstrahiert man von dem Stoffe (Holz, Eisen etc.), aus welchem er besteht, betrachtet vielmehr nur den leeren Raum, welchen der physische Körper einnimmt (ausfüllt).

Flächen. Die Grenzen eines Körpers nennt man Flächen und alle Flächen, welche einen Körper begrenzen (einschliefsen), bilden zusammen dessen Oberfläche. Die Flächen eines Körpers können also, eben weil sie einen Raum begrenzen, kein Teil davon sein, mit andern Worten: Flächen haben keine Dicke, sind nur vom Körper abstrahierte Grössen im Raume. Will man sich eine Fläche durch ein Blatt Papier versinnlichen, so muss man sich nur die eine Seite desselben denken, denn wie dünn es auch sein möge, so hat es doch als materieller Körper notwendig eine gewisse Dicke und ist mithin keine mathematische Fläche.

Linien. Die Grenzen einer Fläche nennt man Linien. Die Linien können also, eben weil sie eine Fläche begrenzen (einfassen), kein Teil davon sein, weil ein Teil einer Fläche doch selbst wieder eine Fläche, mithin nicht die Grenze wäre. Die Linien sind also auch nur Gröfsen im Raume, sie haben weder Dicke noch Breite, sondern nur eine Ausdehnung, nämlich Länge.

Punkte. Die Grenzen einer Linie nennt man Punkte. Der mathematische Punkt kann also, eben weil er die Grenze (Anfang, Ende) einer Linie bezeichnet, kein Teil davon sein, mithin auch gar keine Ausdehnung haben. Die verschiedenen Richtungen im Raume nennt man auch „Dimensionen“. Der Körper hat also drei Dimensionen (Länge, Breite und Dicke oder Höhe), die Fläche nur zwei Dimensionen, die Linie nur eine Dimension. Da der Punkt keine Dimension hat, so kann er auch keinen Stoff zu weiteren Betrachtungen geben.

Wir unterscheiden demnach nur dreierlei Arten räumliche Gröfsen, nämlich: Körper, Flächen und Linien, und diese reinen Gedankendinge sind nun der eigentliche Gegenstand, mit welchem die Geometrie sich beschäftigt.

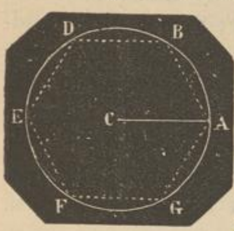
III.

Zweck der Geometrie.

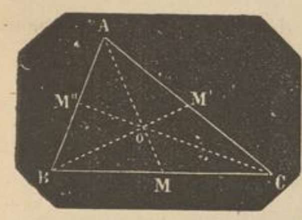
Entdeckung der Eigenschaften; Konstruktion und Ausmessung der räumlichen Gröfsen.

1. Die Geometrie soll die Eigenschaften der räumlichen Gröfsen entdecken und kennen lehren.

So hat z. B. die in sich zurücklaufende krumme Linie, welche man Kreis nennt,*) unter andern merkwürdigen und wichtigen Eigenschaften auch die, dafs sich der Halbmesser desselben gerade sechsmal in die krumme Linie abtragen läfst.



Nimmt man nämlich die vom Mittelpunkt C nach A gehende gerade Linie, welche man Halbmesser nennt, in den Zirkel und steckt sie erst von A nach B ab, dann von B nach D, von D nach E etc., so mufs man zum sechstenmale genau wieder auf den Punkt A zurückkommen, zugleich ist hierdurch die Kreislinie in sechs gleiche Bögen geteilt. Ebenso hat jede andere räumliche Gröfse viele merkwürdige Eigenschaften. So hat z. B., um noch ein Erläuterungs-Beispiel anzuführen, ein jedes Dreieck



die (für die Mechanik wichtige) Eigenschaft, dafs die drei, von den Endpunkten A, B, C nach den Mitten M, M', M'' der gegenüber liegenden Seiten gezogenen geraden Linien sich immer in einem und demselben Punkte o treffen müssen u. m. dgl.

2. Die Geometrie lehrt die räumlichen Gröfsen (Figuren und Liniengebilde) richtig und leicht konstruieren (zeichnen). Wollte z. B. ein Architekt ein regelmäfsiges Sechseck zeichnen, d. i. eine Figur von sechs gleichen Seiten und sechs gleichen Winkeln

---

*) Zu einer vorläufigen Einleitung genügen die gewöhnlichen populären Begriffe von geraden und krummen Linien, Kreis, Dreieck etc. vollkommen und diese dürfen wir auch unbedenklich bei jedem zum Studium der Geometrie fähigen Schüler voraussetzen.

und zwar so, dass jede Seite 5 cm lang wäre, so würde ihm dieses, wenn er Geometrie verstände, ein leichtes sein. Er brauchte sich ja nur der eben erwähnten Eigenschaft des Kreises zu erinnern, mit einem Halbmesser von 5 cm einen Kreis zu beschreiben, hierauf den Halbmesser nur unmittelbar darin herumzutragen und die so gefundenen sechs Teilungspunkte durch gerade Linien zu verbinden. Ebenso lehrt die Geometrie jede andere verlangte Figur richtig zu konstruieren.

3. Die Geometrie lehrt ein sicheres Verfahren kennen, die räumlichen Gröſsen genau auszumessen. Frägt z. B. jemand: wie viel kann auf jenem viereckigen Stück Feld mehr wachsen, als auf diesem fünfeckigen; wie viel kann dieses Schiff laden, um nicht tiefer als $3^1/_2$ m zu gehen; wie findet man den richtigen Weg durch das bahnlose Meer; wie werden Land- und See-Karten angefertigt; wie findet man die Entfernung des Mondes von der Erde, die Zeit, nach welcher eine Sonnenfinsternis eintritt, ein Komet wieder erscheint; wie muſs ein Geschütz gerichtet werden, damit die Kugel einen bestimmten Punkt treffe u. m. dgl., so können solche und ähnliche Fragen nur von einem der Geometrie Kundigen beantwortet werden.

IV.

Begriff der Geometrie.

Nachdem nun die zur Bildung des hier geforderten vorläufigen Begriffs nötigen Vorstellungen vorausgeschickt worden, kann man also, um von dem Umfang und Inhalt einer ganzen Wissenschaft so viel wie möglich in ein paar Worten zusammen zu fassen, sagen: Die Geometrie ist die Wissenschaft von den Eigenschaften, der Konstruktion und Ausmessung der räumlichen Gröſsen.

V.

Methode der Geometrie.

Aus dem Vorhergehenden erhellet wohl, daſs die Hauptaufgabe der Geometrie darin besteht: die Eigenschaften der räumlichen Gröſsen zu entdecken. Auf welche Weise soll dies aber geschehen? Wie ist man z. B. wohl zur Kenntnis des vorhin erwähnten merkwürdigen Satzes gelangt: daſs sich der Halbmesser eines Kreises gerade sechsmal in demselben herumtragen lasse, so wie zu dem andern Satze: daſs die drei von den Eckpunkten eines Dreiecks nach den Mitten der gegenüber liegenden Seiten gezogenen geraden Linien sich immer in demselben Punkte durchschneiden? Hat man diese unumstöſslichen Wahrheiten etwa durch einen glücklichen Zufall, durch Erfahrung entdeckt, indem man ganz gedankenlos, gleichsam spielend, den Halbmesser in den Kreis herumtrug und jene drei Linien in dem Dreiecke zog, ohne die Entdeckungen zu ahnen, von welchen man nachher überrascht wurde?

Viele solche einfache Sätze der Geometrie können und mögen in grauer Vorzeit wirklich auf diese Weise durch bloſses Probieren zuerst entdeckt sein, allein die meisten und wichtigsten Eigenschaften der räumlichen Gröſsen würden sich auf diese Weise: durch Versuche und Erfahrungen unmöglich finden lassen. Auch würden die so gefundenen Sätze keine allgemeine Gültigkeit haben und also auch nicht auf den Namen: m a t h e m a t i s c h e Wahrheiten Anspruch machen können, welche immer so e v i d e n t, d. h. so einleuchtend gewiſs und zuverlässig sein müssen, daſs man auf die unumstöſsliche Richtigkeit derselben unbedenklich bauen kann.

Wollte z. B. jemand den eben vom Dreieck erwähnten Satz behaupten und die unbestreitbare Richtigkeit desselben dadurch beweisen, daſs er vor unsern Augen die fraglichen drei Linien zöge, und nun sagen: seht ihr, daſs die drei Linien sich wirklich in demselben Punkte schneiden! so würden wir ihm doch gleich zurufen: Du bist durch Deine uns soeben gezeigte Probe, strenge genommen, noch nicht einmal berechtigt, nur die wahrscheinliche, viel weniger noch die absolute Richtigkeit Deines Satzes zu behaupten; denn angenommen, Deine Zeichnung sei ohne Irrtum, so genau, als es Deine Sinne und Instrumente erlauben, so gilt Dein behaupteter Satz doch nur von diesem e i n e n Dreiecke, oder von so vielen als Du untersucht hast; welcher Grund berechtigt Dich aber, von einem oder ein paar Dreiecken auf alle übrigen zu schliessen, deren Zahl, weil unendlich, Du doch nicht alle durchprobieren kannst?

Hiernach möchte es wohl schon dem ersten Anfänger einleuchten, daſs, wenn die mathematischen Wahrheiten diesen Namen verdienen, nämlich unumstöſsliche Gewiſsheit und allgemeine Gültigkeit haben sollen, dieselben dann auch als eine absolute Notwendigkeit durch die reine Vernunft erkannt werden müssen. Dies ist auch der Grund, weshalb man die reine Mathematik eine reine Vernunftwissenschaft nennt. Kein Satz, kein Schluſs gründet sich auf Erfahrung. Alles muſs hier durch reine Vernunftspekulation, aus reinen Verstandesbegriffen abgeleitet und gefunden werden, und eben dadurch erhalten die mathematischen Sätze ihre einleuchtende Gewiſsheit und Notwendigkeit. Dieser unumstöſslichen Gewiſsheit halber standen die mathematischen Wissenschaften auch bei allen Philosophen des Altertums, deren Lehren und Sitten die vollkommensten waren, in so hoher Achtung. Besonders waren es die griechischen Philosophen Thales, Pythagoras, Hippokrates, Plato, Aristoteles, Euklides und Archimedes, welche sich für die mathematischen Wissenschaften interessierten und deren Studium nicht allein des praktischen Nutzens halber, sondern auch als eine praktische Logik, die Entwickelung der Geisteskräfte fördernd, und das Urteil schärfend, so dringend empfahlen. Von Plato wird erzählt: er habe keinen Schüler ohne mathematische Vorbildung zu seinem Unterricht gelassen. Der berühmte Arzt Hippokrates soll seinem Sohne dringend geraten haben, mit dem Studium der Arzeneikunst auch das der Mathematik zu verbinden.*) Genug, der Anfänger wird sich bald selbst überzeugen, daſs jeder, der mit Nutzen Mathematik studieren will, auch genötigt ist, sein Denkvermögen in Thätigkeit zu setzen und sich an ein solides Urteil zu gewöhnen, wozu ihm unerschöpflicher Stoff dargeboten wird. Ohne Nachdenken und Spekulieren würden die mathematischen Wissenschaften nicht erfunden sein, und soll das Studium derselben Erfolg haben, Ausbildung des Verstandes, sichere Praxis, schnelle Kombination bekannter Wahrheiten und Auffindung neuer erreicht werden, so muſs sich der Anfänger gleich von Haus aus wissenschaftlich bilden, die vorgetragenen Lehren nicht bloſs aufs Wort glauben und mechanisch auffassen, sondern dieselben so zu durchdringen suchen, daſs er die vollkommenste Überzeugung erlange und mithin einsieht, daſs es durchaus so sein muſs, wie behauptet worden.

---

*) Hippokrates mag hierbei wohl an die Physiologie gedacht haben, die in neuerer Zeit so eifrig kultiviert wird und durchaus Kenntnisse der Mathematik und Naturwissenschaft verlangt.

VI.

System der Geometrie.

Wie schon in IV. gesagt, ist die Geometrie die Wissenschaft von den Eigenschaften, der Konstruktion und Ausmessung der räumlichen Gröfsen und ihre Hauptaufgabe ist: die Eigenschaften derselben zu entdecken. Nun kann man sich aber von jeder der drei Arten räumlicher Gröfsen: Körper, Flächen und Linien unzählige verschieden geformte denken. So sind z. B. die Körper, welche man Würfel, Kegel, Kugel, Cylinder etc. nennt, an Gestalt (Form, Figur) himmelweit verschieden; ebenso die Flächengröfsen, Dreieck, Viereck, Kreis etc.; aufser der Kreislinie lassen sich noch unzählige anders gestaltete krumme Linien denken. Aber alle diese unzähligen Gestalten betrachten und ihre Eigenschaften entdecken zu wollen, würde offenbar, eben weil ihre Zahl unendlich ist, unmöglich sein. Glücklicherweise ist dies aber auch gar nicht nötig. Es hat sich nämlich gezeigt, dafs man zur Bildung einer vollständigen Geometrie dennoch nur sehr wenige von den unzähligen räumlichen Gröfsen zu betrachten und genau zu erforschen braucht, nämlich diejenigen, die uns gleichsam den Schlüssel zur Kenntnis aller übrigen geben.

Die wichtigsten Eigenschaften, welche man bei diesen wenigen räumlichen Gröfsen entdeckt hat, sind nun, wie schon bemerkt, von unsern Vorfahren aufgezeichnet worden. Als die beste Form sie mitzuteilen und zu lehren, hat man sie in sogenannte Lehrsätze gekleidet und diese nach einer gewissen, durch die Wissenschaft selbst vorgeschriebenen systematischen Ordnung an einander gereiht. Denn, so wie in der Arithmetik ein gewisses systematisches Fortschreiten notwendig beobachtet werden mufs, und man z. B. nicht eher das Dividieren lernen kann, bevor man das Multiplizieren gelernt hat, diesem aber das Addieren und diesem wiederum das Zählen vorhergehen mufs, so müssen auch in der Geometrie die Lehrsätze in einer gewissen Ordnung auf einander folgen, und der Anfänger wird deshalb schwerlich einen Satz gehörig verstehen, wenn er nicht alle vorhergehenden Sätze, welche ihn begründen und wie Glieder einer Kette mit ihm zusammenhängen, gehörig verstanden hat.

Um die unumstöfsliche Richtigkeit dessen, was jeder Lehrsatz behauptet, zu bestätigen, sind jedesmal die notwendigen Gründe dafür in Form eines Beweises hinzugefügt und hierauf folgen dann in der Regel noch Beispiele, um den mitgeteilten Satz praktisch einzuüben und dem Gedächtnis einzuprägen.

Sämtliche im System der Geometrie enthaltenen Lehrsätze etc. pflegt man auch wohl die Elemente (Fundamente) derselben und deshalb das System selbst die Elementar-Geometrie zu nennen.

Schliefslich möge hier noch erwähnt werden, dafs altem Herkommen nach, die Geometrie in zwei Hauptteile geteilt wird, nämlich in ebene und körperliche Geometrie. Die ebene Geometrie (Planimetrie) betrachtet nur solche Konstruktionen, welche ganz in einer ebenen Fläche liegen; die körperliche Geometrie (Stereometrie) dagegen diejenigen räumlichen Gröfsen, welche nicht in einer ebenen Fläche liegen und deren Bilder deshalb auch nur perspektivisch gezeichnet werden können.

Mit der Betrachtung der einfachsten räumlichen Gröfsen müssen wir natürlich beginnen und zwar zunächst mit den Bestandteilen der ebenen Figuren, nämlich mit der Betrachtung der geraden Linien und Winkel (resp. Ecken). Denn obgleich jeder Mensch diese Begriffe schon hat und bei nüchternem Verstande gewifs keine gerade Linie mit einer krummen verwechseln wird, so ist doch eine genauere mathematische Bestimmung dieser Begriffe notwendig.

Wer nun gesunden Menschenverstand und für merkwürdige Schöpfungen des menschlichen Geistes Sinn hat, nicht denkfaul ist und sich nicht durch die ersten Schwierigkeiten (die sich übrigens durch fleifsiges Repetieren beseitigen lassen) abschrecken läfst, der wird nach Überwindung derselben sich immer mehr und mehr für die mathematischen Wissenschaften interessieren, sich über die schöne Ordnung in denselben freuen und von ihrer überzeugenden Gewifsheit überrascht, mit zunehmender Spannung die allmähliche Entwickelung derselben verfolgen.

Um zur Kenntnis der ganzen Geometrie zu gelangen, hat man übrigens im ganzen nur etwa hundert eigentliche (hier mit gesperrter Schrift bezeichnete) Sätze zu lernen, und diese werden die darauf zu verwendende Zeit, wenn wöchentlich auch nur zwei statt vier gelernt werden, reichlich lohnen.

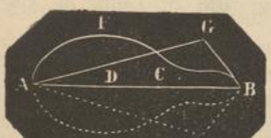
Erster Teil.

Ebene Geometrie.

Erstes Buch.

Von den geraden Linien besonders, von der Ebene und vom Kreise vorläufig die Erklärungen.

1.



Erklärung. Eine gerade Linie ist diejenige, welche nicht aus ihrer Lage kommt, wenn sie sich um zwei in ihr liegenden festen Punkte (z. B. um ihre Endpunkte) dreht.*)

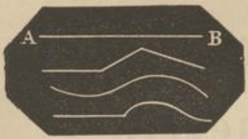
Erläuterung. Zwischen zwei Punkten A und B sind offenbar unzählig viele Linien möglich, z. B. die von A über F nach B, oder die von A durch G nach B gehende. Stellt man sich nun vor: alle diese Linien drehten sich um die beiden als fest gedachten Endpunkte A und B, so daſs sie in andere Lagen, z. B. nach halber Umdrehung in die punktierte kommen, so läſst sich noch eine solche von A nach B gehende Linie denken, welche bei dieser Umdrehung nicht aus ihrer Lage

---

*) So hörten wir einmal Gauſs bei der Erklärung des Fernrohrs und dessen richtigem Gebrauche den Begriff der geraden Linie festsetzen. Diese Erklärung ist theoretisch fruchtbar, wie die gleich daraus folgenden Sätze zeigen; auſserdem ist das angegebene Merkmal praktisch wichtig, z. B. bei der Justierung eines Fernrohrs, richtigen Bohrung eines Cylinders etc.

kommt, gleichsam die Umdrehungsachse bildet, in welcher also alle Punkte, wie C, D, ruhen. (Man breche ein Stück Papier, so ist der entstehende Bruch [Falze] eine gerade Linie.)

2.



Erklärungen. Eine gerade Linie (eine Gerade) nennt und bezeichnet man durch zwei an ihre Endpunkte gesetzte Buchstaben (Ziffern). Will man auch den Lauf der Linie andeuten und sich dieselbe durch die fortschreitende Bewegung des einen Endpunkts gegen den andern hin, beschrieben denken, so schreibt man desjenigen Punktes Buchstaben voran, von dem die Bewegung ausgeht. So bedeutet z. B. AB oder nach der neuern Bezeichnung (Carnot) $\overline{\mathrm{AB}}$, die von A nach B gehende gerade Linie, und eben so BA oder $\overline{BA}$ dieselbe Linie in umgekehrter Richtung.

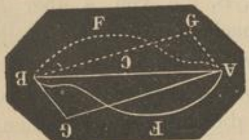
Ein aus geraden Linien von verschiedenen Richtungen zusammengesetzter Zug heiſst eine gebrochene Linie (AGB in vorletzter Figur oder die 2. Linie in vorstehender Figur).

Eine stetig gebrochene Linie, in welcher also kein Teil gerade ist, heiſst eine krumme Linie (die 3. Linie in vorstehender Figur).

Ein aus geraden und krummen Linien bestehender Zug heiſst eine gemischte Linie (die 4. Linie in vorstehender Figur).

Statt gerade Linie, sagt man gewöhnlich kurzweg: Linie.

3.

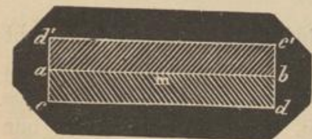


Lehrsatz. Durch zwei Punkte A und B ist nur eine einzige gerade Linie möglich.

Beweis. Dies folgt aus dem § 1 festgesetzten Begriff der geraden Linie. Zufolge der dort gegebenen Erläuterung kann es zwischen A und B offenbar nur eine einzige solche Reihe von Punkten geben, die nicht aus ihrer Lage kommen, indem man die ganze Figur (in Gedanken) um die beiden festen Endpunkte A, B dreht.

Zusatz. Hieraus folgt noch eine andere, jedoch nicht eigentümliche Eigenschaft der geraden Linie. Wird nämlich eine gerade Linie $\overline{AB}$ so umgelegt (um ihre Mitte C in der Bildfläche herumgedreht), dafs das Ende A nach B und dafür B nach A und folglich F nach Ⅎ kommt, so mufs notwendig (weil zwischen zwei Punkten nur eine gerade Linie möglich ist) die gerade Linie in ihrer jetzigen umgelegten Lage mit der vorigen genau zusammenfallen und mithin jede gerade Linie an der einen Seite genau so beschaffen sein, wie an der andern.

4.



Aufgabe. Zu untersuchen, ob die Seite ab eines zum Ziehen gerader Linien dienenden Lineals auch wirklich gerade ist.

Auflösung. Man ziehe längs der zu prüfenden Kante ab eine Linie so fein als möglich; lege hierauf das Lineal um (drehe es in der Bildfläche um die Mitte m), so dafs a nach b und b nach a, mithin c nach c' und d nach d' kommt. Schliefst dann dieselbe Kante des Lineals sowohl in dieser Lage als auch, wenn es jetzt längs der gezogenen Linie fortgeschoben wird, an dieselbe immer genau an, so ist das Lineal richtig.

5.

Erklärung. Eine Fläche ist und heifst eben oder eine Ebene, wenn eine gerade Linie, die zwei beliebige Punkte mit ihr gemein hat, auch mit allen ihren übrigen Punkten darin enthalten ist; oder mit andern Worten: eine Fläche heifst eben, wenn man von jedem ihrer Punkte aus, nach allen Richtungen gerade Linien in derselben ziehen kann.

Es sei hier noch ein für allemal daran erinnert, dafs im ersten Teile der Geometrie nur solche Figuren betrachtet werden, die ganz in einer ebenen Fläche (Ebene) liegen, wofür das Papier oder die Tafel, worauf sie gezeichnet sind, stets angenommen wird. Eine dreieckige Figur z. B., welche auf einer krummen Fläche, etwa auf einer Kugelfläche gezeichnet ist, gehört also nicht zur ebenen, sondern zur körperlichen Geometrie.

6.

Aufgabe. Wie kann man erkennen, ob eine Fläche eben oder eine Ebene ist.

Auflösung. Man passe ein richtiges Lineal an verschiedenen Stellen auf die zu prüfende Ebene und sehe zu, ob die Kante des Lineals mit allen ihren Punkten genau anschliefst. (§ 5.)

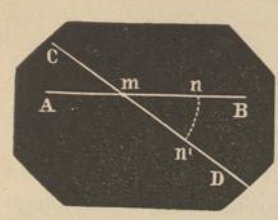
Anmerkung. Aufser diesem einfachen Prüfungsmittel giebt es noch viel schärfere. Vollkommen ebene Flächen existieren übrigens nur in Gedanken. Der feinern Technik wird es schon als Meisterstück angerechnet, wenn sie eine Fläche nur von der Gröfse eines Kartenblattes so eben liefert, dafs sie die erwähnten strengern Prüfungsmittel vertragen kann. Unsere gewöhnlichen Tische, Spiegelgläser etc. werden meistens für eben gehalten, strenge untersucht, finden sich aber immer Erhöhungen und Krümmungen darauf.

7.

Lehrsatz. Durch zwei Punkte A, B, ist die Lage und Richtung der dadurch gehenden geraden Linie $\overline{AB}$, nämlich der Lauf ihrer geradlinigen Verlängerungen (die man sich, nach beiden Seiten hin, bis ins Unendliche denken kann), vollkommen bestimmt.

Beweis. Man stelle sich vor, die Bildebene werde, wie in § 1, um die beiden festen Punkte A, B gebrochen, so entsteht in der ganzen unendlichen Ausdehnung der Bildebene nur eine und eben deshalb durch die beiden Punkte A, B bestimmte Linie (Falze), welche in ihrer ganzen unendlichen Ausdehnung das § 1 erwähnte Merkmal hat. Es ist also nicht möglich, eine gerade Linie auf verschiedene Weise geradlinig verlängert zu denken.

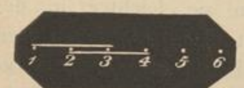
8.



Lehrsatz. Wenn zwei gerade Linien zwei Punkte gemein haben, so bilden sie nur eine einzige gerade Linie.

Beweis. Die beiden Linien AB, CD schneiden sich in dem Punkte m, den sie also gemeinschaftlich haben. Stellt man sich nun vor, die Linie CD drehe sich um den gemeinschaftlichen Punkt m, so daſs noch ein zweiter Punkt n', der Linie CD, mit einem Punkt n der Linie AB zusammenfällt, so haben dann die beiden Linien zwei Punkte m und n gemein. Durch diese beiden Punkte ist aber nur eine gerade Linie möglich (§ 3) und die geradlinige Verlängerung derselben vollkommen bestimmt (§ 7). Mithin müssen auch zwei gerade Linien, wenn sie zwei Punkte gemein haben, in ihrer ganzen unendlichen Ausdehnung zusammenfallen, mithin nur eine einzige gerade Linie bilden.

9.



Lehrsatz. Wenn in einer Reihe von Punkten 1, 2, 3, 4, ... je drei auf einander folgende in gerader Linie sind, so liegen sie alle zusammen in einer geraden Linie (in einerlei Richtung).

Beweis. Erstlich haben die beiden geraden Linien $\overline{123}$ und $\overline{234}$ zwei Punkte, 2 und 3, gemein und bilden folglich eine einzige gerade Linie $\overline{1234}$ (§ 8); dann haben wieder die beiden geraden Linien $\overline{1234}$ und $\overline{345}$ die zwei Punkte 3 und 4 gemein, und bilden mithin wieder eine gerade Linie etc.

Ob eine Reihe von Punkten in gerader Linie liegen, würde man praktisch dadurch ermitteln können, indem man ein Lineal (Schnur) an die Punkte legt, und, wenn es zur Zeit nur über drei hinausreicht, an der ganzen Reihe fortschiebt und achtgiebt, ob die ganze Reihe oder je drei unmittelbar auf einander folgende genau anliegen. Hierauf beruht auch das Verfahren, mittelst eines kurzen Lineals eine gerade Linie beliebig weit zu verlängern, indem man nur darauf achtet, daſs jeder folgende Zug mit dem vorhergehenden zwei Punkte gemein hat.

10.

Erklärung. Unter Entfernung (Abstand) zweier Punkte versteht man die Länge der sie verbindenden geraden Linie.

Ist also der Weg zwischen zwei Punkten nicht gerade (geht er z. B. über einen Berg), so muſs man die Länge desselben nicht mit der Entfernung (Abstand) der beiden Punkte verwechseln.

11.

Von den, die gerade Linie betreffenden Lehrsätzen wollen wir nun schlieſslich noch einige praktische Anwendungen auf das Feldmessen machen, und uns zu dem Ende auf ein ebenes freies Feld versetzt denken. Wie man in hügeligen und durchschnittenen Gegenden zu verfahren hat, kann erst in der körperlichen Geometrie gelehrt werden. Aus dem höchst einfachen Apparate, welcher zur Feldmeſskunst erforderlich ist, entlehnen wir vorläufig nur einige runde Stangen, sogenannte Meſsstäbe. Diese sind etwa 3 cm dick, $2^1/_2$ bis 3 m lang; an einem Ende, um sie leichter in den harten Boden stecken zu können, mit eisernen Spitzen versehen, und um sie besser aus der Ferne wahrnehmen zu können, halbmeterweise abwechselnd, rot und weiſs mit Ölfarbe angestrichen. In Ermangelung solcher Stäbe sind für den Privatmann auch andere Stäbe, wenn sie nur ziemlich gleiche Dicke haben, gut genug.

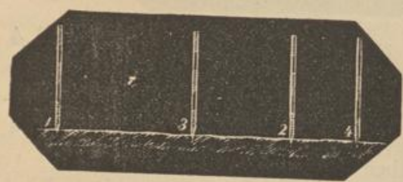
Angenommen nun, es seien (siehe folgende Figur) mehre solcher Meſsstäbe vertikal*) und so in die Erde gesteckt, daſs eine gerade Linie, welche die beiden äuſsersten berührt, auch alle mittlern berührt, so würden sie auch alle in einerlei Richtung stehen. Ob dies wirklich der Fall ist, sieht man

---

*) Vertikal heiſst diejenige Richtung, welche ein freifallender Körper einschlägt oder ein frei und ruhig hängendes Lot (Senkblei, d. i. ein Faden mit einer daran hängenden kleinen Kugel) angiebt. Für den hier angegebenen Zweck wird jedoch, ohne Hilfe eines Senkbleies, die vertikale Stellung der Meſsstäbe stets nur nach dem Augenmaſse genau genug bewirkt.

aber (nach ein paar Stunden Übung) sehr leicht, indem man nur hinter einen der beiden äufsersten Mefsstäbe tretend, an beiden Seiten hinsieht (visiert). Für Kurzsichtige, oder wenn die Reihe der Stäbe zu lang ist, wird ein Fernrohr notwendig.

12.



Aufgabe. Auf dem Felde stehen zwei Mefsstäbe, 1 und 2. Zwischen dieselben soll ein dritter, 3, so eingesteckt werden, dafs er mit 1 und 2 in einerlei Richtung steht.

Auflösung. Man mufs erst die Linie $\overline{12}$ verlängern und deshalb in 4 eine Mefsstange so einstecken, dafs beim Visieren 4, 2, 1 in einerlei Richtung erscheinen, alsdann richte man, mit der dritten Mefsstange zwischen 1 und 2 tretend, diese dritte so ein, dafs auch 3, 2, 4 in einerlei Richtung erscheinen. Ist dies der Fall, so haben die beiden geraden Linien $\overline{421}$ und $\overline{324}$ zwei Punkte, 2 und 4, gemein, und bilden mithin eine einzige gerade Linie. (§ 8.)*).

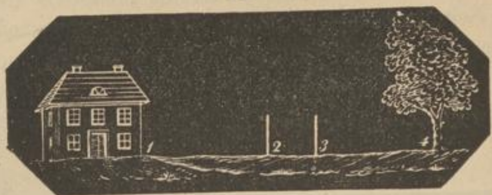
Anmerkung. Zwei Personen brauchen hierzu weniger Zeit. Die eine (4) tritt dann in die Verlängerung von $\overline{12}$ und läfst, auf gegebene Winke, den Gehilfen die dritte Mefsstange mit ausgestrecktem Arm, so lange hin und her rücken, bis sie die Stäbe 1, 3, 2 in einerlei Richtung erblickt, worauf dann der Gehilfe, nach erhaltenem Winke, die dritte Mefsstange fest einsteckt.

Nachdem erst drei Punkte in einer Linie durch Mefsstäbe bezeichnet sind, kann eine einzige Person leicht noch mehrere Zwischenpunkte durch eingesteckte Mefsstäbe bezeichnen.

Soll eine so ausgesteckte Linie ganz zur Anschauung gebracht werden, um darnach etwa eine Mauer, einen Damm etc. aufzuführen, so kann man von einem Punkt zum andern eine Schnur spannen und längs derselben eine kleine Furche in den Boden reifsen.

*) Anfänger mögen sich dies Verfahren praktisch erläutern und sich im Visieren üben, indem sie auf einen Tisch Stecknadeln einstecken.

13.

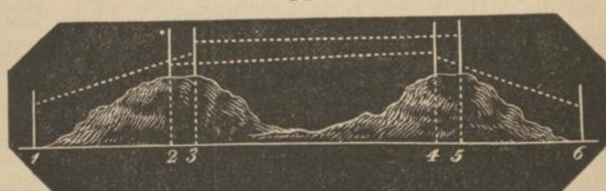


Aufgabe. Zwischen zwei gegebenen Punkten, 1 und 4, zwei andere Punkte durch Meſsstäbe zu bezeichnen, so daſs alle vier in einerlei Richtung sind. Es wird hier der Fall angenommen, daſs man wohl zwischen die Punkte 1 und 4, jedoch nicht hinter dieselben treten kann.*)

Auflösung. Zwei Personen (2 und 3) richten sich durch Visieren gegenseitig so ein, daſs gleichzeitig 2, 3, 4 und 3, 2, 1 in gerader Linie sind, welches auf gegenseitiges Zuwinken, nach einigem Hin- und Herrücken leicht bewirkt wird. Ist dies aber der Fall, so haben beide Linien $\overline{234}$ und $\overline{321}$ zwei Punkte, 2 und 3, gemein und folglich einerlei Richtung. (§ 8.)

Soll eine Person dies allein thun, so braucht sie nur, wegen des öftern Hintretens von einem der beiden Stäbe, 2 und 3, zum andern, mehr Zeit. Nachdem aber diese beiden Zwischenpunkte gefunden sind, können leicht noch mehrere bezeichnet werden.

14.



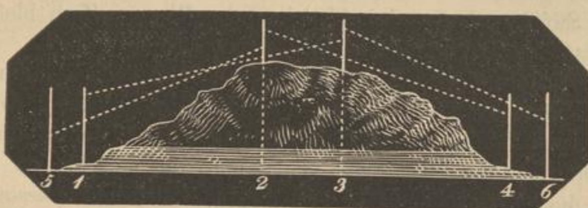
Aufgabe. Von 1 nach 6 soll über zwei Berge eine Bahn, Chaussee etc. geführt, oder dieselbe nach gerader Richtung

*) Der Anfänger möge zum bessern Verständnis dieser Aufgabe einen Tisch mitten ins Zimmer stellen und auf diesen zwei Stecknadeln (2) und (3) so einzustecken suchen, daſs sie mit den beiden gegenüber liegenden Kanten (1) und (4) des Zimmers in einerlei Richtung sind.

durchgegraben und deshalb, um den Arbeitern Richtpunkte zu geben, diese Richtung ausgesteckt werden. Es wird angenommen, dafs man von jedem Berge aus nur das zunächst stehende Signal sehen kann.

Auflösung. Auf jeden Berg treten zwei Personen und richten sich, wie in vorhergehender Aufgabe, durch Visieren so ein, dafs zu gleicher Zeit, $\overline{123}$, $\overline{234}$, $\overline{345}$, $\overline{456}$, gerade Linien sind. Ist dies der Fall und denkt man sich diese vier Linien an den verlängerten Stäben heruntergleitend, so müssen sie notwendig alle (weil dann jede folgende Linie mit der vorhergehenden zwei Punkte gemein bekommt) auf die durch 1 und 6 gehende gerade Linie fallen und mithin die über beide Berge gehende gerade Richtung oder den Durchschnitt bezeichnen. Mehre Zwischenpunkte sind nun leicht aufzufinden.

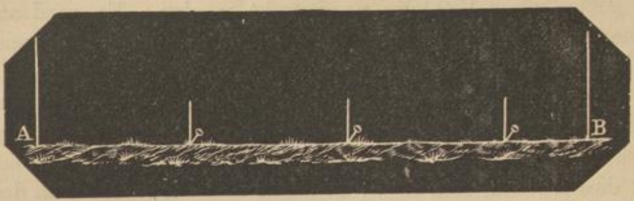
15.



Aufgabe. Es soll von 1 nach 4 ein unterirdischer Gang (Tunnel) unter einem Berge hindurch geführt werden und die Arbeit an beiden Enden (Eingang und Ausgang) zugleich beginnen. Was ist zu thun, damit die Minierer in einerlei Richtung arbeiten und auf einander stofsen?

Auflösung. Auf dem Berge werden erst zwei Stäbe, 2 und 3, mit 1 und 4 in einerlei Richtung eingesteckt (nach § 13); alsdann noch 5 und 6 in dieselbe Richtung gebracht, so dafs erst 1, 2, 3 und 2, 3, 4, dann 5, 1, 2 und 6, 4, 3 in einerlei Richtung sind, dann haben die beiden Linien $\overline{5123}$ und $\overline{2346}$ zwei Punkte gemein und das Verlangte wird zustande gebracht, wenn die Arbeit nach den durch 1, 5 und 4, 6 bestimmten Richtungen ausgeführt wird. Auf ähnliche Weise liefse sich auch ein Tunnel unter einem Flusse hindurch führen. Es wäre allerdings noch möglich, dafs die beiden Linien $\overline{51}$ und $\overline{64}$ über und unter einander weggingen, wie sich aber auch dies leicht vermeiden läfst, lehrt später § 213.

16.



Aufgabe. Eine auf ebenem Felde ausgesteckte Linie AB auszumessen.

Verfahren. Zu solchen unmittelbaren Längenmessungen gebraucht man ein 20 (oder 25) m langes Stahlbandmaſs, welches in Centimeter eingeteilt ist. Durch die Endringe desselben werden, um sie bequemer fortziehen und anspannen zu können, 1 bis $1^1/_2$ m lange Stäbe (Kettenstäbe) gesteckt, welche gleich den Meſsstangen eiserne Spitzen haben. Ein paar Stifte verhüten das Abgleiten der Ringe. Zum bloſsen Privatgebrauch kann auch eine hanfene Schnur dienen.

Zwei Personen, I und II, ziehen nun dieses Bandmaſs. No. I zieht zuerst den in *A* stehenden Meſsstab aus, steckt an dessen Stelle ihren Kettenstab und richtet darauf durch Winke No. II, welche das Bandmaſs straff anzieht, so ein, daſs die beiden Kettenstäbe und die in *B* stehende Meſsstange in einerlei Richtung sind. Hierauf ziehen beide Kettenzieher die Kettenstäbe wieder aus, No. I richtet die Meſsstange in *A* wieder auf, No. II bezeichnet die Stelle, wo ihr Kettenstab stand, mit einem kleinen Merkzeichen (Zähl- oder Markierstäbe, auch Sticken, deren sie ein Dutzend in einem Köcher mit sich führt) und geht nun, das Bandmaſs nach sich schleppend, vorwärts, bis die ihr folgende No. I an die bezeichnete Stelle kommt, und an die Stelle des Merkzeichens ihren Kettenstab steckt. Nach diesem Kettenstabe und nach der in *A* wieder aufgerichteten Meſsstange kann No. II sich jetzt selbst einrichten. Diese zweite Stelle wird wieder mit einem Merkzeichen bezeichnet u. s. w. — So viele Merkzeichen No. I einsammelt, so viele ganze Bandlängen hält die ausgemessene Linie. Ein übrig bleibendes Stück wird mit einem Teile des Bandmaſses ausgemessen.

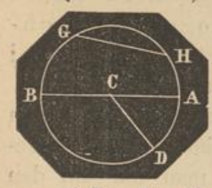
Eine nicht zu groſse Länge kann auch mit einem sogenannten Dreimeterstock ausgemessen werden. In sehr vielen

Fällen genügt es auch, zu manchen militärischen Zwecken z. B., eine Länge durch Abschreiten oder durch bloſse Schätzung nach dem Augenmaſs zu messen, wozu dann aber eine groſse Übung erforderlich ist. Um sich im Zählen der Schritte nicht zu irren, kann man sich eines Schrittzählers (in Form einer Taschenuhr) bedienen. Die Längen krummer Linien und Wege werden oft auch mit einem eigenen, sich den Krümmungen anschlieſsenden Wegemesser gemessen, d. i. ein Rad von 2 bis $2^1/_2$ m im Umfange. Stand der Nullpunkt o unten und ist das Rad auf der krummen Linie so weit fortgeschoben, bis der Nullpunkt wiederum unten steht, so ist offenbar die Länge dieses durchlaufenen Stücks der krummen Linie gleich dem Umfange des Rades. In der Regel befindet sich an einem solchen Wegemesser eine Art Uhr, und man kann darnach, aus der Stellung der Zeiger, die Länge des vom Rade durchlaufenen Weges unmittelbar ablesen. Jeder Uhrmacher kann an einen Wagen, dessen Achsen in ihrer Nabe nicht zu viel Spielraum haben, einen solchen etwa 25 Mark kostenden Mechanismus leicht anbringen.

17.

Erklärungen. 1) Eine nach allen Richtungen hin begrenzte Fläche heiſst Figur. Dieselbe ist eine geradlinige oder krummlinige oder gemischtlinige, je nachdem sie von geraden oder krummen oder gemischten Linien begrenzt ist (z. B. Dreieck, Kreis, Halbkreis).

2) Der von den Grenzen einer Figur eingeschlossene Teil der (unendlichen) Ebene heiſst Inhalt oder Flächeninhalt.



3) Der Kreis ist eine ebene Figur, von einer krummen Linie so begrenzt, daſs alle ihre Punkte, wie A, G, H . . . von einem innerhalb liegenden Punkt C, den man Mittelpunkt oder Centrum nennt, gleich weit entfernt sind.

4) Die den Kreis begrenzende krumme Linie heiſst Kreis-Linie oder auch Peripherie (Umfang) und die davon eingeschlossene Fläche, Kreis oder Kreisfläche. „Kreis" wird wohl auch für „Kreislinie" gebraucht; aus dem Zusammenhange ergiebt sich aber alsdann, ob die Kreisfläche oder die Peripherie (Kreislinie) gemeint ist.

5) Jede vom Mittelpunkt C bis an die Peripherie gehende Linie, wie $\overline{CA}$, $\overline{CD}$, . . heiſst Radius oder auch Halbmesser.

6) S e h n e (Chorde) heiſst jede irgend zwei Punkte der Peripherie verbindende Gerade; z. B. $\overline{GH}$.

7) D u r c h m e s s e r (Diameter) heiſst die durch den Mittelpunkt gehende Sehne, z. B. $\overline{AB}$.

8) Es folgt aus dem Begriffe des Kreises, daſs alle Radien desselben einander gleich und ebenso, daſs alle Durchmesser einander gleich und jeder derselben doppelt so groſs als ein Radius ist.

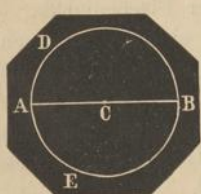
9) Jeder Teil der Kreislinie heiſst ein Bogen (Arcus); z. B. $\overset{\frown}{GH}$ oder arc GH.

Den Kreis kann man sich enstanden denken, indem der Radius $\overline{CA}$ desselben sich um den Mittelpunkt C dreht, alsdann beschreibt der Endpunkt A die in sich zurücklaufende Kreislinie.

18.

Erklärung. Wenn zwei Figuren so beschaffen sind, daſs, wenn man sie (in Gedanken) auf einander legt, sie genau mit einander zusammenfallen, so sagt man: s i e d e c k e n s i c h oder sie sind k o n g r u e n t. Figuren sind g l e i c h, wenn sie gleichen Flächeninhalt haben. So kann z. B. ein Kreis einem Dreieck gleich sein. Das Zeichen der Gleichheit (der gleichen Gröſse ist $=$, das Zeichen der Kongruenz (der Gleichheit nach Gröſse) und Gestalt) $\cong$. Es ist klar, daſs, wenn zwei Figuren sich genau decken (kongruent sind), sie dann notwendig auch vollkommen gleich sind. Der Nachweis der Deckung (Kongruenz) zweier Figuren wird häufig angewandt, um die Gleichheit derselben zu beweisen. Als Erläuterungsbeispiel möge folgender Satz dienen.

19.



Lehrsatz. E i n K r e i s w i r d d u r c h e i n e n b e l i e b i g g e z o g e n e n D u r c h m e s s e r AB h a l b i e r t, d. h. i n z w e i g l e i c h e H ä l f t e n g e t e i l t.

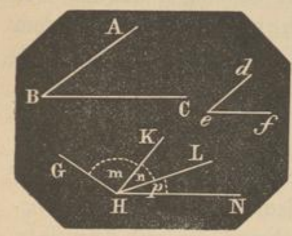
Beweis. Man d e n k e sich den obern Teil ADB aus der Bildebene herausgeschnitten, und (indem man ihn um den Durchmesser AB, wie um eine Achse gedreht denkt) auf den untern Teil AEB gelegt, so müssen, weil dem Begriffe des Kreises zufolge, alle Punkte der Peripherie gleich weit vom Mittelpunkt C entfernt sind, notwendig auch alle Punkte des obern Bogens ADB auf den untern AEB fallen, folglich decken sich beide Teile (Halbkreise), sind also kongruent und jeder die Hälfte des Ganzen.

Zweites Buch.

Von den Winkeln.

20.

Erklärung. Wenn von einem Punkte zwei gerade (unendliche) Linien (Strahlen) nach verschiedenen Richtungen ausgehen, so sagt man: sie seien gegen einander geneigt und bilden einen Winkel mit einander, und man versteht daher unter Winkel immer die Neigung zweier geraden Linien gegen einander.*) Die beiden, einen Winkel bildenden Linien, wie $\overline{BA}$, $\overline{BC}$, heifsen die Schenkel und der Punkt B, in welchem sie zusammenstofsen, der Scheitel (Spitze, Scheitelpunkt) des Winkels.



Einen Winkel nennt und bezeichnet man entweder blofs durch den am Scheitel stehenden Buchstaben, oder, wenn mehrere an einerlei Scheitel liegen und dadurch Verwechselung entstehen könnte, durch einen in die Öffnung der Schenkel gesetzten Buchstaben, oder auch durch drei Buchstaben, indem man den am Scheitel stehenden zwischen die an den Schenkeln stehenden schreibt. Als Winkelzeichen benutzt man $\angle$ oder $\sphericalangle$. Manche legen auch eine gebrochene Linie über die den Winkel bezeichnenden Buchstaben. So bedeutet z. B. „Winkel B", $\angle$ B, $\sphericalangle$ B, $\widehat{B}$, $\widehat{ABC}$, $\widehat{CBA}$ den Winkel bei B, ebenso: n, KHL, LHK den Winkel, den die beiden Linien $\overline{HK}$ und $\overline{HL}$ bilden.

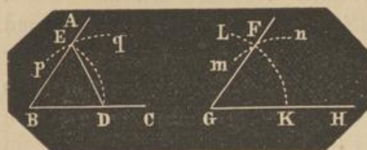
Die Gröfse eines Winkels hängt allein von der Neigung (Öffnung) seiner Schenkel ab, die Länge der Schenkel ist ganz gleichgültig. Denkt man den Winkel e so auf $\widehat{B}$ gelegt, dafs der Scheitel e auf B, der Schenkel ef in die Richtung BC kommt, und es fällt dann der Schenkel ed auf BA, so sind die Winkel B und e gleich grofs, obgleich ihre Schenkel verschiedene Länge haben.

---

*) Denkt man sich unter „Winkel" den Teil der (unendlichen) Ebene, der zwischen zwei von einem Punkte ausgehenden Strahlen enthalten ist, so läfst sich die Gleichheit der korrespondierenden Winkel streng beweisen (Paralleltheorie von Rich. Schurig).

Einen Winkel kann man sich durch Bewegung entstanden denken. Der Schenkel $\overline{BA}$ z. B. habe anfangs auf dem Schenkel BC gelegen, sich dann um den Scheitel B gedreht, so entsteht sogleich ein Winkel, der mit fortgesetzter Drehung immer gröſser wird.

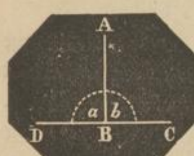
21.



Aufgabe. An die Linie GH im Punkte G einen Winkel zu tragen, der einem gegebenen Winkel B gleich ist.

Auflösung. Aus dem Scheitel B des gegebenen Winkels beschreibe man zwischen den Schenkeln desselben, mit einem beliebigen Radius BD einen Bogen DE, und mit demselben Radius BD aus dem neuen Scheitel G einen Bogen KL, denke die Sehne DE gezogen und beschreibe mit derselben als Radius aus K einen Bogen mn, der den Bogen KL in einem Punkte F schneidet, und ziehe dann nur die Linie GF, so ist der Winkel G = Winkel B. Denn denkt man sich die Winkel gehörig auf einander gelegt, so fallen die mit demselben Radius BD beschriebenen Bögen DE, KL und ebenso die mit demselben Radius DE beschriebenen Bögen pq, mn und, wie leicht einzusehen (wenn man die Bögen zu ganzen Kreisen vollendet denkt), auch deren Durchschnittspunkte E und F auf einander; die Winkel decken sich also und sind folglich gleich, $\angle G = \angle B$.

22.



Erklärungen. 1) Liegen die Schenkel eines Winkels in entgegengesetzter Richtung, bilden sie also eine einzige gerade Linie, so heiſst der Winkel ein gestreckter oder flacher; z. B. $\angle DBC$.

2) Der rechte Winkel ist die Hälfte des gestreckten. Ist also a die Hälfte des Winkels $\angle DBC$, so ist $\angle a$ ein Rechter. Den rechten Winkel bezeichnet man mit R. Die beiden Geraden, welche einen rechten Winkel bilden, stehen perpendikulär (senkrecht, lotrecht, normal, vertikal*)

*) „Vertikal" bedeutet ursprünglich die Richtung des freien Falles (s. § 11, Anmerkung).

auf einander. „AB steht senkrecht auf DC“ kürzt man durch „AB $\perp$ CD“ ab. B ist der Fufspunkt des Perpendikels (der Senkrechten) AB. Aus vorstehenden Erklärungen folgt, dafs in einem Punkt B der Linie DC nur ein Perpendikel AB möglich ist, und dafs daher alle rechte Winkel notwendig gleich sind (sich decken müssen).

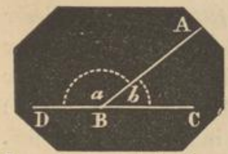
Man breche ein Stück Papier und dann nochmals, so dafs das eine Ende des ersten Bruches auf das andere fällt, so hat man einen rechten Winkel und zwei auf einander senkrechte Linien.

3) Winkel, die kleiner als ein gestreckter, also kleiner, als zwei Rechte sind, heifsen konkave (hohle oder ausspringende). Die konkaven Winkel sind entweder rechte oder spitze oder stumpfe. Spitz ist ein Winkel, wenn er kleiner ist als ein rechter, z. B. $\angle b$ in der Fig. zu § 23, stumpf, wenn er gröfser ist als ein rechter, z. B. $\angle a$ in der Fig. zu § 23. Zwei Linien, die einen spitzen oder stumpfen Winkel bilden, heifsen schräg oder schief gegen einander. Spitze und stumpfe Winkel nennt man daher auch schiefe.

4) Der konvexe (überstumpfe, erhabene, einspringende Winkel ist gröfser als ein gestreckter ($< 2\ R$).

5) Der Winkel, welcher durch eine volle Umdrehung entstanden ist, also $= 4\ R$ ist, heifst ein voller oder kompleter.

23.

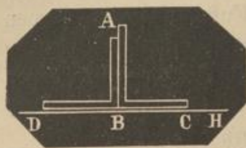


Erklärung. Zwei Winkel, welche einen Schenkel gemein haben und deren beiden andern Schenkel eine gerade Linie bilden, heifsen Nebenwinkel.

Von zwei Nebenwinkeln, a und b, kann man sich den einen entstanden denken, indem man den Schenkel des andern rückwärts verlängert. Anfänger müssen sich den Begriff Nebenwinkel genau merken. Bei zwei blofs an einander liegenden Winkeln, wie m und n in § 20, die auch einen Schenkel HK gemein haben, bilden die beiden äufsern Schenkel HG, HL keine gerade Linie, wie es bei Nebenwinkeln sein mufs.

Ein rechter Winkel ist also auch seinem Nebenwinkel gleich, und umgekehrt: Sind zwei Nebenwinkel einander gleich, so ist jeder ein Rechter.

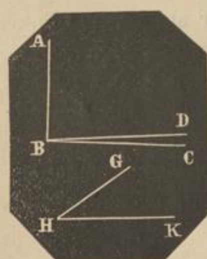
24.



Aufgabe. Zu untersuchen, ob die Schenkel eines sogenannten Winkelhakens (oder Dreiecks), dessen man sich bedient, um rechte Winkel zu zeichnen und Perpendikel zu ziehen, auch genau rechtwinklig auf einander stehen.

Auflösung. Man ziehe eine gerade Linie DH, lege an dieselbe den einen Schenkel BC des Winkelhakens und ziehe längs des andern AB eine gerade Linie. Wäre nun der Winkel ABC genau ein rechter, so müſste er seinem Nebenwinkel ABD gleich sein; ob er dies ist, würde sich gleich zeigen, indem man den Winkelhaken nur hineinpaſst.

25.



Winkelmaſs. So wie man, um Linien zu messen, verschiedene Längen-Einheiten (Meter, Centimeter, Millimeter) gebraucht, so ist man auch, um Winkel zu messen, über folgende drei Winkel-Einheiten übereingekommen.

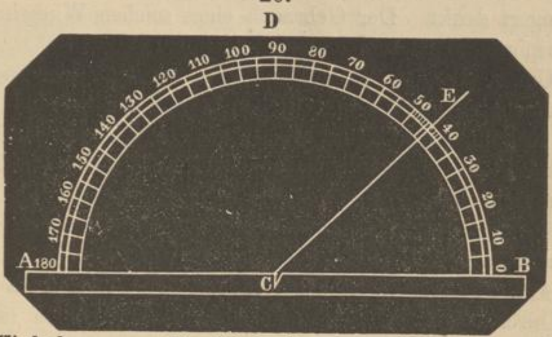
Man denkt sich den rechten Winkel in 90 kleinere gleiche Winkel geteilt, welche man Grade (^{0}) nennt. Sei $\angle DBC$ ein solcher, deren neunzig an einander liegend den rechten Winkel ABC genau ausfüllen, nämlich $\angle DBC = 1^0$, so ist dieser Winkel die gröſste Winkel-Einheit. Diese denkt man ferner in 60 gleiche (ihrer Kleinheit wegen aber auf dem Papier nicht darstellbare) Winkel geteilt, welche man Minuten ($'$) nennt, so daſs also 1 Grad = 60 Minuten, in Zeichen $1^0 = 60'$. Den Winkel von einer Minute denkt man sich wiederum in 60 gleiche Winkel geteilt, welche Sekunden ($''$) heiſsen, so daſs also $1' = 60''$. Hiernach ist also der rechte Winkel nämlich:

$$R = 90^0 = 5400' = 324\,000''.$$

Es genügt hier, sich diese weit gehende Teilung des rechten Winkels nur in Gedanken vorzustellen. Gehörigen Orts kann man sich überzeugen, daſs es einem geschickten Mechanikus mittelst einer Teilmaschine und einer künstlichen Vorrichtung (Mikrometer, Nonius) möglich ist, diese feine Teilung zu bewirken und einen Winkelmesser herzustellen, mit dem man, bei gehöriger Handhabung desselben, die Winkel bis auf die Sekunde genau messen kann.

Gesetzt nun, es sei in dem Winkel H die erste Einheit, nämlich 1 Grad, 36 mal, in dem überschüssigen Teil die zweite Winkel-Einheit, nämlich 1 Minute, 40 mal, und in dem jetzt noch übrig bleibenden Teil des Winkels H die dritte Einheit, nämlich eine Sekunde, noch 20 mal enthalten, so betrüge die Gröſse des Winkels H, 36 Grad 40 Minuten und 20 Sekunden, oder kürzer in Zeichen: $\angle H = 36^0\ 40'\ 20''$.

26.



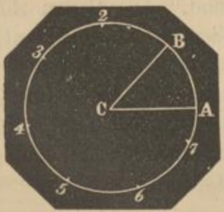
Winkelmesser. Der Kreis dient uns nicht allein als Hilfslinie, um Winkel zu zeichnen, sondern gehörig dazu eingerichtet, auch als Instrument, vermittelst dessen man einen Winkel messen und seine Gröſse in Graden, Minuten und Sekunden angeben kann.

Man denke sich den Durchmesser AB eines Kreises gezogen, wodurch derselbe halbiert ist (§ 19). Auf dem Durchmesser denke man sich im Mittelpunkt C das Perpendikel DC errichtet, so teilt dieses den Halbkreis wieder in zwei gleiche Teile arc $AD =$ arc DB; denn denkt man sich die beiden rechten Winkel ACD und DCB zur Deckung gebracht, so müssen sich auch die Bögen AD und DB decken, weil alle ihre Punkte gleich weit vom Mittelpunkt entfernt sind. Die Bögen AD und DB sind also gleich und jeder ein Viertelkreis (Quadrant). Denkt man sich nun jeden der beiden rechten Winkel in 90 gleiche Winkel (Winkelgrade) geteilt, so würden die Teilungslinien offenbar auch jeden der beiden Viertelkreise in 90, mithin den Halbkreis in 180 gleiche Bögen (Bogengrade) teilen (§ 18). Würde nun umgekehrt der Halbkreis erst in 180 gleiche Bögen geteilt (welches einem geschickten Mechanismus mittelst einer Teilmaschine desto leichter sein muſs, je gröſser der Halbkreis ist, weil dann die Teilpunkte weiter auseinander liegen und deutlicher hervortreten) und dann von diesen Teilpunkten nach dem Mittelpunkte C gerade Linien gezogen, so wären dadurch 180 an einander liegende gleiche Winkel-Grade versinnlicht.

In manchem Besteck findet sich ein solcher eingeteilter metallener Halbkreis, oder vielmehr nur dessen ausgeschnittener Rand, wo man sich dann die Teilstriche bis zum Mittelpunkt verlängert denkt. Der Gebrauch eines solchen Winkelmessers (Transporteurs) ist nun einfach folgender:

Um z. B. den Winkel ECB zu messen, lege man das Instrument so: daſs sein Mittelpunkt auf den Scheitel C und sein Nullpunkt auf einen Schenkel CB des zu messenden Winkels fällt, alsdann sehe man zu, wie viele Grade der andere Schenkel CE abschneidet, indem man halbe bis viertel Grade nach dem Augenmaſs schätzt. Nach Andeutung der Figur wäre z. B. Winkel $ECB = 43^0\ 50'$.

Anmerkung. Dieser eben beschriebene, etwa 6 bis 15 cm im Durchmesser haltende und nur bis auf Grade (seltener halbe Grade) geteilte Winkelmesser wird nur gebraucht, um Winkel in Zeichnungen oder Rissen zu messen und aufzutragen und gewährt für solche Zwecke eine hinreichende Genauigkeit. Die § 25 erwähnten, besonders für die Geodäsie und Astronomie erforderlichen feineren Winkelmesser sind ganze Kreise von 40 cm bis 1 m und darüber im Durchmesser mit einem um den Mittelpunkt drehbaren Fernrohr. Die Teilstriche sind hier so fein, daſs man sie nur mit einem Vergröſserungsglase deutlich sehen und ablesen kann. Nach den hohen Preisen derselben, von 300 bis zu 10 000 Mark und darüber, kann man mutmaſsen, welche Geduld und Geschicklichkeit die Verfertigung solcher Instrumente erfordert.

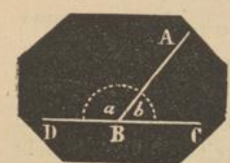


27.

Aufgabe. Die Anzahl Grade und Minuten, welche ein beliebig gegebener Winkel C enthält, bloſs mit Hilfe eines Zirkels und wenigstens eben so genau zu bestimmen, als es mit den gewöhnlichen Winkelmessern möglich ist.

Auflösung. Mit einem möglichst grofsen Radius CA beschreibe man zwischen den Schenkeln des gegebenen Winkels C einen Bogen AB, den man zu einem ganzen Kreise vollendet. Hierauf untersuche man, wie oft der Bogen AB (indem man dessen Sehne $\overline{AB}$ in den Zirkel nimmt) in der ganzen Peripherie enthalten ist, und dividiere mit der gefundenen Zahl in 360^0. Wäre z. B. arc AB $7^1/_2$ mal in der ganzen Peripherie enthalten, so wäre $\angle C = \frac{360^0}{7^1/_2} = 48^0$.

28.



Lehrsatz. Zwei Nebenwinkel betragen zusammen zwei rechte Winkel. In Zeichen:

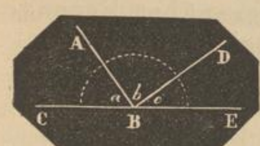
$$a + b = 2\ R = 180^0.$$

Beweis. Denkt man sich aus dem gemeinschaftlichen Scheitel B einen in 180^0 geteilten Halbkreis beschrieben, oder den Winkelmesser angelegt, so ist klar, dafs die beiden Nebenwinkel a und b ihn ganz ausfüllen, und dafs der eine Nebenwinkel a gerade so viel über 90^0 hat, als dem andern b daran fehlen. Dasselbe folgt auch, wenn man in B ein Perpendikel auf DC errichtet denkt.

Aufgabe. Es sei der Winkel $b = 52^0\ 37'\ 49''$. Wie grofs ist der Winkel a?

Antwort. Es ist $\angle a = 127^0\ 22'\ 11''$.

29.



Lehrsatz. Alle Winkel, welche an einerlei Seite einer geraden Linie liegen und einen Scheitel in derselben gemein haben, betragen zusammen zwei rechte Winkel. In Zeichen:

$$a + b + c = 2\ R = 180^0.$$

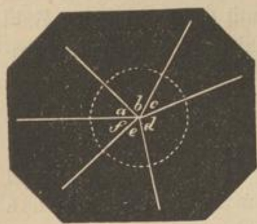
Beweis. Man denke sich wieder im gemeinschaftlichen Scheitel B ein Perpendikel auf CE errichtet (oder den Winkelmesser angelegt), so werden die entstehenden beiden rechten Winkel durch die andern ganz ausgefüllt; letztere haben also zusammen eben so viele Grade, als zwei rechte Winkel.

Aufgabe 1. Es sei $\angle a = 50^0\ 16'\ 20''$; $\angle c = 30^0\ 10'\ 10''$; wie grofs ist $\angle b$?

Aufgabe 2. Es sei $\angle a = 72^0\ 50'\ 6''$; $\angle b = 86^0\ 21'\ 18''$; wie viel mal so grofs ist $\angle a$ als $\angle c$?

Antwort. 1) $\angle b = 99^0\ 33'\ 30''$; 2) $3^1/_2$ mal.

30.



Lehrsatz. Alle Winkel, welche rings um einen gemeinschaftlichen Scheitelpunkt liegen, betragen zusammen immer vier Rechte. In Zeichen:

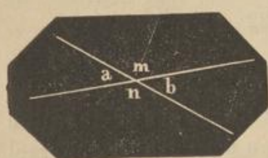
$a + b + c + d + e + f = 4\,R = 360^0$.

Beweis. Man denke sich durch den gemeinschaftlichen Scheitel eine gerade Linie gezogen, so betragen die Winkel an jeder Seite derselben 2 R, mithin an beiden Seiten zusammen 4 R. Die Richtigkeit des Satzes ergiebt sich auch, indem man den Mittelpunkt eines in 360^0 geteilten Kreises auf den gemeinschaftlichen Scheitel gelegt denkt.

Aufgabe. Es sei $a = 50^0\ 25'\ 2''$, $b = 68^0\ 0'\ 12''$, $c = 29^0\ 40'\ 48''$, $d = 120^0\ 57'\ 0''$, $e = 60^0\ 9'\ 54''$; wie grofs ist der Winkel f?

Antwort. Es ist $\angle f = 30^0\ 47'\ 4''$.

31.



Lehrsatz. Wenn zwei gerade Linien sich schneiden, so sind je zwei gegenüber liegende Winkel, welche man Scheitelwinkel nennt, einander gleich.

In Zeichen: $a = b$

$m = n$

Beweis. Die Winkel a und m sind zwei Nebenwinkel und betragen zusammen zwei Rechte (§ 28); eben so sind b und m zwei Nebenwinkel und betragen zusammen auch zwei rechte Winkel. Da es nun einerlei ist, ob man a oder b zu m legt, indem in beiden Fällen die Summe gleich zweien Rechten ist, so ist notwendig auch $a = b$. Eben so ist es einerlei, ob man m oder n zu a addiert, mithin auch der Winkel m seinem Scheitelwinkel n gleich. Wäre z. B. $\angle a = 60^0$, so wäre jeder seiner Nebenwinkel m und n, $= 120^0$ und $b = 60^0$.

Drittes Buch.

Von der Kongruenz der Dreiecke.

32.

Zur Bildung einer geradlinigen Figur sind mindestens drei Gerade erforderlich. Diese begrenzenden Geraden werden Seiten, die Summe der Seiten: Umfang (Perimeter), und der vom Umfange eingeschlossene Teil der Ebene: Inhalt der Figur genannt. Die Punkte, in welchen 2 Seiten zusammenstofsen, heifsen Ecken, die also zugleich die Scheitel der Winkel der Figur sind. Nach der Zahl der Seiten (oder Ecken) teilt man die Figuren ein in Dreiecke, Vierecke und Vielecke (Polygone).

Das Dreieck ist offenbar das einfachste unter allen geradlinigen Figuren, zugleich aber auch die wichtigste, weil alle Vielecke in Dreiecke zerlegt werden können. Deshalb mufs man auch alle Lehrsätze über das Dreieck nicht allein gut verstehen, sondern auch gut inne haben. Überhaupt hängt, wie man schon in den beiden vorhergehenden Büchern gemerkt haben wird, die Leichtigkeit und Gewandtheit in den Anwendungen der Geometrie und rasches Fortschreiten in derselben von der leichten und schnellen Erinnerung ihrer Lehrsätze ab.

33.

Erklärungen. 1) Die Seite des Dreiecks, auf welcher man sich dasselbe ruhend denkt, wird Grundlinie oder Basis genannt. Die beiden andern Seiten nennt man Schenkel des Dreiecks oder Scheitelseiten. Die der Grundlinie gegenüberliegende Ecke heifst Spitze des Dreiecks. „Dreieck“ kürzt man durch $\triangle$ ab.

2) Dem Verhältnis seiner Seiten nach ist das Dreieck:

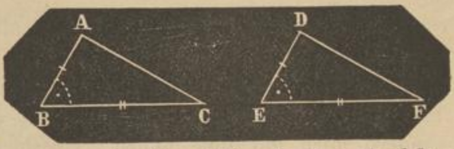
a) ungleichseitig, wenn alle drei Seiten ungleich sind;

b) gleichseitig, wenn alle Seiten gleich sind;
c) gleichschenklig, wenn es nur zwei gleiche Seiten hat. Diese heifsen dann die Schenkel und die dritte Seite Grundlinie.

3) Der Beschaffenheit der Winkel nach ist das Dreieck:
a) spitzwinklig, wenn alle drei Winkel spitz sind;
b) stumpfwinklig, wenn es einen stumpfen Winkel hat;
c) rechtwinklig, wenn es einen rechten Winkel hat. Im rechtwinkligen Dreieck heifsen die beiden rechtwinklig auf einander stehenden Seiten die Katheten (Senkrechte) und die dem rechten Winkel gegenüber liegende Seite: Hypotenuse.

Unter den sechs Bestandteilen eines jeden Dreiecks (drei Seiten und drei Winkel) giebt es immer drei von einander unabhängige Stücke, durch deren Gröfse das ganze Dreieck, also auch die übrigen drei Stücke vollkommen bestimmt sind. Diese drei aus den „vier Kongruenzsätzen" erforderlichen Bestimmungsstücke, welche man sich ganz besonders merken mufs, werden nun die folgenden Paragraphen kennen lehren.

34.



1. Kongruenzsatz. Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie zwei Seiten und den von denselben eingeschlossenen Winkel wechselweise gleich haben.

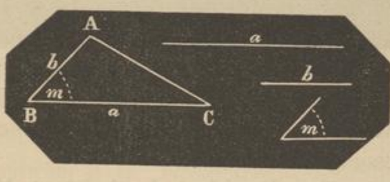
Beweis. Angenommen, es seien für die beiden Dreiecke ABC und DEF die im Lehrsatz erwähnten drei gleichen Stücke beziehlich folgende: Die Seite BC im ersten Dreieck sei = der Seite EF im andern Dreieck, ferner Seite AB = Seite DE und der von den beiden Seiten AB, BC eingeschlossene Winkel B gleich dem von den beiden Seiten DE, EF gebildeten Winkel E.

Man denke sich nun das eine Dreieck DEF aus der Bildebene herausgenommen und übereinstimmend, nämlich so auf das andere Dreieck ABC gelegt, dafs die gleich grofs vorausgesetzten Winkel B und E mit ihren ebenfalls gleich grofs vorausgesetzten Schenkeln sich decken, so dafs also

E auf B, F auf C und D auf A fällt. Notwendig muſs dann auch (§ 3) die Seite DF die Seite AC, Winkel D den Winkel A, und Winkel F den Winkel C decken und folglich auch, wie der Lehrsatz behauptet, $\triangle\ ABC \cong \triangle\ DEF$ sein. (Lies: $\triangle\ ABC$ kongruent $\triangle\ DEF$; s. § 18).

Anmerkung. In kongruenten Dreiecken liegen gleiche Winkel gleichen Seiten und umgekehrt, gleiche Seiten gleichen Winkeln gegenüber Hiernach findet man aus Dreiecken, die kongruent sind, auch leicht die beziehlich gleichen Stücke heraus.

35.



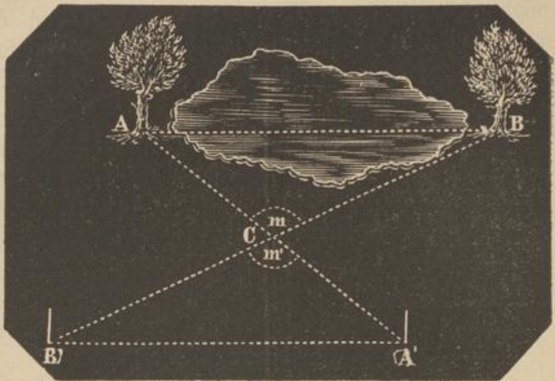
Aufgabe. Es sind zwei Seiten a und b eines Dreiecks und der davon eingeschlossene Winkel m gegeben. Es soll das dadurch bestimmte Dreieck konstruiert werden.

Auflösung. Man nehme eine der beiden gegebenen Seiten (a) in den Zirkel und stecke sie in BC ab, trage an das eine Ende B dieser Linie den gegebenen Winkel m (§ 21), mache den andern Schenkel BA so lang, als die andere Linie b ist und ziehe dann die Linie AC, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Anmerkung. Hätte man auch den gegebenen Winkel m statt in B, in C, oberhalb oder unterhalb BC angetragen, so würde man doch immer dasselbe Dreieck, nur in anderer Lage erhalten haben. Anfänger werden wohl thun, diese beiden Konstruktionen noch zu machen.

Statt also zu sagen: zwei (alle) Dreiecke sind kongruent, wenn sie zwei Seiten und den zwischenliegenden Winkel gleich haben, hätte man auch sagen können: ein Dreieck ist bestimmt durch zwei Seiten und den zwischen liegenden Winkel. Die im Lehrsatz beibehaltene frühere Redeform ist aber für den ersten Unterricht besser.

36.



Aufgabe. Durch Anwendung des vorhergehenden Lehrsatzes die Entfernung zweier Punkte A, B auf dem Felde zu bestimmen, wenn ein zwischenliegendes Hindernis die unmittelbare Messung nicht erlaubt.

Auflösung. Man bezeichne durch einen Meſsstab noch einen dritten Punkt C, von dem man ungehindert mit der Kette nach A und B messen kann. Messe die Linien AC und BC und trage ihre Längen geradlinig nach A' und B' fort, so daſs $A'C = AC$ und $B'C = BC$ wird; messe hierauf nur die Linie $A'B'$, so giebt diese die gesuchte Länge von $\overline{AB}$. Wäre z. B. $\overline{A'B'} = 400$ m gemessen, so wäre auch $\overline{AB} = 400$ m.

Beweis. Die beiden Dreiecke $A'B'C$ und ABC sind kongruent, weil sie zufolge Konstruktion zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel gleich haben, nämlich: $A'C = AC$, $B'C = BC$ (gleich gemacht) und $m' = m$ (als Scheitelwinkel, § 31). Stellt man sich vor, das untere Dreieck drehe sich um den Punkt C herum, bis A' auf A fällt, so muſs dann B' auf B, mithin $A'B'$ auf AB fallen.

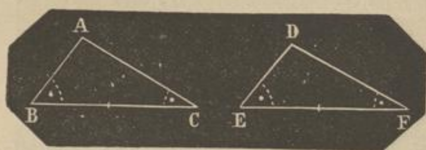
37.

2. Kongruenzsatz. Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie eine Seite und zwei entsprechende (in Bezug auf die Seite gleichliegende) Winkel gleich haben. Hier sind zwei Fälle zu unterscheiden:

I. Die Dreiecke haben eine Seite und die beiden anliegenden Winkel beziehlich gleich.

In Zeichen:

Es sei	so ist:	
$\overline{BC} = \overline{EF}$	$\overline{AB} = \overline{DE}$	
$\angle B = \angle E$	$\overline{AC} = \overline{DF}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF.$
$\angle C = \angle F$	$\angle A = \angle D$	

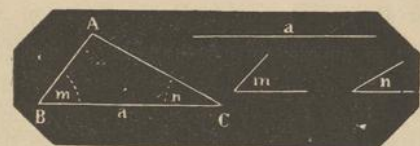


Beweis. Man denke sich das eine Dreieck DEF so auf das andere ABC gelegt, daſs die als gleich vorausgesetzten Seiten und Winkel sich decken, also erstlich $\overline{EF}$ auf $\overline{BC}$ fällt, alsdann muſs, weil $\angle E = \angle B$ und $\angle F = \angle C$, der Punkt D notwendig sowohl in die Richtung $\overline{BA}$, als in die Richtung $\overline{CA}$ fallen. Soll aber ein Punkt D (der keine Ausdehnung hat) in zwei verschiedene Richtungen $\overline{BA}$, $\overline{CA}$ zugleich fallen, so liegt er notwendig in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt A. Die Dreiecke decken sich also und es ist, wie im Lehrsatz behauptet, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

II. Die Dreiecke haben eine Seite, einen anliegenden und einen gegenüberliegenden Winkel gleich.

Dieser Fall findet in § 65 Berücksichtigung.

38.

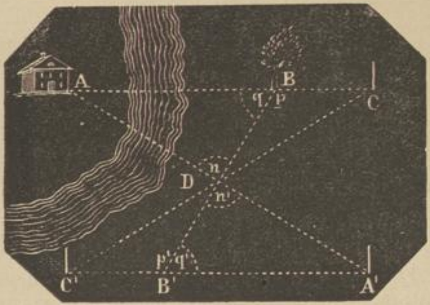


Aufgabe. Es sind eine Seite a und die beiden anliegenden Winkel m und n gegeben; es soll das durch diese drei Stücke bestimmte Dreieck konstruiert werden.

Auflösung. Man stecke die Linie a in $\overline{BC}$ ab, trage daran in B den Winkel m, in C den Winkel n, und verlängere die Sckenkel dieser angetragenen Winkel bis zu ihrem Durchschnittspunkt A, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Anmerkung. Hätte man $\angle n$ bei B und $\angle m$ bei C oder beide Winkel unterhalb BC angetragen, so hätte man doch dasselbe Dreieck, nur in anderer Lage, erhalten.

39.



Aufgabe. Mittelst des vorhergehenden Lehrsatzes die Entfernung zweier Punkte A und B zu bestimmen, wenn nur der eine Punkt B zugänglich ist.

Auflösung. Man stecke erst in C einen Meſsstab, der mit A, B in einerlei Richtung ist; dann stecke man einen Meſsstab in D, messe die Linien BD, CD und trage ihre Längen geradlinig nach B' und C' hinaus, so daſs $B'D = BD$, und $C'D = CD$ wird. Jetzt gehe man in der, durch die bezeichneten Punkte C', B' bestimmten Richtung rückwärts fort, bis man an einen Punkt A' kommt, der zugleich auch mit A, D in einerlei Richtung liegt, messe dann nur die Linie $A'B'$, so giebt diese die gesuchte Entfernung von A bis B.

Beweis. Um zu zeigen, daſs zufolge der Konstruktion notwendig $AB = A'B'$ sein muſs, bemerke man zuerst, daſs $\triangle\ B'C'D \cong \triangle\ BCD$ (§ 34) und daſs hieraus die Gleichheit der Winkel p und p' folgt (§ 34, Anmerkung). Ferner sind nun auch die Dreiecke ABD und $A'B'D$ kongruent, weil sie eine Seite und die beiden anliegenden Winkel beziehlich gleich haben, nämlich: $BD = B'D$ (gleich gemacht), $\angle n = \angle n'$ (als Scheitelwinkel, § 31) und $\angle q = \angle q'$ (als Nebenwinkel von $\angle p$ und $\angle p'$); denn wenn zwei Winkel p und p' gleich sind, so müssen auch ihre Nebenwinkel q und q' gleich sein (§ 28) Daher $\triangle\ ABD \cong \triangle\ A'B'D$ (§ 37) und hieraus: $AB = A'B$ (§ 34, Anmerkung).

40.

Lehrsatz. In jedem gleichschenkligen Dreieck sind die Winkel an der Grundlinie gleich.

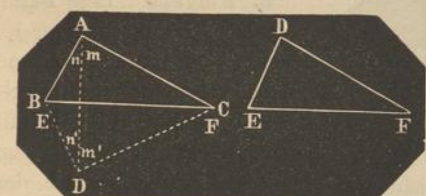
In Zeichen:

Wenn:	so ist auch:
AB = AC	∠ B = ∠ C.

Beweis. Man kann sich den Winkel *BAC* an der Spitze durch die Linie *AD* halbiert denken, so daſs $\angle n = \angle n'$; alsdann würden aber die beiden Dreiecke *ABD* und *ACD* kongruent sein wegen zwei beziehlich gleicher Seiten und des zwischen liegenden gleichen Winkels, nämlich: $AB = AC$, nach Voraussetzung; $\angle n = \angle n' = \frac{1}{2} \angle BAC$ und $AD = AD$; folglich (§ 34) $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ und hieraus (§ 34, Anmerkung) $\angle B = \angle C$.

Zusatz. Sind umgekehrt in einem Dreiecke zwei Winkel gleich, $\angle B = \angle C$, so sind notwendig auch die ihnen gegenüber liegenden Seiten gleich, $AB = AC$, und das Dreieck ist ein gleichschenkliges. Denn dächte man sich in der Mitte *D* ein Perpendikel auf *BC* errichtet, so müssen nach § 37 zwei kongruente Dreiecke entstehen ($BD = DC$, $\angle B = \angle C$, $\angle D = \angle D$), mithin die beiden andern Seiten dies Perpendikel in einem gemeinschaftlichen Punkt *A* schneiden, und folglich $AB = AC$ sein.

41.



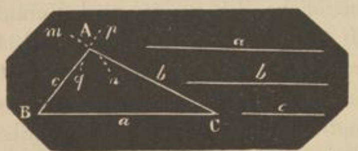
3. Kongruenzsatz. Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie alle drei Seiten beziehlich gleich haben.

In Zeichen:

Wenn:	so ist:	daher:
AB = DE	∠ A = ∠ D	
AC = DF	∠ B = ∠ E	△ ABC ≅ △ DEF.
BC = EF	∠ C = ∠ F	

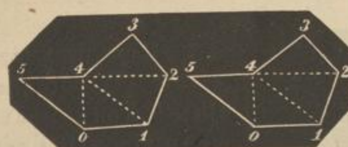
Beweis. Man denke sich das eine Dreieck *DEF* in umgekehrter Lage so an das andere Dreieck *ABC* gelegt, daſs Seite *EF* die als gleich vorausgesetzte Seite *BC* deckt. Denkt man sich nun in den Dreiecken links die Linie AD gezogen, so ist das Dreieck ABD gleichschenklig, weil nach Voraussetzung $AB = DE$ und daher die Winkel an der Grundlinie AD einander gleich, nämlich $\angle n = \angle n'$ (§ 40). Aus demselben Grunde ist auch Dreieck ACD gleichschenklig und deshalb auch $\angle m = \angle m'$. Die Summe der beiden Winkel m und n ist also gleich der Summe der beiden andern Winkel m' und n', daher ist auch $\angle BAC = \angle DEF$. Das Übrige folgt nun aus § 34, weil beide Dreiecke jetzt zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel beziehlich gleich haben.

42.



1. Aufgabe. Es sind alle drei Seiten a, b, c eines Dreiecks gegeben, es soll das dadurch bestimmte Dreieck gezeichnet werden.

Auflösung. Man stecke eine der gegebenen Seiten, z. B. a in BC ab, beschreibe aus dem einen Endpunkt B mit der Seite c, als Radius, einen Bogen mn, ebenso aus C mit der Seite b, als Radius, einen zweiten Bogen pq, und ziehe von dem Durchschnittspunkt A beider Bögen Gerade nach B und C, so ist ABC das verlangte Dreieck. Vergleiche § 35, Anmerkung.



2. Aufgabe. Eine Figur abzuzeichnen (abzutragen).

Auflösung. Man bezeichne die Winkelpunkte nach einerlei Folge herum mit Ziffern, teile die Figur durch Diagonalen (d. h. solche Linien, welche irgend zwei nicht auf einander folgende Punkte der Figur verbinden) in lauter Dreiecke und zeichne dann diese an einander hängenden Dreiecke ab.

Anmerkung. Die erwähnten Diagonalen brauchen nicht wrklich gezogen, sondern nur gedacht zu werden.

Genauer wird die Kopie, wenn man mit einer und derselben Grundlinie oder Diagonale alle übrigen Punkte des Originals zu Dreieckspunkten verbunden denkt.

Sind krumme Linien abzuzeichnen, so kann man die

Lage der wichtigsten Punkte, je mehr, je genauer, einzeln bestimmen und sie durch freie Handzeichnung verbinden.

Dieses Verfahren, eine Figur abzuzeichnen, ist, obwohl theoretisch richtig, doch nur dann praktisch brauchbar, wenn die Figur nur wenige und lauter gerade Seiten hat.

Aufser andern Methoden, welche in der Zeichenkunst gelehrt werden, bedient man sich auch, um Karten und Pläne abzuzeichnen, mit grofsem Vorteil eines unter dem Namen Pantograph bekannten, aber sehr teuern Instruments (300 Mark), welches nicht mit dem sogenannten Storchschnabel zu verwechseln ist, obgleich er auf demselben Prinzip beruht. (Vergleiche § 124, 3.)

43.

4. (und letzter) Kongruenzsatz. Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie 2 Seiten und den der gröfseren dieser beiden Seiten gegenüberliegenden Winkel gleich haben.

In Zeichen (s. Fig. zu § 41):

Wenn	so ist	daher
$BC = EF$	$AC = DF$	$\triangle\ ABC \cong DEF.$
$AB = DE$		
BC gröfser als AB		
$\angle A = \angle D$		

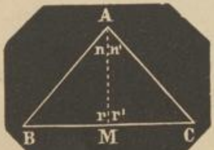
Beweis. Man denke sich das $\triangle\ DEF$ in umgekehrter Lage so an $\triangle\ ABC$ gelegt, dafs sich die gleichen Seiten EF und BC decken. Denkt man sich nun in den Dreiecken links die Linie AD gezogen, so ist $\triangle\ ABD$, wegen $AB = ED$, gleichschenklig, daher nach § 40: $\angle n = \angle n'$. Da aber nach Voraussetzung $\angle A = \angle D$, so mufs nun auch $\angle A - \angle n = \angle D - \angle n'$ d. i. $\angle m = \angle m'$ sein, folglich ist auch $\triangle\ ACD$ ein gleichschenkliges (s. § 40, Zusatz), daher $AC = CD$ d. i. $AC = DE$. Da nun alle 3 Seiten des Dreiecks DEF gleich den 3 Seiten des Dreiecks ABC, so sind beide Dreiecke nach § 41 kongruent.

Anmerkung. Dreiecke sind nicht unbedingt kongruent, wenn sie zwei Seiten und den der kleinern Seite gegenüberliegenden Winkel gleich haben (s. § 56, 2. Aufgabe).

Viertes Buch.

Von den Perpendikeln.

44.



Lehrsatz. Die von der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks nach der Mitte der Grundlinie gehende Linie steht senkrecht auf der Grundlinie und halbiert den Winkel an der Spitze.

In Zeichen:

Wenn:	so ist:
AB = AC	$\angle r = \angle r' = 90^0$
und BM = MC	$\angle n = \angle n'$.

Beweis. Die beiden Dreiecke ABM und ACM sind kongruent, weil sie alle drei Seiten wechselweise gleich haben; denn die Seite AM ist beiden gemein, und nach Voraussetzung ist $AB = AC$ und $BM = MC$, daher (§ 41) $\triangle ABM \cong \triangle ACM$ und hieraus (§ 34, Anmerkung) $n = n'$ und $r = r'$.

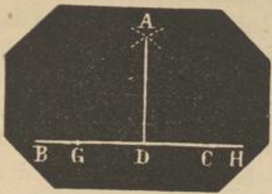
Weil nun aber die beiden gleichen Winkel r und r' zugleich auch Nebenwinkel sind, so ist jeder ein rechter Winkel und folglich AM perpendikulär auf BC. (§ 23).

45.

Aufgabe. Auf einer Linie BH in einem bestimmten Punkt D eine Senkrechte zu errichten.*)

---

*) Wer den vorhergehenden Lehrsatz gut verstanden und über die Lösung der hier gestellten Aufgabe, als eine sehr einfache Anwendung des Lehrsatzes, gehörig nachgedacht hat, wird sie ohne Anleitung finden.

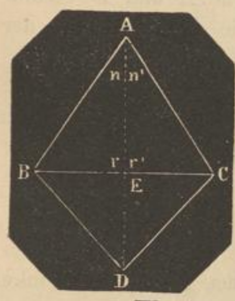


Auflösung. Man schneide von D aus erst rechts und links zwei gleiche Stücke ab, $DC = DG$. Beschreibe jetzt aus C und G mit einerlei Radius zwei sich schneidende Bögen und verbinde deren Durchschnittspunkt A mit D, so ist AD das verlangte Perpendikel.

Beweis. Denkt man noch AG und AC gezogen, so ist, zufolge Konstruktion, AGC ein gleichschenkliges Dreieck und D die Mitte der Grundlinie, folglich (§ 44) AD auf GC senkrecht.

Zusatz. Auf gleiche Weise kann man auf dem Felde auf einer ausgesteckten Linie BC in D eine Senkrechte errichten, indem man von D aus, zu beiden Seiten gleiche Stücke $DC = DG$ abmifst, in den Punkten C und G die Enden einer Schnur (Kette) befestigt und sie dann, in der Mitte A fassend, straff anspannt, bis sie mit GC ein gleichschenkliges Dreieck bildet, dessen Spitze A dann notwendig in der auf GC in D zu errichtenden Senkrechten liegt.

46.



Lehrsatz. Die Linie, welche durch die Spitzen zweier gleichschenkligen Dreiecke von gemeinschaftlichen Grund-Linie geht, halbiert 1) die Winkel an den Spitzen, 2) halbiert die Grund-Linie und steht 3) senkrecht auf derselben.

In Zeichen:

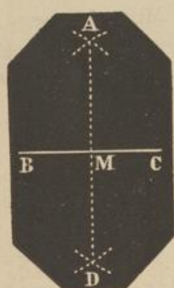
Wenn:	so ist:
$AB = AC$	1) $\angle n = \angle n' = \frac{1}{2} \angle BAC$
$DB = DC$	2) $BE = EC$
	3) $\angle r = \angle r' = 90^\circ$.

Beweis. Die beiden Dreiecke ABD und ACD sind kongruent, weil sie alle drei Seiten wechselweise gleich haben, nämlich die Seite AD ist beiden gemein und dann, zufolge Voraussetzung, $AB = AC$ und $DB = DC$, folglich (§ 41) $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ und hieraus (§ 34, Anmerkung) $\angle n = \angle n'$.

Jetzt ist es leicht zu beweisen, daſs auch die Dreiecke ABE und ACE kongruent sind; denn sie haben zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel wechselweise gleich, nämlich: die Seite AE ist beiden gemein; nach Voraussetzung ist $AB = AC$ und, wie eben bewiesen, ist $\angle n = \angle n'$, daher (§ 34) $\triangle ABE \cong \triangle ACE$, und hieraus (nach § 34, Anmerkung) $BE = EC$ und $\angle r = \angle r'$. Weil aber die beiden Winkel r und r' zugleich auch Nebenwinkel sind, so ist jeder ein Rechter und folglich steht AD senkrecht auf BC. (§ 23.)

Anmerkung. Satz und Beweis bleiben dieselben, wenn die beiden gleichschenkligen Dreiecke, statt wie hier, an verschiedenen Seiten, über einerlei Seite der gemeinschaftlichen Grundlinie liegen.

47.

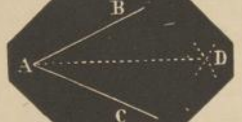


Aufgabe. Eine gegebene Linie BC zu halbieren (die Mitte zu bezeichnen).

Auflösung. Man sehe zuvor § 45, Randanmerkung — beschreibe über BC die Spitzen A und D zweier gleichschenkligen Dreiecke, so muſs die Linie, welche A und D verbindet, die gegebene Linie BC gerade in der Mitte M treffen. (§ 46.)

Zusatz. Dieselbe Konstruktion findet statt, wenn auf einer Linie BC in der Mitte ein Perpendikel errichtet werden soll.

48.



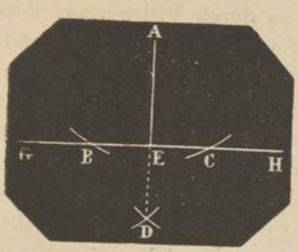
Aufgabe. Einen gegebenen Winkel A zu halbieren.

Auflösung. Siehe § 45, Randanmerkung. Vom Scheitel A aus schneide man auf beiden Schenkeln gleiche Stücke $AB = AC$ ab. Aus B und C beschreibe man mit einerlei Radius zwei sich schneidende Bögen, ziehe von deren Durchschnittspunkt D nach A; so ist der Winkel A halbiert, $\angle BAD = \angle CAD$. Der Beweis ist ganz wie in § 46, indem man die Linien BD und CD gezogen denkt.

Durch fortgesetztes Halbieren kann man also auch einen Winkel in 4, 8, 16, 32 ... gleiche Teile teilen.*)

Zusatz. Auf dieselbe Weise kann man mittelst der Mefskette (Schnur) einen Winkel auf dem Felde halbieren.

49.



Aufgabe. Von einem aufserhalb einer Linie GH gegebenen Punkt A eine Senkrechte auf dieselbe zu fällen.

Auflösung. Mit einem Radius, der über die Linie GH hinausreicht, beschreibe man aus A einen Bogen, welcher die (nötigenfalls verlängerte) Linie GH in zwei Punkten, B und C, schneidet. Aus diesen, von A gleich weit entfernten Punkten B und C beschreibe man dann mit einerlei Radius zwei sich schneidende Bögen, und verbinde deren Durchschnittspunkt D mit A, so ist AE auf GH senkrecht.

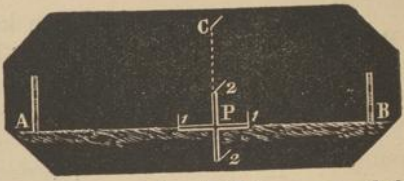
Beweis. Denkt man sich die Linien $AB = AC$ und $DB = DC$ gezogen, so ist der Beweis wie in § 46.

Zusatz 1. Um auf dem Felde von einem Punkt A auf eine nicht zu weit davon entfernte Linie GH ein Perpendikel zu fällen, befestige man das eine Ende einer Schnur (Kette) in A, ziehe sie straff an, so dafs das andere Ende links und rechts an die Linie GA reicht, und darin zwei von A gleich weit entfernte Punkte B und C bezeichnen kann, halbiere darauf die Linie BC in E, so liegt E in der verlangten Senkrechten (§ 44).

Zusatz 2. Zur Konstruierung der Perpendikel auf dem Felde bedient man sich bequemer eines sogenannten Winkelkreuzes, bestehend aus zwei auf einen Stab (Stativ) befestigten gegen einander senkrechten Linealen,**) an deren Enden, um

*) Die Aufgabe, einen beliebigen Winkel in 3 gleiche Teile zu teilen, ist zwar nur mit Hilfe der Parabel möglich, dennoch nähert sich die einfache und vollkommen genaue Lösung mittelst Lineals und Zirkels von Rich. Schurig einer mathematischen in hohem Grade.

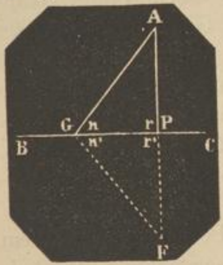
**) In der Regel besteht ein solches Winkelkreuz, das man sich, so wie oben angegeben, leicht selbst verfertigen kann, aus einem runden Körper mit zwei auf einander senkrechten Durchsichten (Dioptern).



scharfe Zielpunkte zu bekommen, gerade aufstehende Stifte (Nadeln) eingesteckt sein können. — Steckt man das Stativ dieses Kreuzes bei P in die Erde und richtet es durch Visieren so, daſs die Nadeln 1 und 1 mit dem in B oder A stehenden Meſsstab in einerlei Richtung sind, und läſst nun in der Richtung, welche die Nadeln 2 und 2 angeben, einen Stab in C stecken, so ist die durch die beiden Punkte P und C bestimmte Linie auf AB perpendikulär. Um von C ein Perpendikel auf die Linie AB zu fällen, trage man das Winkelkreuz so weit in der Linie AB fort, bis der bezeichnete Punkt C mit 2, 2, aber zugleich auch 1, 1 mit AB in einerlei Richtung ist, dann ist der so gefundene Punkt P der gesuchte.

50.

Lehrsatz. Von einem Punkte A auſserhalb einer Linie BC ist nur ein Perpendikel auf diese Linie möglich.



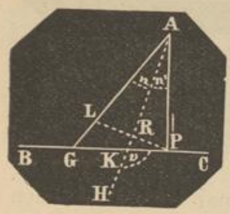
Beweis. Sei AP auf BC perpendikulär. Um nun zu zeigen, daſs jede andere von A an BC gehende Linie, wie AG, schräg gegen BC sein muſs, denke man sich AP um sich selbst nach F verlängert, so daſs $FP = AP$ wird, und verbinde F mit G, so sind die beiden bei P rechtwinkligen Dreiecke APG und FPG einander kongruent, weil sie zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel gleich haben, nämlich: Seite PG beiden gemein, FP gleich AP gemacht und nach Voraussetzung ist der eingeschlossene Winkel r, mithin auch sein Nebenwinkel r' ein rechter; daher (§ 34) $\triangle\ APG \cong \triangle\ FPG$ und hieraus $\angle n = \angle n'$. Wäre nun n ein rechter Winkel, so wäre es auch n' und die beiden Linien AG, GF bildeten eine einzige gerade Linie; das ist nun aber nicht möglich, weil durch zwei Punkte, A und F, nur eine einzige gerade Linie AF möglich ist, folglich ist AG schräge gegen BC.

Zusatz 1. Da man sich in jedem Punkt der Linie BC, also auch im Punkte G, ein Perpendikel auf BC errichtet denken kann und dieses, aus eben angeführten Gründen, links von GA fallen mufs, so ist Winkel n notwendig spitz.

Zusatz 2. Wenn ein Dreieck einen rechten oder einen stumpfen Winkel hat, so mufs jeder der beiden andern notwendig spitz sein.

Zusatz 3. Unter Entfernung eines Punktes A von einer Linie BC versteht man allemal das von A an die (nötigenfalls verlängerte) Linie BC gehende Perpendikel.

51.



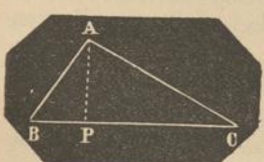
Lehrsatz. Das Perpendikel von einem Punkt A an eine Linie BC ist kürzer, als jede Schräge.

Beweis. Sei AP senkrecht auf BC und AG eine Schräge, so ist zu zeigen, dafs AP kürzer ist, als AG. In Zeichen

$$AP < AG.$$

Man denke sich den Winkel GAP durch die Linie AH halbiert, so dafs also $\angle n = \angle n'$. Von dem Scheitel des rechten Winkels APG denke man sich noch ein Perpendikel PR auf AH gefällt und bis L verlängert. Dafs der Fufspunkt R dieses letztern Perpendikels notwendig zwischen A und K fallen mufs, folgt aus dem vorhergehenden Satz, weil Winkel v stumpf ist. Die beiden bei R rechtwinkligen Dreiecke APR und ALR sind nach § 37 kongruent, und hieraus folgt: $AL = AP$, mithin ist die Schräge AG um ein Stück LG gröfser als AP.

52.



1. Lehrsatz. In jedem Dreieck ist die Summe zweier Seiten grösser, als die dritte.

Beweis. Sei BC die gröfste Seite und darauf von der gegenüber liegenden Spitze das Perpendikel AP gefällt.

Nach dem vorhergehenden Satze ist nun die gegen AP schräge Linie CA gröfser, als die senkrechte CP. Aus demselben Grunde ist BA gröfser als BP, folglich:

AB + AC > BP + PC oder AB + AC > BC.

2. Lehrsatz. In jedem Dreieck ist die Differenz zweier Seiten kleiner als die dritte.

Beweis. Aus der vorstehenden Ungleichung BC < AB + AC folgt unmittelbar BC — AB < AC.

Zusatz. Wenn in einem beliebigen Vieleck ein anderes Vieleck mit ausspringenden Ecken liegt, so ist der Umfang des äussern Vielecks stets gröſser, als der des innern.

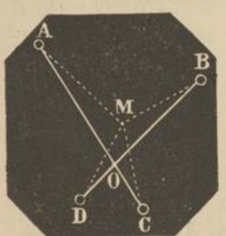
Es sei z. B. das äussere Vieleck ein Dreieck ABC, das innere ein Viereck $BDEC$. Verlängert man die Seiten des innern Vielecks nach F und G, so ist, wie eben bewiesen:

$$AB + AF > BD + DF$$
$$DF + FG > DE + EG$$
$$EG + GC > EC.$$

Addiert man diese Ungleichungen und läſst auf beiden Seiten Gleiches weg, so bleibt:

$$AB + AF + FG + GC > BD + DE + EC$$
$$\text{d. i. } AB + AC > BD + DE + EC.$$

53.



Aufgabe. Es sind vier Punkte, A B, C, D, gegeben, man soll die Lage eines fünften Punktes, O, so bestimmen, daſs die Summe der von ihm nach A, B, C, D gehenden Linien ein Kleinstes (Minimum) werde. (Sollten z. B. von einem Punkte O vier Röhren nach vier andern Punkten gelegt werden, so würde die Praxis die Lage des Punktes O so zu bestimmen suchen, daſs die Summe der vier Wege und deshalb sowohl die Kosten der ersten Anlage, als auch die der spätern Unterhaltung möglichst klein wird.)

Auflösung. Man ziehe die beiden sich kreuzenden Linien AC und BD, so ist ihr Durchschnittspunkt O der gesuchte.

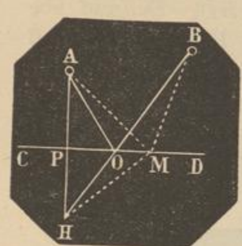
Beweis. Man kann leicht zeigen, daſs die Summe der von jedem andern Punkt, z. B. von M nach A, B, C, D führenden vier Wege gröſser ist, als die vier von O ausgehenden, denn da (nach § 52):

$$AM + MC > AO + OC$$
$$\text{und } BM + MD > BO + OD$$

so ist auch:

$$AM + MC + BM + MD > AO + OC + BO + OD.$$

54.



Aufgabe. In einer gegebenen Linie CD einen Punkt so zu bestimmen, daſs die Summe seiner Abstände von zwei beliebig gegebenen Punkten, A und B, ein Kleinstes werde. (Es sei z. B. CD eine Gas- oder Wasserröhre, aus welcher zwei nach A und B leitende Röhren ausmünden sollen.)

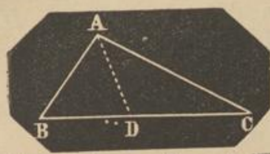
Auflösung. Man fälle von dem einen Punkte A ein Perpendikel AP auf CD und verlängere es um sich selbst bis H, so daſs $AP = PH$; ziehe nun HB, so ist der Durchschnittspunkt O der gesuchte.

Beweis. Um zu zeigen, daſs die Summe der von jedem andern Punkt, z. B. von M nach A und B führenden beiden Wege AM und BM gröſser ist, als die Summe der von O ausgehenden AO und BO, verbinde man noch M mit H. — Zuerst sind nun die beiden bei P rechtwinkligen Dreiecke APO und HPO kongruent, wegen zwei beziehlich gleicher Seiten und des eingeschlossenen rechten Winkels; denn Seite PO ist beiden gemein und, vermöge Konstruktion, das Perpendikel AP gleich dem Perpendikel HP; hieraus (§ 34, Anmerkung) $HO = AO$.

Aus demselben Grunde ist auch $\triangle APM \cong \triangle HPM$, folglich auch $HM = AM$. Die Summe der beiden erstern Wege OA und OB ist also durch die gerade Linie BH, und die Summe der beiden andern Wege MA und MB durch die gebrochene Linie BMH dargestellt, da nun (§ 52) $HM + MB > BH$, so ist auch:

$$MA + MB > OA + OB.$$

55.

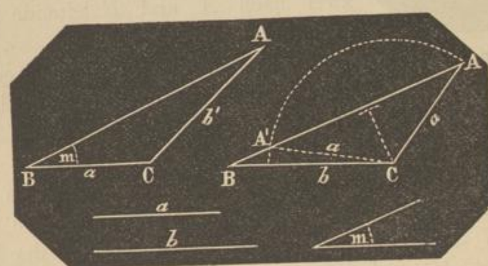


*) **Lehrsatz.** In jedem Dreieck liegt dem gröſsern Winkel auch die gröſsere Seite gegenüber, und umgekehrt.

Beweis. Es sei $\angle BAC$ gröſser als $\angle B$, so soll auch $\overline{BC} > \overline{AC}$ sein.

Denkt man sich von dem gröſsern Winkel BAC einen Winkel $BAD = \angle B$ abgeschnitten, so ist das Dreieck DAB, wegen der beiden gleichen Winkel an der Grundlinie AB gleichschenklig (§ 40), daher $AD = BD$. Da nun aber (§ 52) $AD + DC > AC$, so ist auch $BD + DC > AC$ oder $BC > AC$. Der umgekehrte Satz: daſs der gröſseren Seite auch der gröſsere Winkel gegenüber liegt, ist unmittelbar in vorstehendem enthalten.

56.



*) **Aufgabe.** Es sind zwei Seiten, a und b, und ein Winkel m gegeben.

Man soll 1) ein Dreieck konstruieren, welches die drei Stücke so enthält, daſs der Winkel m der gröſsern Seite b gegenüber liegt, und 2) ein anderes Dreieck zeichnen, in welchem der Winkel m der kleinern Seite a gegenüber liegt.

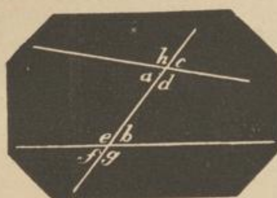
Auflösung 1. Mache (Fig. 1) BC = der kleinern Seite a, trage hieran in B den Winkel m, beschreibe aus C mit der gröſsern Seite einen Bogen, der den andern Schenkel des Winkels m in A schneidet, so ist ABC das durch die gestellte Bedingung (der Winkel m soll der gröſsern Seite gegenüber liegen) völlig bestimmte und verlangte Dreieck.

Auflösung 2. (Fig. 2.) Man nehme jetzt BC = der gröſsern Seite b, trage wieder in B den Winkel m an und beschreibe aus C mit der kleinern Seite a einen Bogen, so muſs dieser jetzt (weil $a < b$) den andern Schenkel des Winkels m zweimal in A und A′ schneiden. Diese letztere Aufgabe führt also auf zwei verschiedene Dreiecke, ABC und A′BC, welche beide die gegebenen Stücke in geforderter Ordnung enthalten. (Vergl. § 43.) Wäre die kleinere Seite a kürzer als das von C an $\overline{BA}$ gehende Perpendikel, so gäbe es gar kein Dreieck. Wäre sie gleich diesem Perpendikel, so wäre das Dreieck wiederum bestimmt.

Fünftes Buch.

Von den Parallellinien.

57.



Erklärung. Wenn zwei Linien von einer dritten geschnitten werden, so entstehen acht Winkel. Je ein Winkel des einen Durchschnittspunktes mit je einem Winkel des andern Durchschnittspunktes geben folgende Winkelpaare:

I. Auf einerlei Seite der Schneidenden.

1) Innerhalb der Parallelen: Innere Winkel (*a* und *e*, *b* und *d*).
2) Aufserhalb der Parallelen: Äufsere Winkel (*f* und *h*, *c* und *g*).
3) Auf einerlei Seite der Parallelen (beide unterhalb oder beide oberhalb): Korrespondierende oder gleichliegende (oder Gegen-) Winkel (*a* und *f*, *d* und *g* u. s. w.).

II. Auf verschiedenen Seiten der Schneidenden:

Wechselwinkel,

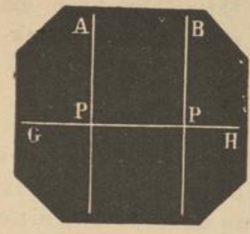
und zwar

1) Innere Wechselwinkel (*a* und *b*, *d* und *e*).
2) Äufsere Wechselwinkel (*h* und *g*, *c* und *f*).
3) Korrespondierende (oder Gegen-) Wechselwinkel (*a* und *g*, *c* und *e*).

58.

Erklärung. Zwei gerade Linien, welche in einerlei Ebene liegen und nach keiner Seite hin zusammentreffen, wie weit man sie auch verlängert denken mag, heifsen parallel (gleichlaufend).

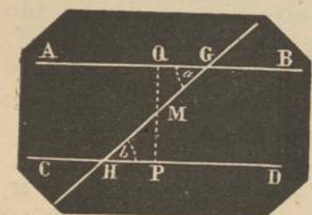
59.



Lehrsatz. Wenn zwei Linien auf einer dritten senkrecht stehen, so sind sie parallel.

Beweis. Seien AP und BP auf GH senkrecht. Weil nun nach § 50 von einem und demselben Punkt nicht zwei Perpendikel auf einer Linie möglich sind, so können auch nicht die Perpendikel AP und BP, weder oberhalb noch unterhalb der Linie GH, in einem Punkt zusammen treffen. Es ist also (§ 58) AP ∥ BP. (Das Zeichen ∥ heifst parallel.)

60.



Lehrsatz. Wenn zwei Linien gegen eine dritte eine solche Lage haben, dafs die innern Wechselwinkel gleich sind, so sind die Linien parallel.

In Zeichen:

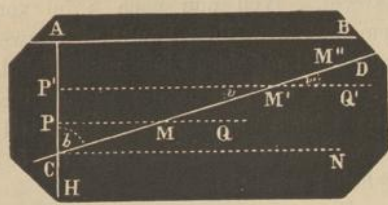
Wenn:	so ist:
$\angle a = \angle b$	AB ∥ CD.

Beweis. Man denke die Linie GH in M halbiert und von M auf CD das Perpendikel MP gefällt, so mufs dieses, rückwärts nach Q verlängert, notwendig auch auf AB senkrecht stehen, denn die beiden Dreiecke MHP und MGQ sind kongruent, weil sie eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gleich haben. Es ist nämlich: $\overline{MH} = \overline{MG}$ und $\angle a = \angle b$, nach Voraussetzung, dann $\angle HMP = \angle GMQ$ (§ 31), mithin auch $\triangle MHP \cong \triangle MGQ$ (§ 37) und hieraus (§ 34, Anmerkung) $\angle Q = \angle P$. Da nun, nach Konstruktion, P ein rechter Winkel ist, so ist auch Q ein rechter. Die beiden Linien AB, CD stehen also auf PQ senkrecht und sind folglich parallel. (§ 59.)

Zusatz 1. Wenn die innern Wechselwinkel a, b gleich sind, so sind es offenbar auch die korrespondierenden (weil a = dem Scheitelwinkel von b), und die innern betragen dann zusammen zwei Rechte (§ 57). Statt also zu sagen: zwei Linien sind parallel, wenn die innern Wechselwinkel gleich sind, kann man auch sagen: wenn die korrespondierenden Winkel gleich sind, oder die innern zwei Rechte betragen.

Zusatz 2. Ist AB ‖ CD und ∠ AQP ein rechter Winkel, so ist auch ∠ DPQ ein rechter Winkel. Oder: Eine Linie, die senkrecht auf einer von zwei Parallelen steht, steht auch senkrecht auf der andern.

61.



Lehrsatz. Wenn zwei Linien, AB, CD, gegen eine dritte, AH, eine solche Lage haben, daſs die innern Wechselwinkel nicht gleich sind, so müssen die Linien, hinreichend verlängert, einmal zusammen treffen und zwar nach der Seite hin, wo die beiden innern Winkel zusammen kleiner als 2 R sind.

Erläuterung. Der einfachern Zeichnung wegen, nehmen wir an, daſs die Schneidende AH auf AB in A senkrecht steht, oder durch Drehung um den Punkt C in diese Lage gebracht worden, und daſs also $\angle\, b < 90^{\circ}$.

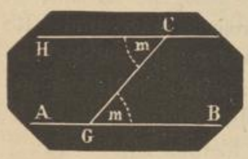
Denkt man sich nun von verschiedenen Punkten, M, M′ . . . der Linie CD, Perpendikel, MP, M′P′ . . . auf AC gefällt, so ist klar, daſs die Fuſspunkte P, P′ . . . dieser Perpendikel immer näher an A rücken, je weiter man die Punkte M, M′ . . . von C entfernt nimmt, und daſs man von keinem der gefällten Perpendikel, z. B. von M′P′ behaupten kann, es sei das letzte, so daſs über dasselbe hinaus keins mehr möglich sei; denn weil die Richtung der Linie CD unbegrenzt ist, so kann man, wo auch ein letzter Punkt, M′, angenommen werden möge, die Linie CM′ immer noch um ein beliebiges Stück, M′M″, verlängert und von diesem Punkt M″ ein neues Perpendikel, M″P″, auf AC gefällt denken. Da nun nach der Natur der geraden Linien kein Teil dieses neuen Perpendikels M″P″ mit einem Teil der Linie CD zusammen fallen kann (§ 8), mithin zwei Scheitelwinkel, v, v', entstehen müssen, so liegt der Punkt M″ auſser der Linie P′Q′ und zwar oberhalb, daher auch das von M″ auf AC gefällte Perpendikel M″P″ oberhalb P′Q′.

Um nun klar einzusehen, daſs die Linien AB und CD sich endlich einmal schneiden müssen, stelle man sich vor:

die Senkrechte QP gleite rechtwinklig an AH hinauf, so mufs sie (hinreichend verlängert) die Linie CD (ebenfalls hinreichend verlängert, von der sie also auch nicht an einem vermeintlichen letzten Punkt abgleiten kann) immer und selbst noch über AB hinaus schneiden, also auch in der Lage von AB.

Zusatz. Sind zwei Linien parallel, so sind notwendig auch alle innern und äufsern Wechselwinkel oder korrespondierenden Winkel gleich, welche sie mit irgend einer sie schneidenden Linie bilden.

62.

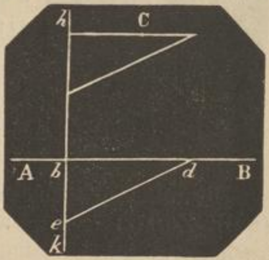


Aufgabe. Durch einen gegebenen Punkt, C, mit einer gegebenen Linie, AB, eine Parallele zu ziehen.

Auflösung. Man ziehe von C nach einem beliebigen Punkt, G, in AB die Linie CG und trage den bei G erhaltenen Winkel *m* auf der andern Seite bei C an, so ist CH ∥ AB. (§ 60.)

Anmerkung. Eine Konstruktion ist eine mathematische (geometrische), wenn sie durch kein anderes Instrument als Lineal und Zirkel ausgeführt ist und ohne alle Versuche notwendig zum Ziele führt. Die nachstehende ist daher keine mathematische, sondern eine mechanische (empirische).

Zusatz 1. Einfacher zieht man Parallelen mit Hilfe eines Lineals und eines Dreiecks. Man legt nämlich die eine Seite *bd* des Dreiecks an die Linie AB, und an die andere Seite *be* des Dreiecks ein Lineal, *hk*, schiebt dann das Dreieck am festgehaltenen Lineal bis an den Punkt C und zieht durch C eine Linie, welche, wegen Gleichheit der korrespondierenden Winkel, mit AB parallel ist.

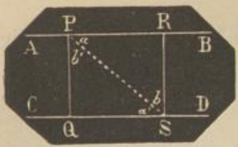


Zusatz 2. Auf dem Felde zieht man durch C eine Parallele mit AB, indem man erst mit Hilfe des Winkelkreuzes von C ein Perpendikel auf AB und dann auf diesem Perpendikel in C wieder ein Perpendikel errichtet (§ 49, Zusatz 2), welches mit AB parallel ist.

63.

Lehrsatz. Zwei Parallellinien sind überall gleich weit von einander entfernt.

Beweis. Unter Abstand zweier Parallellinien versteht man die zwischen beiden gezogene Senkrechte.



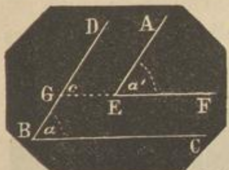
Wir haben also zu beweisen, dafs es einerlei ist, an welcher Stelle man sie zieht.

Sei demnach AB ∥ CD und sowohl PQ als RS auf CD, also auch auf AB senkrecht (§ 61, Zusatz), so ist zu zeigen, dafs PQ = RS.

Man denke noch die Diagonale PS gezogen, so sind die beiden bei Q und R rechtwinkligen Dreiecke PQS und PRS kongruent, weil sie eine Seite und die beiden anliegenden Winkel beziehlich gleich haben, nämlich: Seite PS beiden gemein, $\angle a = \angle a'$ (§ 61, Zusatz) also auch $\angle b = \angle b'$. Daher (§ 37) $\triangle PQS \cong \triangle PRS$ und hieraus PQ = RS.

Zusatz. Auch dieser Lehrsatz dient zum Ziehen paralleler Linien. Errichtet man auf dem Papier oder auf dem Felde auf CD zwei gleich lange Perpendikel, PQ, RS. so ist die durch die beiden Endpunkte P und R gehende Linie AB mit CD parallel.

64.



Lehrsatz. Sind die Schenkel zweier Winkel nach einerlei Seite hin beziehlich parallel, so sind die Winkel gleich.

In Zeichen:

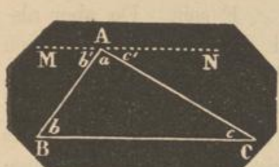
Sei:	so ist
DB ∥ AE	
BC ∥ EF	$\angle a = \angle a'$.

Beweis. Man denke sich EF nach G verlängert, so ist (§ 61, Zusatz) $\angle a = \angle c$ und $\angle a' = \angle c$, folglich auch $\angle a = \angle a'$.

Sechstes Buch.

Summe der innern und äufsern Winkel einer geradlinigen Figur.

65.



Lehrsatz. In jedem Dreieck ist die Summe aller drei Winkel gleich zwei Rechten.

$a + b + c = 2R = 180^0$.

Beweis. Man denke sich durch einen Winkelpunkt, A, eine Linie, MN, parallel mit der gegenüber liegenden Seite BC gelegt, so ist (§ 61, Zusatz) $c' = c$ und $b' = b$. Da nun $b' + a + c' = 2R$ (§ 29), so ist auch $a + b + c = 2R$.

Zusatz 1. Ein Dreieck kann also nur einen rechten oder nur einen stumpfen Winkel enthalten, die beiden andern Winkel müssen alsdann spitze sein. Der rechte oder stumpfe Winkel ist folglich auch immer der gröfste Winkel im Dreieck. Mittelst dieser Bemerkung läfst sich nun auch der Lehrsatz in § 51 sehr einfach beweisen; denn da $\angle P > \angle G$ (s. Fig. § 51), so mufs auch $AG > AP$ sein (§ 55).

Zusatz 2. Durch zwei Winkel eines Dreiecks ist der dritte bestimmt. Wäre z. B. $\angle a = 110^0$, $\angle b = 40^0$, so wäre $c = 180^0 - (110^0 + 40^0) = 180^0 - 150^0 = 30^0$.

Zusatz 3. In einem gleichseitigen, also auch gleichwinkligen Dreieck ist jeder Winkel $\frac{2}{3} R = 60^0$. — In einem rechtwinkligen gleichschenkligen Dreieck ist jeder der beiden spitzen Winkel $= \frac{1}{2} R = 45^0$.

Zusatz 4. Wenn zwei Dreiecke zwei Winkel gleich haben, so ist auch der dritte Winkel des einen dem dritten Winkel des andern Dreiecks gleich. [Dafs zwei verschiedene Dreiecke dennoch dieselben Winkel enthalten können, leuchtet ein, wenn man innerhalb eines beliebigen Dreiecks mit den Seiten desselben Parallelen zieht; man erhält ein kleineres Dreieck, welches aber dieselben Winkel hat, wie das grofse. (§ 64.)]

Zusatz 5. Dreiecke sind kongruent, wenn sie eine Seite, einen anliegenden und einen gegenüberliegenden Winkel gleich haben. (2. Fall des 2. Kongruenzsatzes. S. § 37.)

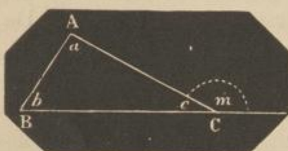
In Zeichen (Fig. zu § 37):

Es sei:	so ist:	daher:
$\overline{BC} = \overline{EF}$	$\angle C = \angle F$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$
$\angle B = \angle E$	$\overline{AC} = \overline{DF}$	
$\angle A = \angle D$	$\overline{AB} = \overline{DE}$.	

Beweis. Da $\angle B = \angle E$, $\angle A = \angle D$, so mufs nach vorstehendem Zus. 4 auch $\angle C = \angle F$ sein. Da aber alsdann beide Dreiecke eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gleich haben ($\overline{BC} = \overline{EF}$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$), so müssen sie nach § 37 I kongruent sein.

Zusatz 6. Stehen zwei Linien auf den Schenkeln eines Winkels senkrecht, so schneiden sie sich unter demselben Winkel. (Vergl. § 64.)

66.



Lehrsatz. Der Aufsenwinkel am Dreieck ist gleich der Summe der beiden innern gegenüber liegenden.

In Zeichen:

$$m = a + b.$$

Beweis. Unter Aufsenwinkel, m, einer Figur ist derjenige gemeint, den die Verlängerung einer Seite, BC, mit der daran stofsenden AC bildet. Da nun nach dem vorhergehenden Lehrsatz a und b mit c vereint zwei Rechte geben, und auch die beiden Nebenwinkel m und c zusammen zwei Rechte betragen, es folglich einerlei ist, ob man $a + b$ oder m zu c addiert, so ist auch $m = a + b$. Wäre z. B. $a = 80^0$, $b = 60^0$, so wäre $m = 140^0$.

67.

Lehrsatz. In jedem Vieleck beträgt die Summe aller innern Winkel so viel mal zwei Rechte, als die Figur Seiten hat, weniger vier Rechte.

Beweis. Man denke sich von einem innerhalb beliebig angenommenen Punkt, o, nach allen Ecken Linien gezogen, so erhält man offenbar genau so viele Dreiecke als die Figur Seiten (Ecken) hat. Da nun die Summe der Winkel in jedem Dreiecke 2 R beträgt (§ 65), so enthalten alle Dreiecke zusammen so viel mal 2 R, als die Figur

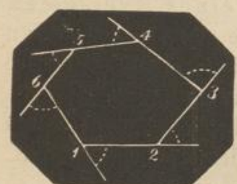
Seiten hat. Werden hievon die vier Rechten abgezogen, welche um den Punkt *o* liegen (§ 30) und nicht mit zu den Winkeln der Figur gehören, so bleibt die im Lehrsatz angegebene Summe übrig. Es ist hiernach die Summe der innern Winkel in einem

Viereck, = 4 R.	Sechseck, = 8 R.
Fünfeck, = 6 R.	Siebeneck, = 10 R. u. s. w.

Es ist also nicht möglich, ein Vieleck zu zeichnen, in welchem die Summe der innern Winkel eine ungerade Anzahl rechte Winkel betrüge.

Anmerkung. Dieser Satz ist ganz allgemein, er gilt nämlich auch für Vielecke mit eingehenden Ecken, indem man ein solches in Vielecke mit ausgehenden Ecken zerlegen kann, jedoch muſs man dann überstumpfe oder erhabene Winkel unterscheiden (s. § 22), die dadurch entstehen, daſs sich der eine Schenkel um mehr als zwei Rechte gedreht hat. (Denkt man sich die überstumpfen Winkel um die Endpunkte der Schenkel nach auſsen gedreht, so erhält man für jeden überstumpfen Winkel drei andere, deren Summe ihm gleich ist, und es findet dann derselbe Beweis statt.)

68.



Lehrsatz. Die Summe aller Aussenwinkel eines Vielecks beträgt immer vier rechte Winkel.

Beweis. Jeder Auſsenwinkel macht mit seinem innern Nebenwinkel 2 R. Die Summe aller äuſsern und innern Winkel beträgt also gerade so viel mal 2 R, als die Figur Seiten hat, und da die Summe der innern Winkel um 4 R kleiner ist (§ 67), so muſs die Summe der Auſsenwinkel immer vier Rechte betragen.

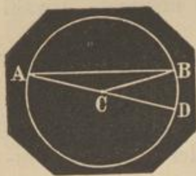
Man kann diesen Satz versinnlichen, indem man durch einen beliebigen Winkelpunkt Parallelen mit allen Seiten des Vielecks gezogen denkt, wodurch dann alle Auſsenwinkel um einen Punkt zu liegen kommen. (§§ 64 und 30.)

Anmerkung. Auch dieser Satz ist ganz allgemein. Denn denkt man sich von einem Eckpunkte aus den Umfang des Vielecks ganz umgangen, so hat man sich um vier rechte Winkel gedreht, indem man bei eingehenden Winkeln die entgegengesetzten Drehungen als subtraktiv betrachtet.

Siebentes Buch.

Vom Kreise.

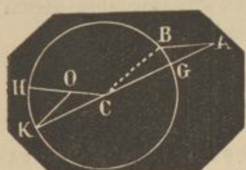
69.



Lehrsatz. Jede Sehne im Kreise ist kürzer, als der Durchmesser. (Siehe § 17.)

Beweis. Sei AB eine beliebige Sehne und AD ein Durchmesser, so ist zu zeigen, daſs $AB < AD$. Denkt man sich noch den Radius CA gezogen, so ist (§ 17, 3) $AC + CB = AD$ und da nun $AC + CB > AB$ (§ 52), so ist auch: $AD > AB$.

70.



Lehrsatz. Die kürzeste Linie, welche von einem Punkt, A, ausserhalb oder von einem Punkt, O, innerhalb eines Kreises an die Peripherie gezogen werden kann, ist diejenige, welche verlängert durch den Mittelpunkt geht.

Beweis. Die Linien AG, OH gehen verlängert durch den Mittelpunkt C. Man denke nun andere Linien, AB, OK, gezogen und B und K mit C verbunden, so ist (§ 52):

$$\begin{array}{lll} & AG + CG < CB + AB & \text{und } OH + CO < CO + OK \\ \text{subtr.} & \underline{CG = CB} & \text{subtr. } \underline{CO = CO} \\ \text{bleibt} & AG < AB & \text{bleibt } OH < OK. \end{array}$$

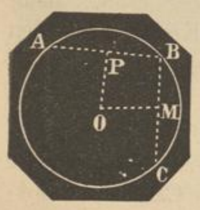
71.

Lehrsatz. Die vom Mittelpunkt auf eine Sehne gefällte Senkrechte halbiert die Sehne und den zugehörigen Bogen.

Beweis. Sei CP senkrecht auf AB und bis G verlängert. Denkt man noch die Radien CA, CB gezogen, so ist, weil nach Voraussetzung, $\angle r = \angle r' = 90^0$, und $\angle A = \angle B$ (§ 40), notwendig auch $\angle n = \angle m$ (§ 65, Zusatz 4). Daher $\triangle ACP \cong \triangle BCP$ (§ 34 oder 37) und hieraus: $AP = BP$ (§ 34, Anmerkung). Denkt man sich die Figur BCG um CG gedreht und auf ACG gelegt, so müssen, weil die Winkel n und m sich decken, auch die Bögen AG und BG sich decken, weil deren Punkte gleich weit vom Mittelpunkt entfernt sind (§ 17), folglich ist auch arc AG = arc BG.

Zusatz. Weil vom Mittelpunkt C nur ein Perpendikel auf die Sehne AB möglich ist (§ 50) und dieses durch die Mitte geht, so ist auch klar, daſs das auf der Mitte P einer Sehne AB errichtete Perpendikel notwendig durch den Mittelpunkt des Kreises gehen und auch den zugehörigen Bogen AGB halbieren muſs.

72.



Aufgabe. Durch drei ganz beliebig gegebene (jedoch nicht in gerader Linie liegende) Punkte, A, B, C, einen Kreis zu beschreiben.

Auflösung. Man verbinde zwei und zwei Punkte, A, B und B, C, so kann man die Linien AB und BC als Sehnen des zu beschreibenden Kreises betrachten. Errichtet man also auf deren Mitten M und P Perpendikel (§ 47, Zusatz), so muſs jedes derselben durch den gesuchten Mittelpunkt gehen (§ 71, Zusatz) und dieser also der Durchschnittspunkt O sein. Daſs die beiden Perpendikel sich notwendig schneiden müssen, folgt daraus: weil sie auf einer gebrochenen Linie stehen, also nicht parallel sein können.

Anmerkung. Wollte man zuvor die Möglichkeit der Auflösung darthun und zeigen, daſs es immer einen Punkt, O, giebt, der von drei beliebigen, nur nicht in gerader Linie liegenden Punkten, A, B, C, gleich weit entfernt ist, so müſste man die Hilfslinien OA, OB, OC ziehen. Aus den entstehenden, paarweise gleichen, bei M und P rechtwinkligen Dreiecken, nämlich: $\triangle OMC \cong \triangle OMB$ und $\triangle OPB \cong \triangle OPA$ (§ 34) folgt dann $OA = OB = OC$. Der mit OA beschriebene Kreis muſs also auch durch die Punkte B und C gehen. Auch ist leicht einzusehen, daſs durch drei Punkte nur ein einziger Kreis möglich ist.

73.

Aufgabe 1. Den Mittelpunkt eines Kreises oder eines Kreisbogens zu finden.

Aufgabe 2. Einen Kreisbogen zu halbieren.

Aufgabe 3. Um ein Dreieck einen Kreis zu beschreiben, so dafs die Seiten des Dreiecks Sehnen des Kreises werden.

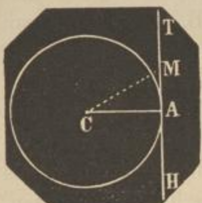
Auflösung 1. Man nehme in dem Bogen drei Punkte beliebig an und verfahre wie im § 72.

Auflösung 2. Die die Sehne halbierende Gerade halbiert zugleich den Bogen (§ 71, Zusatz).

Auflösung 3. Man errichte auf den Mitten zweier Seiten Perpendikel, so ist der Durchschnittspunkt derselben der gesuchte Mittelpunkt.

Man wird hier die merkwürdige Eigenschaft des Dreiecks bemerken, dafs die auf den Mitten seiner Seiten errichteten drei Perpendikel sich in einem und demselben Punkt, nämlich im Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises schneiden müssen.

74.



Lehrsatz. Eine Linie, TH, welche auf einem Radius, CA, im Endpunkt, A, senkrecht steht, hat nur diesen einen Punkt A mit der Peripherie gemein.

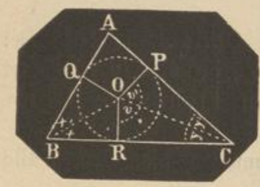
Beweis. Um zu zeigen, dafs jeder andere Punkt, M, in der Linie TH, wie nahe er auch bei A liegen möge, dennoch aufserhalb des Kreises liegt, denke man vom Mittelpunkt nach ihm die Linie CM gezogen, so entsteht ein bei A rechtwinkliges Dreieck CAM, in welchem CM eine Schräge und folglich gröfser, als der Radius CA ist (§ 51). Der Punkt M liegt also weiter, als A vom Mittelpunkt entfernt, mithin aufserhalb des Kreises (§ 17).

75.

Erklärung. Eine gerade Linie, welche nur e i n e n Punkt mit der Peripherie eines Kreises gemein hat, sonst aber ganz aufserhalb desselben liegt, heifst eine Tangente (Berührungslinie)

Um durch einen in der Peripherie gegebenen Punkt, A, eine Tangente an den Kreis zu ziehen, verbinde man A mit dem Mittelpunkt C und errichte auf dieser Linie CA in A eine Senkrechte (§ 74). Es ist leicht einzusehen, daſs durch einen Punkt A nur eine einzige Tangente am Kreise möglich ist, d. h. jede andere durch A gehende Linie muſs notwendig in den Kreis hinein treten und ihn schneiden. Denn dächte man sich auf diese zweite Linie von C eine Senkrechte, CP, gefällt, so müſste diese kürzer sein, als die Schräge CA, mithin der Fuſspunkt P der Senkrechten innerhalb des Kreises liegen.

76.



Aufgabe. In ein gegebenes Dreieck, ABC, einen Kreis zu beschreiben, so daſs der Kreis alle drei Seiten berührt, mithin die Seiten des Dreiecks Tangenten des Kreises werden.

Auflösung. Man halbiere zwei beliebige Winkel, B und C (§ 48), fälle vom Durchschnittspunkt O der Halbierungslinien auf eine der drei Seiten eine Senkrechte, OR, so ist OR der Radius und O der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises.

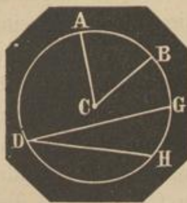
Beweis. Es braucht nur gezeigt zu werden, daſs alle drei von O auf die Seiten des Dreiecks gefällten Perpendikel OR, OP, OQ, gleich sind. Zuvörderst sind nun die beiden bei R und P rechtwinkligen Dreiecke ORC und OPC kongruent, weil sie eine Seite, OC, gemeinschaftlich, ferner einen anliegenden Winkel, $y = y'$, und einen gegenüberliegenden Winkel, R = P, gleich haben, (§ 65, Zus. 5). Mithin ist OR = OP. Eben so beweist man, daſs △ ORB ≅ △ OQB, und hieraus: OR = OQ.

77.

Aufgabe. Es sind drei gleiche Kreise, A, B, C, gegeben, deren Mittelpunkte A, B, C nicht in gerader Linie liegen. Einen vierten Kreis zu beschreiben, der alle drei berührt.

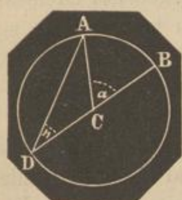
Auflösung. Man verbinde ihre Mittelpunkte, errichte auf die Mitten zweier Verbindungslinien Perpendikel, welche sich in dem gesuchten Mittelpunkt schneiden (§ 70).

78.



Erklärung. Ein Winkel im Kreise, dessen Scheitel im Mittelpunkt liegt, heifst Centriwinkel, zur Unterscheidung von einem solchen, dessen Scheitel in der Peripherie liegt und den man deshalb Peripheriewinkel nennt. — Von jedem dieser Winkel sagt man: er stehe auf dem Bogen, den seine Schenkel zwischen sich fassen. So steht z. B. der Centriwinkel C auf dem Bogen AB und der Peripheriewinkel D auf dem Bogen $\widehat{GH}$.

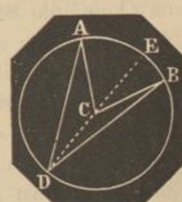
79.



Lehrsatz. Der Centriwinkel ist immer doppelt so grofs, als ein auf demselben Bogen stehender Peripheriewinkel.*)

Beweis. Wir müssen hier drei Fälle besonders betrachten.

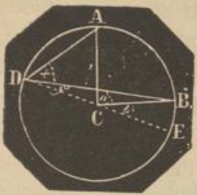
1. Fall. Wenn der Mittelpunkt auf einem Schenkel des Peripheriewinkels liegt. In diesem Falle ist der Centriwinkel a Aufsenwinkel an dem gleichschenkligen Dreieck CAD, mithin $\angle a = \angle 2n$. (§§ 66, 40 und 17, 3.)



2. Fall. Wenn der Mittelpunkt zwischen die Schenkel des Peripheriewinkels fällt. Man denke jetzt den Durchmesser DE gezogen, so teilt dieser sowohl den Centriwinkel, als den Peripheriewinkel, jeden in zwei Teile und es ist nun, ganz wie im ersten Fall, der links liegende Teil des Centriwinkels doppelt so grofs, als der links liegende Teil des Peripheriewinkels, nämlich: $\angle ACE = 2. \angle ADE$. Ebenso auf der andern Seite $\angle ECB = 2. \angle EDB$, mithin $\angle ACE + \angle ECB = 2. \angle ADE + 2. \angle EDB$ oder $\angle ACB = 2. \angle ADB$.

---

*) Um Raum zu sparen, werden wir von jetzt an, statt die Beweise wie bisher in Worten zu geben, oft nur die zur Führung derselben nötigen Sätze citieren. Auch sollte der Anfänger von nun an versuchen, leichtere Beweise und Auflösungen selber zu finden.



3. Fall. Wenn der Mittelpunkt aufserhalb der Schenkel des Peripheriewinkels liegt. Man denke wieder den Durchmesser DE gezogen, so ist am gleichschenkligen Dreieck CAD der Winkel CDA = A (§ 40), der Aufsenwinkel ACE = 2.CDA oder $a + b = 2x + 2y$, da nun aber (erster Fall) $b = 2y$, so bleibt offenbar, wenn man b gegen $2y$ wegläfst, $a = 2x$.

80.

Lehrsatz. Peripheriewinkel auf einerlei Bogen sind gleich.

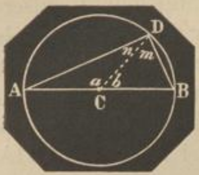
Beweis. Dies folgt unmittelbar aus dem vorhergehenden Lehrsatz, nach welchem jeder auf dem Bogen AB stehende Peripheriewinkel D, D′, D″... halb so grofs ist, als der auf demselben Bogen stehende Centriwinkel ACB.

Zusatz. Weil ein Centriwinkel, ACB, gerade so viele Winkelgrade hält, als der Bogen AB, worauf er steht, Bogengrade, so ist klar, dafs ein auf demselben Bogen stehender Peripheriewinkel, D, D′... gerade halb so viele Grade hält. Man pflegt dies so auszudrücken: Ein Centriwinkel hat den ganzen Bogen, ein Peripheriewinkel den halben Bogen zu seinem Mafse, worauf er steht. Kämen z. B. von den 360 gleichen Bögen (Bogengrade), in welche man sich die ganze Peripherie geteilt denkt, 60 solcher Teile auf den Bogen AB, so wäre der Centriwinkel ACB = 60° und der Peripheriewinkel $D = \frac{60^0}{2} = 30^0$.

81.

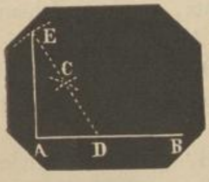
Lehrsatz. Jeder Winkel im Halbkreise ist ein rechter Winkel.

Beweis. Unter Winkel im Halbkreise versteht man einen Peripheriewinkel, der auf dem Halbkreise oder Durchmesser steht und hieraus folgt schon, weil nach § 80, Zusatz, der Peripheriewinkel ADB den halben Bogen AD zu seinem Mafse hat, dafs $\angle ADB = \frac{180^0}{2} = 90^0$. Um dies jedoch noch



auf eine andere Weise zu zeigen, verbinde man D mit dem Mittelpunkt C, so entstehen zwei gleichschenklige Dreiecke, CAD und CDB, daher $\angle A = \angle n$ und $\angle B = \angle m$ (§ 40). Da nun (§ 66) der Aufsenwinkel a am Dreieck ODB doppelt so grofs als m, und der Aufsenwinkel b am Dreieck CAD doppelt so grofs als n, und a und b, als Nebenwinkel, 2 R betragen, so müssen m und n zusammen, d. i. der Winkel im Halbkreise, nämlich ADB, ein Rechter sein.

82.

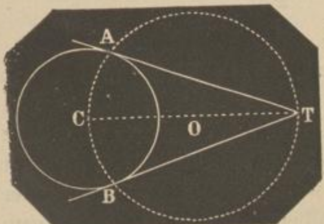


Aufgabe. Auf einer Linie, AB, im Endpunkte A ein Perpendikel zu errichten, ohne die Linie erst zu verlängern.

Auflösung. Man nehme in AB einen Punkt, D, beliebig und beschreibe aus A und D mit einerlei Radius zwei Bögen, die sich in C schneiden. Aus C beschreibe mit demselben Radius einen Bogen, welcher die von D durch C gezogene Linie in E schneidet und ziehe dann EA, welches das verlangte Perpendikel ist.

Beweis. Denkt man sich den aus C beschriebenen Bogen zu einem ganzen Kreise vollendet, so ist, weil DE ein Durchmesser, EAD ein Winkel im Halbkreise, mithin ein rechter Winkel (§ 81).

83.

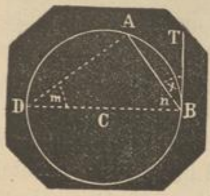


Aufgabe. Von einem aufserhalb eines Kreises, C, gegebenen Punkt, T, eine Tangente an den Kreis zu ziehen.

Auflösung. Ziehe CT und beschreibe über diese, als Durchmesser, einen zweiten Kreis, der den gegebenen in zwei Punkten, A und B, schneidet, ziehe AT und BT, so hat man zwei Tangenten.

Beweis. Denkt man noch die Radien CA, CB gezogen, so sind A und B Winkel im Halbkreise und folglich AT senkrecht auf CA (§§ 81, 74).

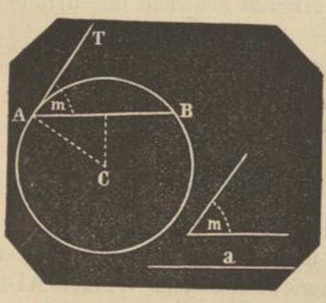
84.



Lehrsatz. Ein Tangentenwinkel, d. i. ein Winkel, den eine Tangente, TB, und eine Sehne, AB, mit einander machen, hat die Hälfte des Bogens AB zu seinem Maſse, den seine Schenkel zwischen sich fassen und ist also gleich einem Peripheriewinkel, der auf demselben Bogen AB steht.

Beweis. Ist B der Berührungspunkt, so muſs der von B gezogene Durchmesser DB auf BT senkrecht stehen (§ 75), also $x + n = 90^0$ sein. Zieht man noch AD, so ist $A = 90^0$ (§ 81), folglich auch $m + n = 90^0$ (§ 65). Da es nun einerlei ist, ob man x oder m zu n addiert, indem man jedesmal 90^0 erhält, so muſs auch $x = m = \frac{\text{arc AB}}{2}$ sein. (§ 80, Zusatz.)

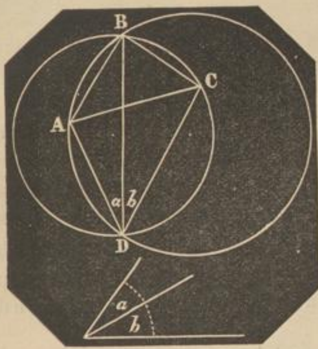
85.



Aufgabe. Über eine als Sehne gegebene Linie, a, einen Kreis zu beschreiben, in welchem alle auf dieser Sehne oder ihrem Bogen stehenden Peripheriewinkel einem gegebenen Winkel, m, gleich sind.

Auflösung. Stecke die gegebene Sehne a in AB ab, trage an das eine Ende derselben den gegebenen Winkel m und betrachte den andern Schenkel AT als Tangente. Errichte nun auf AT in A und auf der Mitte von AB Perpendikel (§ 82, 47, Zusatz und 45), so ist deren Durchschnittspunkt C der gesuchte Mittelpunkt und CA = CB der Radius (§ 71, Zusatz und 75) und alle auf dem Bogen AB stehenden Peripheriewinkel sind dem Winkel m gleich (§ 84).

86.



*) **Aufgabe.** Es sind die Lagen dreier Punkte, A, B, C, oder was dasselbe ist, das Dreieck ABC und zwei Winkel, a und b, gegeben. Es soll die Lage eines vierten Punktes, D, so bestimmt werden, dafs die von ihm nach A und B gehenden Linien den Winkel a und die nach B und C gehenden Linien den Winkel b bilden.

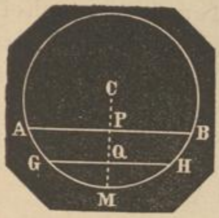
Auflösung. Man beschreibe, wie in vorhergehender Aufgabe, über AB als Sehne einen Kreis, in welchem alle auf dieser Sehne stehenden Peripheriewinkel dem gegebenen Winkel a gleich sind, so mufs der gesuchte Punkt D notwendig irgendwo in dieser Kreislinie liegen. Beschreibt man also auch über BC als Sehne einen Kreis, in welchem alle auf BC stehenden Peripheriewinkel dem Winkel b gleich sind, so mufs der gesuchte Punkt D auch in diesem Kreise liegen, und mithin (weil er in beiden Kreisen zugleich liegen mufs) in ihrem Durchschnittspunkt D.

Anmerkung 1. Wären zufällig die Winkel A und C des gegebenen Dreiecks den gegebenen Winkeln b und a gleich, so fallen beide Kreise zusammen und die Lage des Punktes D ist dann nicht bestimmt.

Dieses sogenannte Pothenot'sche Problem ist sowohl für die niedere als höhere Geodäsie sehr wichtig.

Anmerkung 2. Beschreibt man über AC als Sehne einen Bogen, in welchem alle Peripheriewinkel dem Winkel ADC $= a + b$ gleich sind, so mufs auch dieser Bogen durch den gesuchten Punkt D gehen. Auch ist klar, dafs die drei gegebenen Punkte, A, B, C, in gerader Linie liegen können, so wie auch, dafs der Punkt D jenseits $\overline{AC}$, innerhalb oder aufserhalb des Dreiecks ABC fallen kann.

87.



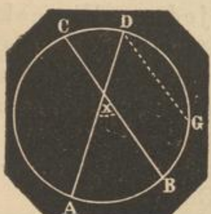
Lehrsatz. Zwei parallele Sehnen fassen gleiche Bögen zwischen sich.

In Zeichen:

Wenn:	so ist:
AB ∥ GH	arc AG = arc BH.

Beweis. Das vom Mittelpunkt auf AB gefällte Perpendikel CP steht auch senkrecht auf GH (§ 61, Zusatz) und halbiert die Sehnen und ihre Bögen (§ 71). Es ist also arc AM = arc BM, und da auch arc GM = arc HM, so ist auch (Gleiches von Gleichem subtrahiert): arc AG = arc BH. Dies folgt auch, wenn man AH zieht, dann sind die Wechselwinkel gleich, und zu gleichen Peripheriewinkeln gehören gleiche Bögen.

88.



Lehrsatz. Ein Winkel, durch zwei Sehnen gebildet, hat die halbe Summe der beiden Bögen zu seinem Maſse, welche seine*) Schenkel zwischen sich fassen.

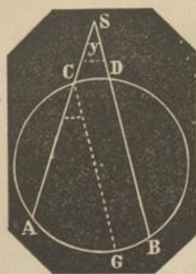
In Zeichen:

$$x = \frac{\text{arc AB} + \text{arc CD}}{2}$$

Beweis. Denkt man DG ∥ CB gezogen, so ist $\angle D = \angle x$ (§ 61, Zusatz). Der Peripheriewinkel D hat nun aber den halben Bogen ABG, d. i. die Hälfte von (arc AB + arc BG), also auch, weil arc CD = arc BG (§ 87), die Hälfte von (arc AB + arc CD) zu seinem Maſse. Dieser Satz ist besonders beim Gebrauch der Winkelmesser wichtig. Kämen z. B. von der in 360 Bogengrade geteilten Peripherie 60° auf AB und 40° auf CD, so wäre $x = \frac{60^0 + 40^0}{2} = 50^0$.

*) Es sollte heiſsen: seine direkten und entgegengesetzten.

89.



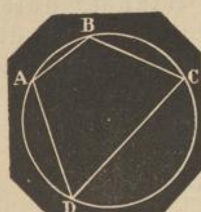
Lehrsatz. Ein Winkel, durch zwei Sekanten (d. i. den Kreis scheidende Linien) gebildet, hat die halbe Differenz der beiden Bögen zu seinem Maſse, welche seine Schenkel zwischen sich fassen.

In Zeichen:

$$y = \frac{\text{arc AB} - \text{arc CD}}{2}$$

Beweis. Denkt man sich CG ∥ DB gezogen, so ist $C = y$, folglich $y = \frac{\text{arc AG}}{2}$; weil aber arc CD = arc GB (§ 87), folglich arc AG = arc AB — arc GB = arc AB — arc CD, so ist auch $y = \frac{\text{arc AB} - \text{arc CD}}{2}$. Kämen z. B. 124 Bogengrade auf arc AB und 40° auf arc CD, so wäre $y = \frac{124 - 40}{2} = 42^0$.

90.



Lehrsatz. In jedem Viereck, dessen Ecken in einem Kreise liegen, also in jedem Sehnenviereck, betragen je zwei gegenüber liegende Winkel zusammen zwei Rechte.

$$\angle A + \angle C = 180^0$$
$$\angle B + \angle D = 180^0$$

Beweis. Der Peripheriewinkel A hat die Hälfte des Bogens BCD, und der gegenüber liegende Winkel C die Hälfte des Bogens DAB, also beide zusammen die Hälfte der ganzen Peripherie zu ihrem Maſse, daher $\angle A + \angle C = \frac{360^0}{2} = 180^0$. Eben so $\angle B + \angle D = 180^0$.

Zusatz. Wenn in einem Viereck zwei gegenüber liegende Winkel zusammen zwei Rechte betragen, so läſst sich um ein solches Viereck immer ein Kreis beschreiben, sonst nicht.

Achtes Buch.

Vom Parallelogramm der Gleichheit und der Berechnung des Flächeninhalts geradliniger Figuren.

91.

Erklärungen. Ein Viereck erhält nach dem Verhältnis und der Lage seiner Seiten folgende besondere Namen. Es heifst:

1) Parallelogramm, wenn je zwei gegenüber liegende Seiten parallel sind.

Rechtwinklige Parallelogramme:

a) Rechteck (Rektangel, Oblongum), wenn nur die gegenüberliegenden Seiten gleich grofs sind.

b) Quadrat, wenn alle vier Seiten gleich lang sind. Abgekürzt mit □ oder q.

Schiefwinklige Parallelogramme:

a) Rhomboid, wenn nur die gegenüberliegenden Seiten gleich grofs sind.

b) Rhombus oder Raute, wenn alle 4 Seiten gleich lang sind.

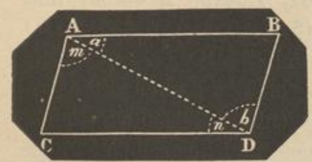
2) Trapez (Paralleltrapez), wenn nur zwei Seiten parallel sind.

3) Trapezoid, oder Viereck schlechtweg, wenn keine Seite einer andern parallel ist.

Anmerkung. Das Viereck in § 90 bezeichnet man mit „Viereck ABCD" oder kürzer mit „Viereck AC".

92.

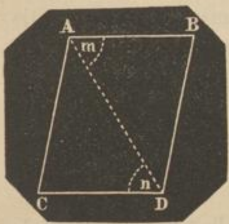
Lehrsatz. In jedem Parallelogramm sind die gegenüber liegenden Seiten und Winkel einander gleich, und eine Diagonale teilt es in zwei kongruente Dreiecke.



Beweis. Weil im Parallelogramm die gegenüber liegenden Seiten parallel sind, so sind erstlich die innern Wechselwinkel gleich, $a = n$, $b = m$, § 61, Zusatz. Die beiden Dreiecke ACD und ABD haben nun eine gemeinschaftliche Seite und beide anliegenden Winkel gleich, daher $\triangle$ ACD $\cong$ $\triangle$ ABD (§ 37) und hieraus folgt AB = CD, AC = BD und $\angle$ B = $\angle$ C.

Zusatz. Wenn umgekehrt in einem Viereck jedes Paar gegenüberliegender Seiten gleich sind, so sind sie notwendig auch parallel, und das Viereck ist dann ein Parallelogramm; denn nachdem die Diagonale AD wieder gezogen, folgt nach § 41 die Kongruenz der Dreiecke und daraus die Gleichheit der inneren Wechselwinkel. Diesen Satz kann man zur Konstruierung eines Parallelogramms benutzen, von welchem zwei Seiten, AC, CD, und der eingeschlossene Winkel C gegeben sind.

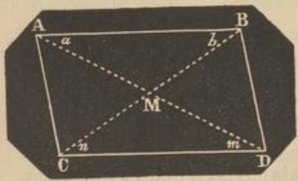
93.



Lehrsatz. Wenn in einem Viereck zwei Seiten parallel und gleich sind, so ist dasselbe ein Parallelogramm.

Beweis. Sei AB gleich und parallel mit CD. Ziehe eine Diagonale, AD, so sind, weil AB ‖ CD, die Wechselwinkel m und n gleich. Da nun auch AB = CD so sind die beiden Dreiecke ACD und ABD kongruent (§ 34) und hieraus folgt $\angle$ CAD = $\angle$ ADB, oder AC ‖ BD. Nun sind beide Paare Gegenseiten parallel, folglich das Viereck ein Parallelogramm.

94.



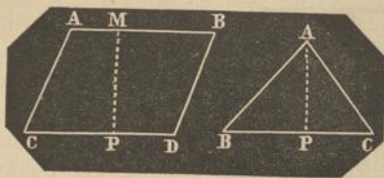
Lehrsatz. Die beiden Diagonalen eines Parallelogramms halbieren sich gegenseitig.

Beweis. Weil AB ‖ CD, so ist (§ 61, Zusatz) $a = m$, und $b = n$, und da auch AB = CD, so ist (§ 37) $\triangle$ MAB $\cong$ $\triangle$ MCD und hieraus folgt: AM = MD und CM = MB.

Aufgabe. Man zeige, daſs die von den Ecken eines beliebigen Dreiecks ABC auf die gegenüber liegenden Seiten gefällten drei Perpendikel sich in einem und demselben Punkte schneiden müssen.

Auflösung. Man ziehe durch die Ecken A, B, C Parallelen mit den gegenüber liegenden Seiten, so bilden diese ein neues Dreieck DEF und der Beweis folgt nun leicht aus: § 61, Zus., § 92 und § 73, Aufg. 3.

95.



Erklärungen 1. Wenn man in einem Parallelogramm eine beliebige Seite, CD, als Grundlinie betrachtet, so heiſst das von einem beliebigen Punkt, M, der gegenüber liegenden parallelen Seite auf die (nötigenfalls verlängerte) Grundlinie gefällte Perpendikel MP (also die Entfernung der beiden parallelen Seiten) die H ö h e des Parallelogramms. Nimmt man daher in einem Rechteck eine Seite zur Grundlinie, so ist die daran stoſsende die Höhe.

In einem Quadrat sind Höhe und Grundlinie gleich.

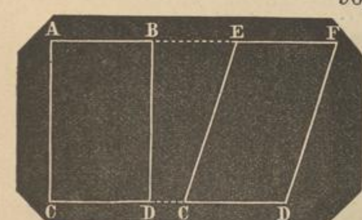
2. Eben so kann man in einem Dreieck eine beliebige Seite, BC, als Grundlinie betrachten, und dann heiſst das von der gegenüber liegenden Spitze auf die Grundlinie gefällte Perpendikel AP die Höhe des Dreiecks. Befindet sich an der Grundlinie ein stumpfer Winkel, so fällt das die Höhe angebende Perpendikel auſserhalb des Dreiecks auf die Verlängerung der Grundlinie.

Nimmt man in einem rechtwinkligen Dreieck eine Kathete zur Grundlinie, so ist die andere Kathete die Höhe.

Die nachstehenden Sätze beziehen sich auf die G l e i c h h e i t geradliniger Figuren (siehe § 17, 2 und § 18) und die daraus entspringenden Sätze.

U m f a n g (§ 32) ist nicht mit Inhalt zu verwechseln.

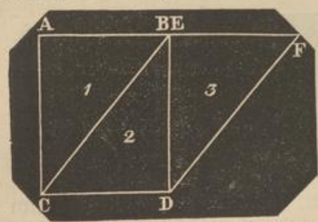
96.



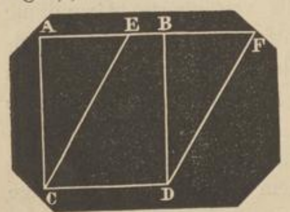
Lehrsatz. P a r a l l e l o g r a m m e v o n g l e i c h e r G r u n d l i n i e u n d H ö h e s i n d i n h a l t s g l e i c h.

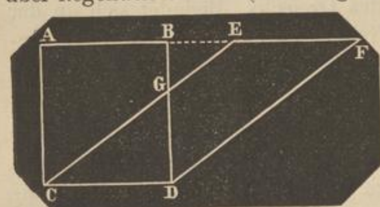
Haben also die beiden Parallelogramme ABDC und EFDC gleiche Grundlinie

(CD = CD) und gleiche Höhe (die Entfernung der Seite AB von CD = der Entfernung der Seite EF von CD), so sind sie inhaltsgleich.

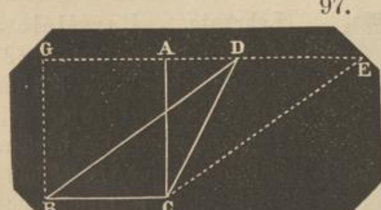


Beweis. Denkt man sich die Grundlinie des 1. Parallelogramm auf die des 2. gelegt, so fällt die Seite EF auf die verlängerte AB und es können alsdann die Punkte B und E zusammenfallen (siehe nebenstehende Figur), oder E fällt zwischen A und B (die folgende Figur), oder endlich E fällt auf die Verlängerung von AB (letzte Figur). In jedem dieser 3 Fälle entsteht ein Trapez ACDF und zwei Dreiecke ACE und BDF. Diese beiden Dreiecke sind nach § 65,5 kongruent, weil sie eine Seite (AC = BD s. § 92), einen anliegenden Winkel (A = B als korrespondierenden Winkel) und einen jener Seite gegenüber liegenden Winkel (E = F gleichfalls als korrespondirenden Winkel) gleich haben. Mithin sind die Dreiecke auch inhaltsgleich. Zieht man daher △ ACE vom Trapez ACDF ab, so mufs man eben so viel erhalten, als wenn man △ BDF vom Trapez ACDF abzieht. Im ersten Falle erhält man aber Parallelogramm CEFD, im zweiten Falle Parallelogramm CABD, die mithin gleich sein müssen.





97.



Lehrsatz. Ein Dreieck ist halb so grofs, als ein Rechteck (oder Parallelogramm) von gleicher Grundlinie und Höhe.

Beweis. Auf der Grundlinie BC des Dreiecks DBC denke man sich das Rechteck GACB von gleicher Höhe errichtet (§ 95, 2). Denkt man sich jetzt das Dreieck DBC zu einem Parallelogramm, DECB, ergänzt, so ist dieses Parallelogramm eben so grofs, als das Rechteck GACB (§ 96), folglich ist auch die Hälfte des Parallelogramms, nämlich das Dreieck DBC gleich dem halben Rechteck GACB (§ 92).

Zusatz. Dreiecke von einerlei Grundlinie und Höhe (oder Dreiecke von gleicher Grundlinie, deren Spitzen in der Parallelen zur Grundlinie liegen) sind inhaltsgleich, weil jedes halb so grofs ist, als das Rechteck von derselben Grundlinie und Höhe.

98.

Berechnung des Flächeninhalts. Durch den vorhergehenden Lehrsatz sind wir nun in den Stand gesetzt, die Flächengröfse einer jeden geradlinig begrenzten Figur auszumessen und durch Zahlen bestimmt anzugeben. Da wir nämlich eine jede, in noch so beliebigem Zickzack geradlinig begrenzte Figur durch Diagonalen immer in ein Netz von Dreiecken zerlegen können, und jedes Dreieck halb so grofs ist, als ein Rechteck von derselben Grundlinie und Höhe, so kommt die so verwickelt scheinende Aufgabe darauf zurück, nur Mittel und Wege zu ersinnen: den Flächeninhalt eines Rechtecks durch Zahlen anzugeben.*)

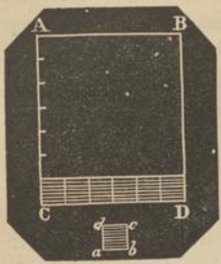
Als die bequemste Form der Flächeneinheit zeigt sich sogleich die quadratförmige.

Quadratförmige Flächeneinheiten giebt es in der Praxis von verschiedener Gröfse und die alle nach der ihnen zum Grunde liegenden Längeneinheit, nur mit dem Beiwort: Quadrat benannt werden. Wäre z. B. (siehe folgende Figur) die Linie $ab = 1$ m, so wäre das darüber stehende Quadrat, d. h. die davon eingeschlossene Fläche $abcd = 1$ qm (d. i. „1 Quadratmeter"). Wäre $ab = 1$ cm, so wäre die Fläche von $abcd = 1$ qcm. Hiernach versteht man nun auch, was eine Quadratmeile, Quadratyard, Quadratfufs etc. bedeutet.

---

*) Die alten Römer unter den Konsuln verstanden noch nicht, den Flächeninhalt eines Dreiecks zu bestimmen.

99.



Lehrsatz. Der Inhalt eines Rechtecks ist gleich dem Produkt aus Grundlinie und Höhe.

Beweis. Sei, um ein bestimmtes Beispiel zu haben, die Flächeneinheit $abcd = 1$ qm. Die Längeneinheit $ab =$ 1 m sei sechsmal in der Grundlinie CD und siebenmal in der Höhe AC enthalten, so ist einleuchtend, daſs, wie in der Zeichnung angedeutet, auf der Grundlinie gerade 6 qm neben einander Platz finden, und daſs 7 solche Reihen, von je 6 qm, das ganze Rechteck ausfüllen und folglich dessen Inhalt in Quadratmeter ausgedrückt, 7 mal 6 qm, oder = 42 qm ist, und so in jedem andern Fall. Wäre z. B. $CD = 7\frac{1}{2}$ m, $AC = 10$ m, so wäre der Inhalt des Rechtecks $= 7\frac{1}{2} . 10$ oder 75 qm. Die Regel, um den Inhalt eines Rechtecks zu finden, ist also diese: Man miſst mit der, der Flächeneinheit zu Grunde liegenden Längeneinheit erst Grundlinie und Höhe des Rechtecks, multipliziert dann beide (vorläufig als unbenannt zu betrachtenden) Zahlen mit einander und legt dem Produkt die Benennung der Längeneinheit, jedoch mit dem Beiwort „Quadrat", bei. Wäre z. B. CD = 3 cm, AC = 5 cm, so wäre der Inhalt des Rechtecks = 15 qcm.

Zusatz 1. Eben so findet man den Inhalt eines Parallelogramms, indem man die Grundlinie mit der Höhe multipliziert (§ 95, 1 und § 96).

Zusatz 2. Dividiert man den Inhalt eines Rechtecks durch die Grundlinie oder Höhe, so giebt der Quotient die andere Linie.

100.

Die im vorigen Lehrsatz ausgesprochene Regel, nach welcher man Grundlinie und Höhe mit einander multiplizieren muſs, um den Inhalt eines Rechtecks zu finden, pflegt man kurz in Zeichen anzudeuten, indem man die beiden Linien als Faktoren ansetzt und ihr Produkt (Flächeninhalt) mit F bezeichnet. Für das Rechteck ABCD (§ 99) wäre also dessen Inhalt: $F = AC . CD$. Gewöhnlich bezeichnet man aber bequemer die Höhe durch h und die Grundlinie (Basis) durch b, nämlich: $F = bh.$

Es versteht sich bei dieser Formel aber von selbst, daſs man die Lineargröſsen b und h mit einer Längeneinheit ausgemessen und als Zahlen denken muſs, weil man keine Linien, als ausgedehnte Gröſsen, mit einander multiplizieren kann.

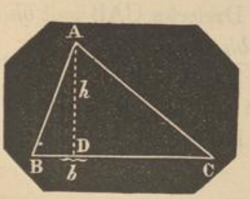
Auch ist klar, daſs beide Faktoren, b und h, einnamig und gleichnamig sein, und nötigenfalls erst auf solche reduziert werden müssen, bevor man sie mit einander multiplizieren kann. In der Regel ist es am bequemsten, mehrnamige Zahlen statt auf die niedere, auf die höhere zu reduzieren. Hierbei wollen wir nur noch bemerken, daſs im Decimalsystem 1 m = 100 cm, 1 cm = 10 mm und folglich 1 Quadratmeter (qm) = 10 000 qcm, 1 qcm = 100 qmm etc.

101.

Aufgabe. Folgende Rechtecke zu berechnen; h bedeutet Höhe, b Grundlinie, F Inhalt, qm Quadratmeter etc.

Gegeben:		Gesucht:
1) $h = 3\frac{2}{3}$ m,	$b = 6\frac{3}{4}$ m;	$F = 24\frac{3}{4}$ qm = 24 qm 7500 qcm;
2) $h = 2$ m,	$b = 87$ cm;	$F = 17400$ qcm = 1 qm 7400 qcm;
3) $h = 104$ m 7 cm,	$b = 90$ m 64 cm;	$F = 9432{,}9048$ qm.
4) $h = 25{,}9$ m,	$b = 37{,}8$ m;	$F = 979{,}02$ qm;
5) $F = 230\frac{7}{8}$ qm,	$h = 13\frac{3}{4}$ m;	$b = 16\frac{87}{110}$ m = 16 m $79\frac{1}{11}$ cm;
6) $F = 4$ qm;	$b = 16$ cm;	$h = 2500$ cm = 25 m.
7) $F = 285$ qm 935 qcm,	$b = 18$ m 90 cm;	$h = 1508{,}431$ cm = 15 m 8,431 cm.
8) $F = 1{,}06$ qm,	$b = 0{,}7$ m;	$h = 1{,}5143$ m = 1 m 51,43 cm.

102.



Lehrsatz. Der Inhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkt aus Grundlinie und Höhe.

In Zeichen:

$$F = \tfrac{1}{2} BC . AD,$$

oder kürzer:

$$F = \tfrac{1}{2} b h.$$

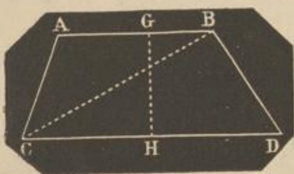
Beweis. Dies folgt aus § 97, wonach ein Dreieck gerade halb so groſs ist, als ein Rechteck von derselben Grundlinie und Höhe.

Um den Inhalt eines Dreiecks zu berechnen, kann man auch erst die Grundlinie oder die Höhe durch 2 dividieren, also die halbe Grundlinie mit der Höhe oder die halbe Höhe mit der Grundlinie multiplizieren.

Umgekehrt findet man die Höhe eines Dreiecks, wenn man den Inhalt durch die halbe Grundlinie dividiert. Beispiele:

Gegeben:		Gesucht:
1) $b = 24$ m 84 cm,	$h = 26$ m 18 cm;	$F = 325{,}1556$ qm $= 325$ qm 1556 qcm;
2) $F = 77\frac{1}{3}$ qm,	$b = 24$ m 86 cm;	$h = 6{,}2215$ m $= 6$ m 22,15 cm;
3) $b = 1{,}2$ m,	$h = 69{,}3$ cm;	$F = 0{,}4158$ qm $= 4158$ qcm;
4) $F = 54{,}3$ qm,	$h = 768$ cm;	$b = 1414{,}06$ cm $= 14$ m 14,06 cm.

103.



Lehrsatz. Der Inhalt eines Trapezes ist gleich dem Produkt aus der Höhe und der halben Summe seiner beiden parallelen Seiten.

In Zeichen:

$$F = \frac{AB + CD}{2} . GH,$$

oder kürzer, indem man $CD = a$, $AB = b$, $GH = h$ setzt:

$$F = \frac{a + b}{2} . h.$$

Beweis. Durch eine Diagonale wird das Trapez in zwei Dreiecke geteilt, welche die parallelen Seiten $CD = a$ und $AB = b$ zu Grundlinien und die Höhe des Trapezes $HG = h$, zur Höhe haben (§ 63). Die Flächensumme beider Dreiecke giebt die Fläche des ganzen Trapezes. Nun ist die Fläche des Dreiecks $BCD = \frac{1}{2} ah$ und die des Dreiecks $CAB = \frac{1}{2} bh$, mithin die Summe beider $F = \frac{ah}{2} + \frac{bh}{2} = \frac{a + b}{2} . h$. Wäre z. B. $a = 16$ m 40 cm, $b = 10$ m 75 cm und $h = 9$ m $37\frac{1}{2}$ cm, so wäre $F = \frac{1}{2} . (16\frac{2}{5} + 10\frac{3}{4}) . 9\frac{3}{8} = 127\frac{17}{64}$ qm $= 127$ qm $2656\frac{1}{4}$ qcm.

104.

Um den Flächeninhalt einer jeden andern geradlinigen Figur zu bestimmen, zerlege man sie durch schicklich gezogene Diagonalen in lauter Dreiecke, messe in jedem eine

Grundlinie und die zugehörige Höhe, berechne den Inhalt eines jeden Dreiecks besonders, so giebt die Summe aller den Inhalt der ganzen Figur. Um nicht mehr Linien zu messen, als nötig ist, kann man darauf achten, daſs immer zwei Dreiecke eine gemeinschaftliche Grundlinie haben. Oftmals läſst sich auch eine Figur oder Teile derselben in Parallelogramme, Rechtecke oder Trapeze zerlegen.

Da im Quadrat: Grundlinie und Höhe gleich sind, so findet man den Inhalt eines Quadrats, indem man eine Seite desselben mit sich selbst multipliziert, und umgekehrt findet man die Seite eines Quadrats, wenn man aus dem Inhalt desselben die Quadratwurzel zieht. Wäre z. B. in dem Quadrat ABGF (siehe folgende Figur) die Seite AB = 12 m, so wäre der Inhalt $F = \overline{AB}.\overline{AB} = 144$ qm. Wäre umgekehrt der Inhalt = 144 qm gegeben, so wäre eine Seite desselben $= \sqrt{144} = 12$ m.

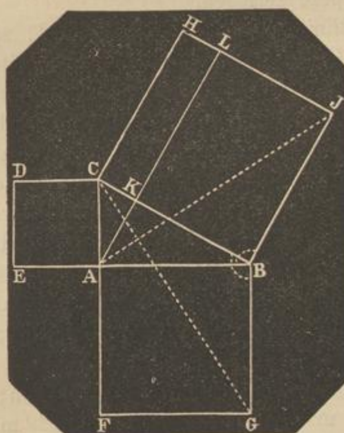
Beispiele. Man suche die Seiten der Quadrate, deren Inhalt 106 929 qm; 604 qm 140 qcm; 2 qm; $1\frac{1}{6}$ qm; 0,6 qm; 2,8 qm; 0,908 qm.

Antwort. Die Seiten sind 327 m; 24,5767 m; 1,414 m; 1,0801 m; 0,7746 m; 1,67332 m = 1 m 67,332 cm; 0,95289 m = 95,289 cm.

Neuntes Buch.

Der Pythagoräische Lehrsatz.

105.



Lehrsatz. In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat der Hypotenuse so grofs, als die Quadrate der beiden Katheten zusammen genommen.

In Zeichen:*)

$\square BH = \square AG + \square AD$, oder

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2.$$

Beweis. Sei CAB ein bei A rechtwinkliges Dreieck und über seinen drei Seiten Quadrate errichtet, so soll die Fläche des auf der Hypotenuse BC stehenden Quadrats BCHJ allein so grofs sein, als die Flächen der beiden auf den Katheten stehenden Quadrate ABGF und ACDE zusammen genommen.

Aus dem Scheitel A des rechten Winkels sei AL ∥ CH gezogen, so ist dadurch das Quadrat der Hypotenuse in zwei Rechtecke CHLK und LKBJ geteilt, und es läfst sich nun zeigen, dafs jedes der beiden Rechtecke seinem benachbarten Quadrate an Inhalt gleich ist. Zieht man nämlich noch die Hülfslinien AJ und CG, so haben die beiden Dreiecke ABJ und CBG zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel gleich, nämlich: $JB = CB$, $AB = GB$ und $\angle ABJ = \angle CBG = 90^0 + \angle ABC$, daher: $\triangle ABJ \cong \triangle CBG$ (§ 34). (Man denke sich das Dreieck CBG um den Punkt B gedreht, so fällt der Punkt C auf J und G auf A). Das Dreieck ABJ hat nun mit dem Rechteck LKBJ einerlei Grundlinie, BJ, und gleiche Höhe, KB, eben so haben das Dreieck CBG und das Quadrat ABGF einerlei

---

*) $\overline{BC}^2$ bedeutet so viel als $\overline{BC} \cdot \overline{BC}$ oder das über die Linie $\overline{BC}$ konstruierte Quadrat.

Grundlinie, BG, und gleiche Höhe, AB, daher: (§ 97) △ ABJ = ½ Rechteck KBJL, und △ CBG = ½ Quadrat ABGF. Da nun die beiden Dreiecke ABJ und CBG gleich grofs sind, so ist auch: ½ Rechteck KBJL = ½ Quadrat ABGF, also auch das ganze Rechteck KBJL so grofs, als das Quadrat ABGF. Eben so zeigt man an der andern Seite,*) indem man die Hilfslinien AH und BD zieht, dafs auch das Rechteck CHLK dem Quadrat ACDE an Fläche gleich ist, und folglich auch beide Rechtecke zusammen, d. i. das Quadrat der Hypotenuse, so grofs ist, als die Summe der Quadrate der beiden Katheten.**)

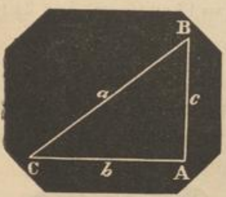
Zusatz. Das Quadrat der einen Kathete ist so grofs als das Quadrat der Hypotenuse weniger dem Quadrat der andern Kathete.

106.

Aufgabe. Ein Quadrat zu zeichnen, welches 1) so grofs ist, als die Summe zweier gegebenen Quadrate, 2) welches so grofs ist, als die Differenz derselben, und 3) welches 2, 3, 4.. mal so grofs ist, als ein gegebenes Quadrat.

Auflösung. Siehe § 45, Randanmerkung.

107.



Dieselbe merkwürdige Beziehung, welche unter den Flächen der, auf den Seiten eines r e c h t w i n k l i g e n Dreiecks stehenden Quadrate stattfindet, mufs offenbar auch unter den Quadratzahlen dieser Seiten stattfinden, d. h. wenn man die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks mit einerlei Längeneinheit ausmifst, so mufs das Quadrat von der Zahl, welche die Länge der Hypotenuse angiebt,

*) Der Anfänger möge sich die Figur gröfser zeichnen.

**) Obgleich man eigentlich von keinem Lehrsatz sagen kann, er sei der wichtigste in der Geometrie, indem alle, als Glieder einer Kette, gleich notwendig sind, so dienen doch einige Sätze nur zur Begründung anderer, von denen mehrere praktische Anwendungen gemacht werden können, und in dieser Hinsicht kann man sagen, dafs obiger, nach seinem Entdecker Pythagoras benannte Satz, der fruchtbarste und wichtigste in der ganzen Geometrie ist. Wir haben deshalb auch, dem Pythagoras zu Ehren, diesem Satze ein eigenes Buch gewidmet, unter andern Umständen würden wir ihm einen Tempel gebaut haben.

so grofs sein, als die Quadrate der beiden Zahlen, welche die Längen der Katheten ausdrücken, zusammen genommen, so dafs man also, vermöge dieses Satzes, aus zwei in Zahlen gegebenen Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks die dadurch bestimmte dritte Seite immer berechnen kann.

Wäre z. E. in dem bei A rechtwinkligen Dreieck ABC die eine Kathete AC = 4, die andere AB = 3, so wäre das Quadrat der Hypotenuse $= 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$, folglich die Hypotenuse BC $= \sqrt{25} = 5$. Bedeutet a die Länge der Hypotenuse, b und c die der Katheten, so ist allgemein:

$$a^2 = b^2 + c^2, \text{ oder } a = \sqrt{b^2 + c^2}.$$

Man findet also die Hypotenuse, wenn man beide Katheten quadriert (jede mit sich selbst multipliziert) und aus der Summe beider Quadrate die Quadratwurzel zieht. Um eine Kathete zu finden, mufs man das Quadrat der andern Kathete vom Quadrat der Hypotenuse abziehen und aus dem Reste die Quadratwurzel ziehen (§ 105, Zusatz). In Zeichen:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{(a + c)\,(a - c)}.$$

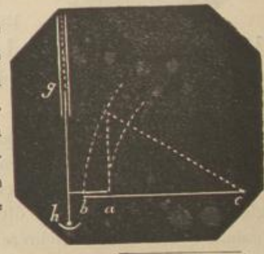
Beispiele: 1) Gegeben: beide Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, $b = 16$ m, $c = 21$ m. Gesucht: die Hypotenuse a?

2) Gegeben: die Hypotenuse $a = 34$ m, die Kathete $b = 16$ m. Gesucht: c?

3) Gegeben: zwei Seiten eines Rechtecks, $h = 13$ m 80 cm, $b = 24$ m 25 cm. Gesucht: die Diagonale d?

4) Gegeben: die Seite eines gleichseitigen Dreiecks, $b = 30$ m. Gesucht: die Höhe h?

5) In den Endpunkten einer geraden Linie BC = 100 m, sind die beiden Perpendikel AB = 60 m und DC = 90 m errichtet. Wie weit sind die beiden Endpunkte A und D von einander entfernt?



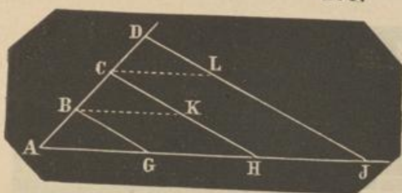
6) Eine Stange, bc, beschreibt um c einen Kreis und hebt dabei eine andere Stange, gh, indem sie dieselbe, unter einem rechtwinklig daran befindlichen Arm, greift. Die Stange gh ist genötigt, sich zwischen Leisten nach ihrer Längenrichtung zu bewegen. Auf welche Höhe (h) wird dieselbe gehoben, wenn $bc = 2$ m 12 cm und $ab =$ 33 cm ist?

Antwort: 1) $a = 26{,}4$ m; 2) $c = 30$ m; 3) $d = \sqrt{13{,}8^2 + 24{,}25^2} =$ 27,902 m = 27 m 90,2 cm.; 4) $h = 25{,}98$ m. Allgemein: $\sqrt{b^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot b$; 5) AD = 104,4 m; 6) h = 1 m 13,6 cm.

Zehntes Buch.

Von den Proportionallinien.

108.



Lehrsatz. Wenn man auf dem einen Schenkel eines Winkels gleiche Stücke abschneidet und durch die Teilpunkte Parallelen an den andern Schenkel zieht, so schneiden diese auch auf dem andern Schenkel gleiche Stücke ab. In Zeichen:

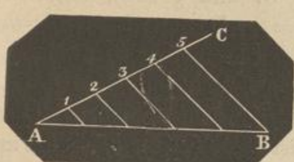
Wenn:	so ist:
$AB = BC = CD = \ldots$	
und $BG \parallel CH \parallel DJ \parallel \ldots$	$AG = GH = HJ = \ldots$

Beweis. Man denke sich BK, CL parallel mit AJ gezogen, so sind die entstehenden Dreiecke kongruent, weil sie eine Seite und die beiden anliegenden Winkel beziehlich gleich haben, nämlich:

$AB = BC = CD$, n. V.	folglich ist auch (§ 37):
$\angle BAG = \angle CBK = \angle DCL$	$\triangle ABG \cong \triangle BCK \cong \triangle CDL$
$\angle ABG = \angle BCK = \angle CDL$	und hieraus:
(§ 61, Zusatz, oder § 64.)	$AG = BK = CL$.

Nun ist aber (§ 92): $BK = GH$ und $CL = HJ$, mithin ist auch: $AG = GH = HJ$.

109.

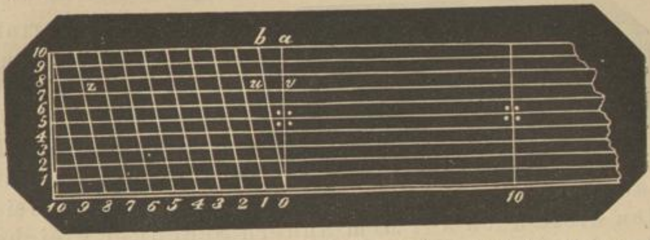


Aufgabe. Eine gegebene Linie, AB, in eine bestimmte Anzahl gleicher Teile zu teilen, z. B. in fünf.

Auflösung. Man ziehe aus A eine Linie, AC, schneide auf dieser von A aus fünf gleiche Teile ab, ziehe von dem letzten Teilpunkt 5 nach B und dann durch 4, 3, 2, 1 die mit $\overline{5B}$ parallelen Linien, so ist dadurch AB in fünf gleiche Teile geteilt (§ 108).

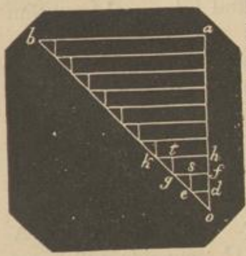
110.

Verjüngter Maſsstab. Zur Einteilung einer geraden Linie kann man sich auch eines sogenannten verjüngten Maſsstabes bedienen. Ein solcher, besonders bei Entwerfung von Zeichnungen, Karten etc. unentbehrlicher Maſsstab, läſst sich folgendermaſsen leicht anfertigen.



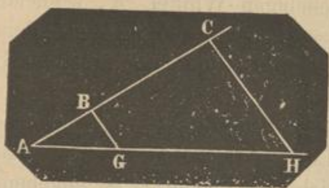
Man trägt nämlich eine beliebige Lineareinheit, *ab*, von 0 nach 10, zehnmal ab, dann diese zehn Teile beliebig oft von 0 bis 10, von 10 bis 20 etc., zieht durch den Endpunkt ein Perpendikel, nur nach Augenmaſs, schneidet auf diesem wieder zehn gleiche Stücke ab, zieht durch die Teilpunkte die zehn Parallelen mit $\overline{10,10}$, so wie auch die zehn mit $\overline{9,10}$ parallelen Querlinien, so ist der Maſsstab fertig.

Bedeutet nun in dem Dreieck *oab* die Linie *ab* die Einheit, 1 m z. B., so ist, wie folgendes gröſser gezeichnete Dreieck es deutlicher zeigt, die neunte, damit Parallele $de = \frac{1}{10}$ m $=$ 0,1 m, die achte Parallele $fg = \frac{2}{10} = 0{,}2$ m etc. Denn erstlich sind, weil $od = df = fh$ etc., die Linien oe, eg, gk...gleich (§ 108). Denkt man noch mit *oa* die Parallelen es, gt... gezogen, so sind die entstehenden Dreiecke *oed*, *egs* etc. kongruent (§ 37 und § 108), folglich: $ed = gs = kt = \ldots$ Da nun $ed = sf$, $gf = th$ etc. (§ 92), so ist offenbar *gf* zweimal, *kh* dreimal u. s. f. *ba* zehnmal so groſs, als *ed*, folglich: wenn *ab* einen Meter bedeutet, so ist $ed = 0{,}1$ m, $gf = 0{,}2$ m etc.



Der Gebrauch dieses zehnteiligen Maſsstabes ist nun leicht einzusehen. Wollte man z. B. eine Länge von 8 m 70 cm = 8,7 m in den Zirkel fassen, so setzt man den einen Zirkelfuſs auf die siebente Parallele in *v* und öffnet den Zirkel so weit, bis der andere Fuſs auf derselben Parallelen die achte Querlinie erreicht, so hat man die Linie $vz = 8,7$ m im Zirkel (weil $uz = 8$ m und $uv = 0,7$ m). Die unten stehenden Zahlen der Querlinien geben nämlich die ganzen Einheiten und die an den Parallelen stehenden Zahlen die Zehntel an.

111.



Lehrsatz. Parallelen zwischen den Schenkeln eines Winkels schneiden auf denselben proportionale Stücke ab.*)

In Zeichen:

Wenn: BG ∥ CH

so ist: AB : BC = AG : GH,

d. h. AB verhält sich eben so zu BC, wie AG zu GH; mit andern Worten: AB ist so oft in BC enthalten, als AG in GH.

Beweis. Sei, um ein bestimmtes Beispiel zu haben, AB in BC gerade dreimal enthalten. Denkt man sich dann BC in drei gleiche Teile geteilt und durch die Teilpunkte Parallelen zu BG gezogen, so ist, weil AC in vier gleiche Teile geteilt, auch AH in vier gleiche Teile geteilt (§ 108), mithin auch AG in GH gerade dreimal enthalten. — Wäre die Zahl, welche angiebt, wie oft AB in BC enthalten ist, keine ganze Zahl, wäre z. B. AB = 7 und BC gleich 24, also BC nun $3\frac{3}{7}$ mal so groſs, als AB, so kann man sich AB in 7 gleiche Teile und BC in 24 solcher gleichen Teile geteilt, durch die Teilpunkte wieder Parallelen mit GH gezogen denken, so ist dadurch auch AG in 7 und GH in 24 unter sich gleiche Teile geteilt, mithin auch GH dann $3\frac{3}{7}$ mal so groſs, als AG.

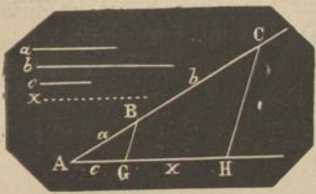
Beispiel. Es sei AB = 2,6 m, BC = 4,5 m, AG = 3,9 m. Wie groſs ist GH?

Antwort. Es ist 2,6 : 4,5 = 3,9 : GH, folglich

$$GH = \frac{4,5 \cdot 3,9}{2,6} = 6,75 \text{ m}.$$

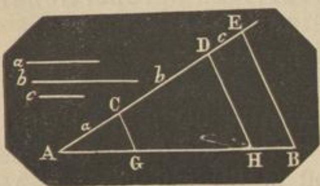
*) Die Lehre von den Proportionen gehört in die Arithmetik und zwar Algebra und muſs hier als bekannt vorausgesetzt werden. S. Algebra § 322.

112.



1. Aufgabe. Zu drei gegebenen Linien, *a*, *b*, *c*, die vierte Proportionale *x* durch Konstruktion zu suchen, so daſs $a : b = c : x$.

Auflösung. Man zeichne einen beliebigen Winkel, A, schneide auf dem einen Schenkel AB $= a$, BC $= b$ und auf dem andern Schenkel AG $= c$, ab, ziehe BG und dann CH $\parallel$ BG, so ist GH die gesuchte Linie *x*.

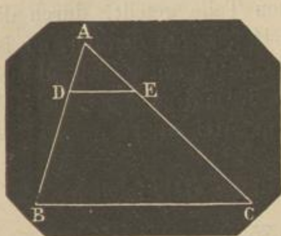


2. Aufgabe. Eine gegebene Linie, AB, so einzuteilen, daſs sich die Teile wie gegebene Linien, *a*, *b*, *c*..., verhalten.

Auflösung. Man ziehe aus dem Endpunkt A noch eine Linie, trage auf dieser von A aus, die gegebenen Linien, *a*, *b*, *c* ab, so daſs AC $= a$, CD $= b$ und DE $= c$ ist, verbinde den letzten Teilpunkt E mit B und ziehe dann DH und CG parallel mit EB, so verhalten sich die Teile auf AB, wie die auf AE (§ 111).

Zusatz. Soll eine Linie, AB, in Stücke geteilt werden, die sich wie gegebene Zahlen, z. B. 2, 5, 4, verhalten, so trage man eine beliebige Lineareinheit von A nach C zweimal, von C nach D fünfmal, von D nach E viermal ab, verbinde E mit B und ziehe DH und CG parallel mit EB.

113.



Lehrsatz. Die Linie, welche in einem Dreieck mit einer Seite parallel läuft, schneidet die beiden andern Seiten so, daſs sich die Abschnitte der einen Seite wie die entsprechenden der andern verhalten.

In Zeichen:

Wenn: DE $\parallel$ BC

so ist:

AD : DB = AE : EC,
AD : AB = AE : AC,
AB : BD = AC : CE.

Beweis. Nach § 111 ist erstlich AD : DB = AE : EC und da nun eine Linie in sich selbst einmal enthalten ist, so ist notwendig auch AD : (AD + DB) = AE : (AE + EC), oder was dasselbe ist: AD : AB = AE : AC. Wäre z. B. AD in BD dreimal enthalten, so wäre offenbar AD in AB einmal mehr, also viermal enthalten, und eben so AE in AC viermal.

In gleicher Weise mufs AB : BD = AC : CE sein.

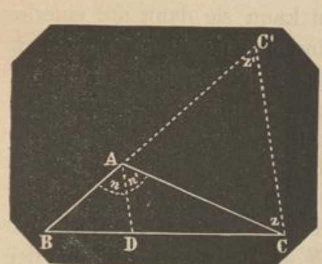
Schneidet umgekehrt eine Linie, DE, von den beiden Schenkeln des Winkels A dĕn gleichvielsten, z B. von jedem den fünften Teil ab, mit andern Worten: Ist AD : AB = AE : AC, so mufs auch DE parallel mit BC sein, weil nur die mit BC parallele Linie, welche den fünften Teil von AB abschneidet, auch denselben Teil von AC abschneidet.

114.

Lehrsatz. Ist BC ∥ DE (Fig. zu § 113), so ist AB : BC = AD : DE. Oder: Der Schenkel AB des △ ABC verhält sich zur Grundlinie BC wie der Schenkel AD des △ ADE zur Grundlinie DE.

Beweis. Denkt man sich durch D eine Parallele zu AC, die BC in F schneidet, so verhält sich nach § 113: AB : BC = AD : CF. Da aber CF = DE (s. § 92), so geht diese Proportion über in AB : BC = AD : DE.

115.



*) **Lehrsatz.** Die Linie, welche einen beliebigen Winkel eines Dreiecks halbiert, teilt die gegenüber liegende Seite so: dafs sich die beiden Teile (Abschnitte) derselben wie die beiden anderen Seiten des Dreiecks verhalten.

In Zeichen:

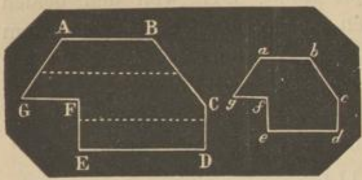
Wenn: $\angle n = \angle n' = \frac{1}{2} \angle BAC$ so ist: BD : DC = AB : AC.

Beweis. Man denke sich BA verlängert, so dafs AC′ = AC und verbinde C′ mit C, dann ist $\angle z = z'$ (§ 40) und da $n + n' = z + z'$ (§ 66), so ist, weil $n = n'$ und $z = z'$, $2n' = 2z$, also auch $n' = z$, daher AD ∥ C′C (§ 60) und folglich (§ 111) BD : DC = AB : AC, weil AC = AC′.

Elftes Buch.

Von der Ähnlichkeit der Figuren.

116.



Erklärung. Zwei Figuren heifsen ähnlich, wenn sie gleichwinkelig sind und die in gleicher Ordnung, zwischen gleichen Winkeln liegenden Seiten dasselbe Verhältnis zu einander haben. Je zwei solcher Seiten heifsen dann ähnlich liegende oder homologe.

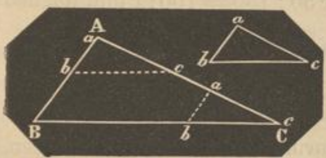
Wären z. B. die beiden Figuren ABCD..G und *abc..g* so konstruiert, dafs sie gleichwinkelig ($A = a$, $B = b$, $\ldots G = g$) und die ähnlich liegenden Seiten proportional, d. h. wenn AB z. B. dreimal so grofs, als *ab* wäre, dann auch jede andere Seite der gröfseren Figur dreimal so grofs, als die ähnlich liegende Seite der kleinern Figur wäre, nämlich BC dreimal so grofs als *bc*; CD dreimal so grofs als *cd* etc., so wären die beiden Figuren ähnlich, und man kann sie dann auf einerlei Weise konstruiert denken, die eine nur nach einem kleinern Mafsstab. Ähnliche Figuren haben nur verschiedene Gröfse, in allem Übrigen, — Form und Eigenschaften — sind sie gleich.

Die zum Begriff der Ähnlichkeit erforderlichen zwei Merkmale, Gleichheit der Winkel und Proportionalität der Seiten, müssen aber, wohl gemerkt, gleichzeitig vorhanden sein, denn es können zwei sehr unähnliche Figuren eines dieser Merkmale ohne das andere gemein haben. Man kann sich z. B. aus der Figur ABC...G, durch die mit AB und ED angedeuteten parallelen Linien, eine andere Figur herausgeschnitten denken, welche vermöge § 60, Zusatz 1, noch dieselben Winkel hat, bei der das Verhältnis der Seiten aber nicht mehr dasselbe ist. Eben so kann man sich die Seiten der einen Figur ABG...G um die Eckpunkte gedreht (verschoben) denken, wobei noch das Verhältnis der Seiten dasselbe bleibt, die Gleichheit der Winkel aber gestört ist.

Nur bei Dreiecken folgt eins dieser zur Ähnlichkeit erforderlichen Merkmale aus dem andern, und, so wie über die Kongruenz ($\cong$) der Dreiecke, haben wir uns hier nun auch über die Ähnlichkeit ($\sim$) derselben die folgenden wichtigen Lehrsätze (die vier Ähnlichkeitssätze) wohl zu merken, weil auf diese alle übrigen, die Ähnlichkeit der Figuren betreffenden, wichtigen Sätze sich gründen, indem alle ähnliche Figuren in Netze von ähnlichen Dreiecken zerlegt werden können.

Anmerkung. Aus der Voraussetzung: $ab : AB = bc : BC = cd : CD =$ etc., folgt: $ab : bc : cd : .. = AB : BC : CD : ...$ Statt also zu sagen: zwei Figuren heifsen ähnlich, wenn sie gleichwinklig sind und proportionale Seiten haben, könnte man auch sagen: zwei Figuren heifsen ähnlich, wenn die Seiten der einen Figur dieselbe Lage und dasselbe Verhältnis zu einander haben, wie die der andern.

117.



1. Ähnlichkeitssatz. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn zwei Winkel des einen gleich zwei Winkel des andern sind.

In Zeichen:

Wenn:	so ist notwendig:
$\angle a = \angle A$	$\angle c = \angle C.$
$\angle b = \angle B$	$ab : AB = ac : AC = bc : BC$
	$\triangle abc \sim \triangle ABC.$
	(Lies: $\triangle abc$ ähnlich $\triangle ABC$.)

Beweis. Zunächst mufs nach § 65, Zusatz 2, $\angle c = \angle C$ sein. Denkt man sich ferner das kleinere Dreieck übereinstimmend so auf das grofse gelegt, dafs zwei gleiche Winkel, a, A, sich decken, so ist, weil $\angle b = \angle B$, die Linie bc parallel mit BC (§ 60, Zusatz), mithin auch (§ 113) $ab : AB = ac : AC$ und (nach § 114) $ab : AB = bc : BC$.

1. Zusatz. Zieht man daher in einem $\triangle ABC$ eine Parallele bc zu einer Seite BC, so entsteht ein $\triangle Abc$, welches jenem $\triangle ABC$ ähnlich sein mufs.

2. Zusatz. In ähnlichen Dreiecken sind die den gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten proportional.

118 a.

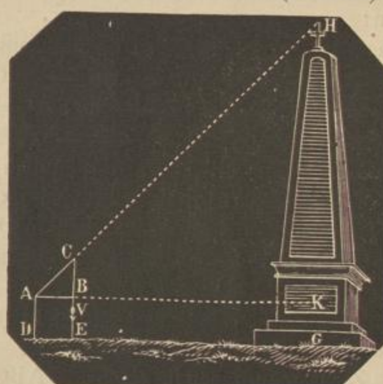
Aufgabe. Die Entfernung eines unzugänglichen Punktes, A, von einem Punkte, B, zu bestimmen.

Auflösung. Von B aus messe 2 beliebige in gerader Linie liegende Längen Bb, bC ab (indem man die Punkte C und b mit Meſsstangen bezeichnet). Von b aus stecke man eine Linie ab so ab, daſs $\angle$ ABC $=$ abC (z. B. mittelst des Winkelkreuzes $= 90^0$) und der Endpunkt a mit C und A in einerlei Richtung liegt. Miſst man alsdann noch die Linie ab, so kann man die Länge von AB durch eine einfache Proportion finden.

Nach Konstruktion ist nämlich: $\triangle\, abC \sim \triangle\, ABC$ (§ 117), daher: $bC : BC = ab : AB$. Hätte man z. B. $BC = 150$ m, $bC = 50$ m, $ab = 100$ m, so wäre $50 : 150 = 100 : x$ und folglich $x = \frac{100 . 150}{50}$ oder $x = 300$ m $=$ AB.

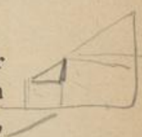
118 b.

Aufgabe. Die Höhe eines Turmes (Baumes) zu bestimmen.



Auflösung. In einerlei Richtung und parallel mit HG stecke in D und E zwei Meſsstangen ein, lege daran eine dritte Meſsstange so, daſs, wenn man über dieselbe hin visiert, die Visierlinie durch den Punkt H geht, messe dann DG, DE, AD und CE, so kann man (AK ∥ DG gedacht) durch eine einfache Proportion, HK, berechnen, welches zu AD addiert, die gesuchte Höhe giebt.

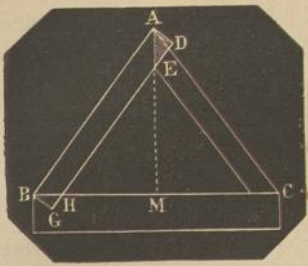
Nach Konstruktion ist $\triangle$ ABC $\sim$ $\triangle$ AKH (§§ 117 und 61, Zusatz). Wäre z. B. gemessen DG = 100 m, DE = 5 m, AD = 2 m, CE = 6 m, also BC = CE − AD = 4 m, so hat man (§ 117): AB : AK = BC : KH, oder, indem man die Zahlen setzt: $5 : 100 = 4 : x$, woraus $x = \frac{4 . 100}{5} = 80$ = HK, mithin HG = 80 + 2 = 82 m.



Zusatz. Viel bequemer kann man die Höhen zugänglicher Gegenstände messen, indem man sich zu diesem Zweck ein rechtwinkliges Dreieck, ABC, verfertigt, dessen Katheten, AB, BC, gleich lang sind. Dieses Dreieck kann man entweder frei in der Hand halten, oder noch besser an einem Stab, AD, befestigen und dann leicht in eine solche Lage bringen, daſs die Kathete CB mit dem in C befestigten Senkblei CV zusammenfällt, also vertikal und mit HG parallel wird. Hat man sich nun mit diesem einfachen Instrument so weit vom Gegenstande HG entfernt, bis man durch Visieren wahrnimmt, daſs die Hypotenuse AC genau auf die Spitze H zielt, so messe man nur (durch Abschreiten) die Linie DG und addiere hierzu die Höhe des Auges AD, so hat man HG, denn weil nach Voraussetzung AB = BC, $\angle$ B = 90°, also $\angle$ A = $\angle$ C = $\angle$ H = 45°, so ist auch KH = AK = DG, mithin HG = DG + AD. Forstmänner messen auf diese Weise die Höhen der Bäume.

118c.

Aufgabe. Zwei gleich lange viereckige Balken, AB = AC = 10 m, sollen über einen dritten, BC = 12 m, dachförmig aufgerichtet werden. Damit die Balken nun genau an einander passen, muſs offenbar erst von beiden gleich langen Balken, AB, AC, oben ein dreieckiges Stück, ADE, und unten ein dreieckiges Stück, BGH, nach den Linien AE und BH abgesägt werden. Um nun diese Richtungen AE und BH zuvor angeben zu können, kommt es nur darauf an, die Punkte E und H zu bestimmen, oder die Längen DE und GH zu berechnen. Wie findet man diese, wenn die Breite AD = BG = $\frac{1}{3}$ m ist?



Auflösung. Zuerst hat man die Höhe $AM = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ m (§ 107). Ferner sind die Dreiecke AED und ABM ähnlich, denn jedes hat einen rechten Winkel (D = M), außerdem ist $\angle$ AED = $\angle$ BAM (§ 61, Zusatz); mithin (§ 117):

$$DE : AD = AM : BM$$
$$\text{oder } DE : \tfrac{1}{3} = 8 : 6$$
$$\text{und hieraus: } DE = \frac{8 . \frac{1}{3}}{6} = \tfrac{4}{9} \text{ m} = 44{,}4 \text{ cm.}$$

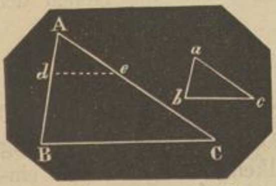
$$\text{Ferner ist } \triangle BGH \sim \triangle ABM$$
$$\text{daher } GH : BG = BM : AM$$
$$GH : \tfrac{1}{3} = 6 : 8$$
$$\text{folglich: } GH = \frac{6 . \frac{1}{3}}{8} = \tfrac{1}{4} \text{ m} = 25 \text{ cm.}$$

119.

2. Ähnlichkeitssatz. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie zwei Seitenverhältnisse gleich haben.

In Zeichen:

Wenn:	so ist:
$ab : AB = ac : AC$,	$A = a$, $B = b$, $C = c$.
$ab : AB = bc : BC$,	$\triangle ABC \sim \triangle abc$.



Beweis. Dieser Satz ist die Umkehrung von § 117. Um die Richtigkeit an einem bestimmten Beispiel zu zeigen, mögen die Seiten des größern Dreiecks dreimal so groſs, als die des kleinern sein. Denkt man sich nun auf AB ein Stück, $Ad = ab$, abgeschnitten und $de \parallel BC$ gezogen, so ist $\triangle Ade \sim \triangle ABC$ (§ 117). Weil nun $Ad = ab$ der dritte Teil von AB, so ist auch Ae der dritte Teil von AC und de der dritte Teil von BC, mithin $Ae = ac$, $de = bc$, daher $\triangle Ade \cong \triangle abc$. Setzt man nun $\triangle abc$ an die Stelle von $\triangle Ade$ in jener Ähnlichkeitsbeziehung $\triangle Ade \sim \triangle ABC$, so ist auch $\triangle abc \sim \triangle ABC$, $\angle a = A$, $\angle b = B$, $\angle c = C$.

120.

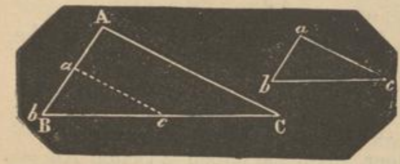
3. Ähnlichkeitssatz. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie ein Seitenverhältnis und den von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel gleich haben.

In Zeichen:

Wenn: so ist:

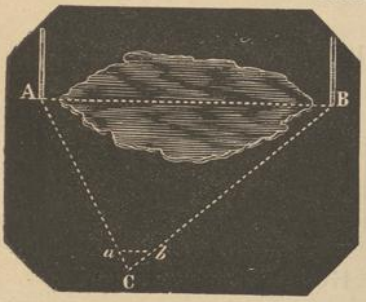
$\angle b = \angle B$

$ab : AB = bc : BC,$ $\triangle abc \sim \triangle ABC.$



Beweis. Denkt man das kleinere Dreieck so auf das gröfsere gelegt, dafs die als gleich vorausgesetzten Winkel b und B sich decken und ab auf AB, also bc auf BC fällt, so mufs, weil vermöge Voraussetzung $ab : AB = bc : BC$, die Linie ac parallel mit AC sein (§ 114), folglich $a = A$, $c = C$ (§ 61, Zusatz); die Dreiecke sind also gleichwinklig, folglich ähnlich.

121.



Aufgabe. Den Abstand zweier Punkte, A und B, auf kürzere Weise zu bestimmen, als in § 36 gelehrt.

Auflösung. Man bezeichne einen dritten Punkt, C, messe die Linien AC und BC, trage von beiden die gleichvielsten Teile nach b und a ab, so dafs, wenn z. B. bC der zehnte Teil von BC, dann auch ac der zehnte Teil von AC ist, alsdann mufs ab der ebensovielste Teil von AB sein (§ 120). Mifst man also noch ab und multipliziert diese Länge mit 10, so hat man AB.

122.

4. Ähnlichkeitssatz. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie ein Seitenverhältnis und den der gröfsern dieser beiden Seiten gegenüberliegenden Winkel gleich haben. (Fig. zu § 119.)

Wenn:	so ist:
$ab : \mathrm{AB} = ac : \mathrm{AC}$,	$\angle a = \mathrm{A}$, $\angle c = \mathrm{C}$
$\angle b = \angle \mathrm{B}$,	$\triangle abc \sim \triangle \mathrm{ABC}$.
$\angle b > \angle c$,	

Beweis. Mache Ad = ab und ziehe $de \parallel$ BC, so ist Ade, $\sim \triangle$ ABC (§ 117 Zusatz). Ist nun

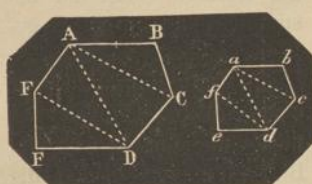
AC $1\frac{1}{2}$ mal so grofs als ac, so ist auch
APb $1\frac{1}{2}$ „ „ „ „ Ab, folglich auch
AB $1\frac{1}{2}$ „ „ „ „ Ad

und da die $\triangle\triangle$ Ade und ABC als ähnliche Dreiecke gleiche Seitenverhältnisse haben müssen, auch

AC $1\frac{1}{2}$ mal so grofs als Ae.

Folglich mufs ac = Ae sein. Nach § 43 sind nun die $\triangle\triangle$ Ade und abc kongruent, denn sie haben 2 Seiten Ad = ab, Ae = ac und den der letztern gröfsern Seite (§ 55 und § 43) gegenüberliegenden Winkel gleich ($\angle d = \angle b$). Mithin kann in jener Ähnlichkeitsbeziehung $\triangle$ A$de \sim \triangle$ ABC an die Stelle von $\triangle$ Ade das $\triangle$ abc gesetzt werden und es ergiebt sich $\triangle abc \sim \triangle$ ABC.

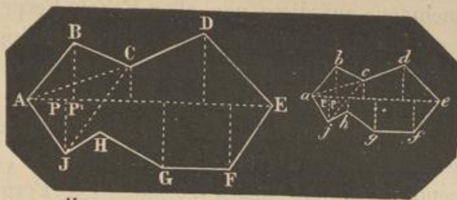
123.



Lehrsatz. Ähnliche Figuren können in ähnliche Dreiecke zerlegt werden, und je zwei ähnlich liegende Diagonalen verhalten sich wie zwei ähnlich liegende Seiten.

Beweis. Seien die beiden Figuren $abc..f$ und ABC..F ähnlich (§ 116). Dann ist zuerst $\triangle abc \sim \triangle$ ABC, weil nach Voraussetzung $\angle b = \angle$ B und $ab : \mathrm{AB} = bc : \mathrm{BC}$, folglich (§ 120) auch $ac : \mathrm{AC} = ab : \mathrm{AB}$ und $\angle acb = \angle$ ACB, und da nach Voraussetzung $\angle bcd = \angle$ BCD, so ist nach Abzug der Winkel acb und ACB auch: $\angle acd = \angle$ ACD. Ferner ist nun auch $\triangle acd \sim \triangle$ ACD, weil $\angle acd = \angle$ ACD und $ac : \mathrm{AC} = cd : \mathrm{CD}$, daher auch (§ 120) $ad : \mathrm{AD} = cd : \mathrm{CD}$. Eben so zeigt man, dafs $\triangle adf \sim \triangle$ ADF, $\triangle fde \sim$ FDE.

124.



Aufgabe. Über eine gegebene Linie, *ab*, eine Figur zu konstruieren, welche einer andern Figur, ABC...J, ähnlich ist.

Auflösung 1. Man denke sich die Figur ABC..J in zusammenhängende Dreiecke zerlegt, trage dann an die Bildseite *ab* die Winkel *cab* = CAB und *cab* = CBA, so ist △ *abc* ∾ △ ABC (§§ 117 und 65, Zusatz 4); an die Seite *ac* trage man nun die Winkel *caj* = CAJ, *acj* = ACJ, so ist auch △ *acj* ∾ △ ACJ. Auf diese Weise müſste man zwar, wie aus § 123 folgt, eine ähnliche Figur erhalten, weil jedoch das viele Winkelzeichnen zu umständlich und unsicher, so ist dieses Verfahren praktisch nicht anwendbar.

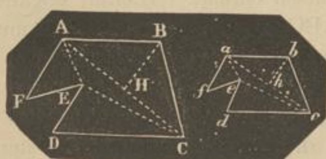
2. Hat man einen sogenannten Reduktionszirkel, d. i. einen Doppelzirkel, dessen Gewinde, in beiden Schenkeln zugleich, verschiebbar, durch eine Schraube festgestellt und mithin die Länge des einen Schenkelpaars in jedem beliebigen Verhältnis zum andern verkürzt werden kann, so stelle man zuerst diesen Zirkel so: daſs, wenn man mit dem einen Schenkelpaar die Originalseite AB faſst, das andere Paar Schenkel die Bildseite *ab* zwischen seinen Spitzen enthält. Hierauf zeichne man alle Dreiecke der Figur ABC...J so ab: daſs man mit dem ersten Schenkelpaar die Seiten der Originaldreiecke abnimmt und mit dem andern Schenkelpaar (umgewandten Zirkel), welches dann jedesmal die ähnlich liegende (reduzierte) Seite faſst, zeichnet; alsdann muſs die zweite Figur der ersten ähnlich werden (§ 119), denn je zwei gleichseitig zwischen beiden Schenkelpaaren enthaltenen Linien verhalten sich immer wie die Längen der Schenkel (§ 120). Enthält die Figur krumme Linien, so muſs man diese durch einzelne Punkte, je mehr, je besser, bestimmen und diese Punkte durch einen freien Handzug verbinden (vergl. § 42, 2. Aufgabe).

3. In vielen Fällen ist es bequemer, statt die ähnlich abzubildende Figur in Dreiecke zu zerlegen, innerhalb oder

aufserhalb derselben eine schickliche Grundlinie, hier z. B. AE, anzunehmen, auf diese von allen Ecken Perpendikel, JP, BP′ etc., zu fällen, dann mit dem, zuvor richtig gestellten Reduktionszirkel die Grundlinie AE zu fassen und ihre durch den Zirkel reduzierte Länge in *ae* abzuschneiden, hierauf die reduzierten Längen von AP, AP′...(Abscissen) nämlich *ap*, *ap′*... abzuschneiden. Durch die Endpunkte *p*, *p′*... ziehe man Perpendikel auf *ae* und trage auf diese Perpendikel die reduzierten Längen der Perpendikel (Ordinaten) JP, BP..., nämlich *jp*, *bp*... ab etc.

4. Statt eines Reduktionszirkels kann man sich auch eben so gut eines verjüngten Mafsstabes bedienen. Man mifst dann nach einem solchen Mafsstabe alle Dreiecksseiten der ähnlich nachzubildenden Figur oder die Perpendikel AP, AP′.. JP, BP′..(Abscissen und Ordinaten), dividiert oder multipliziert ihre Längen mit der Reduktionszahl, welche angiebt, wie viel mal so grofs oder so klein die Seiten der Abbildung sein sollen, als die des Originals, und trägt dann die gefundenen Zahlen, von demselben Mafsstabe abgenommen, gehörig auf. — Konstruiert man noch einen zweiten Mafsstab, auf welchem die Einheit so viel mal so klein oder so grofs ist, als die bestimmte Reduktionszahl vorschreibt, so kann man, ohne erst dividieren oder multiplizieren zu brauchen, die nach ersterem Mafsstab gemessenen Längen unmittelbar vom zweiten abmessen.

125.



Lehrsatz. Die Umfänge ähnlicher Figuren verhalten sich wie zwei ähnlich liegende Seiten, ihre Inhalte aber wie die Quadrate ähnlich liegender Seiten.

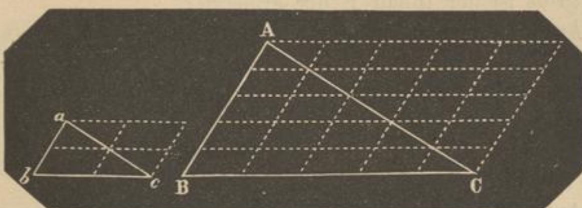
Ist $abc\ldots f \sim ABC\ldots F$ und bedeuten u, U die Umfänge, f und F die Flächeninhalte, so ist, in Zeichen:

$$1)\ u : U = \overline{ab} : \overline{AB}$$

$$2)\ f : F = \overline{ab}^2 : \overline{AB}^2.$$

Beweis. Sei, um zuerst ein bestimmtes Beispiel zu haben, das Verhältnis der ähnlich liegenden Seiten wie 1 zu 3, d. h. jede Seite der gröfsern Figur sei dreimal so grofs, als die ähnlich liegende der kleinern, alsdann ist offenbar auch die Summe aller Seiten der gröſsern Figur, d. i. ihr Umfang, dreimal so groſs, als der Umfang der kleinern Figur. Verhielten sich die ähnlich liegenden Seiten wie 3 : 7, d. i. wie 1 : $2\frac{1}{3}$, so wäre der Umfang der gröſsern Figur $2\frac{1}{3}$ so groſs als der Umfang der kleinern.

2. Der zweite Teil des Lehrsatzes muſs zuerst für zwei ähnliche Dreiecke bewiesen werden.*) Seien deshalb *abc*, ABC zwei ähnliche Dreiecke, deren Seiten sich z. B. wie 2 zu 5 verhalten mögen. Denkt man sich die Seiten *bc* und *ab* jede in 2 und BC und AB jede in fünf gleiche Teile geteilt,



so sind die Teile auf *bc* und BC einander gleich und eben so die auf *ab* und AB. Denkt man sich nun die Dreiecke zu Parallelogrammen ergänzt, durch die Teilpunkte auf *bc* und BC Parallelen mit *ab*, AB und durch die Teilpunkte auf *ab* und AB Parallelen mit *bc*, BC gezogen, so wird dadurch offenbar das eine Parallelogramm in $2 . 2 = 4$ und das andere in $5 . 5 = 25$ Parallelogramme geteilt, welche alle einander gleich sind. Da sich nun die Inhalte beider Parallelogramme wie 4 zu 25 verhalten, so müssen sich auch ihre Hälften, d. i. die Inhalte der ähnlichen Dreiecke *abc* und ABC wie 4 zu 25 verhalten, mithin der Inhalt des Dreiecks ABC $= \frac{25}{4} = 6\frac{1}{4}$ mal so groſs sein, als der Inhalt von *abc*. Verhielten sich die Seiten zweier ähnlichen Dreiecke wie 1 zu 4, so verhalten sich

---

*) Am kürzesten ist der Beweis folgendermaſsen: Die Perpendikel *bh*. BH gefällt, hat man $\frac{AC}{ac} = \frac{BC}{bc}$ oder $\frac{\frac{1}{2}AC}{\frac{1}{2}ac} = \frac{BC}{bc}$ und $\frac{BH}{bh} = \frac{BC}{bc}$; die beiden letztern Gleichungen mit einander multipliziert: $\frac{\frac{1}{2}AC \,.\, BH}{\frac{1}{2}ac \,.\, bh} = \frac{BC \,.\, BC}{bc \,.\, bc}$ oder $\frac{\triangle ABC}{\triangle abc} = \frac{BC^2}{bc^2}$ etc. (§ 102.)

ihre Inhalte wie 1 zu 16 etc. Ähnliche Figuren kann man in ähnliche Dreiecke zerlegt denken. Verhielten sich nun die Seiten zweier ähnlichen Figuren, $abc\ldots f$ und $ABC\ldots F$, z. B. wie 1 zu 3, so wäre offenbar jedes Dreieck der gröſsern Figur 9 mal so groſs, als ein ähnliches der kleinern, und folglich wäre dann auch die Summe aller Dreiecke der gröſsern Figur, d. i. ihr Inhalt 9 mal so groſs, als der der kleinern. Verhielten sich die Seiten wie 2 : 7, so verhalten sich die Inhalte wie 4 : 49 und so bei jedem andern Zahlenverhältnis.

Aufgabe 1. Die ähnlich liegenden Seiten verhalten sich wie 2 : 5, der Inhalt der kleinern Figur ist $f = 560$ qm. Wie groſs ist der Inhalt F der gröſsern?

Aufgabe 2. Der Inhalt der kleinern Figur sei = 400 qm, ihre Grundlinie = 13 m. Wie groſs muſs die Grundlinie x einer ähnlichen Figur genommen werden, damit der Inhalt derselben = 800 qm?

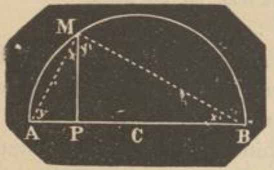
Antwort 1. Aus der Proportion $560 : F = 2^2 : 5^2$ folgt $F = 3500$ qm.

Antwort 2. Aus $13^2 : x^2 = 400 : 800$ folgt $x = 13\sqrt{2} = 18{,}385$ m.

Zwölftes Buch.

Proportionen beim Kreise.

126.



Lehrsatz. Das Perpendikel MP von einem beliebigen Punkt der Peripherie auf den Durchmesser ist die mittlere Proportionale zwischen den beiden Abschnitten AP und PB des Durchmessers.*)

Oder: Die vom Scheitel des rechten Winkels eines rechtwinkligen Dreiecks auf die Hypotenuse gefällte Senkrechte MP ist das geometrische Mittel zwischen den Abschnitten der Hypotenuse.

In Zeichen:

$$AP : MP = MP : PB.$$

Beweis. Zieht man die beiden Sehnen AM, BM, so entstehen dadurch drei ähnliche Dreiecke,**) denn weil $\angle AMB = R$ (§ 81) und nach Voraussetzung $\angle MPB = R$, so ist $x + y' = x + y = x' + y' = R$, also $y = y'$ und $x = x'$, daher $\triangle APM \sim \triangle BPM \sim \triangle AMB$. Da nun in ähnlichen Dreiecken die den gleichen Winkeln gegenüber liegenden Seiten proportional sind (§ 117, 2. Zus.), so folgt aus den beiden kleinern Dreiecken die im Lehrsatz behauptete Proportion $AP : MP = MP : PB$.

---

*) Wenn in einer Proportion die beiden innern Glieder gleich sind, wie in $2 : 6 = 6 : 18$, so heifst die Proportion eine stetige und eins der gleichen mittlern Glieder die mittlere Proportionale oder das geometrische Mittel zu den beiden äussern; so ist hier z. B. 6 die mittlere Proportionale zu 2 und 18.

**) Der Anfänger wird wohl thun, diese drei Dreiecke getrennt zu zeichnen.

Zusatz 1. Vergleicht man jedes der kleinern Dreiecke mit dem grofsen, so ergiebt sich noch ein anderer wichtiger Satz, nämlich: jede der beiden Sehnen ist die mittlere Proportionale zwischen dem anliegenden Abschnitt des Durchmessers und dem ganzen Durchmesser. Oder: Jede Kathete ist das geometrische Mittel zwischen dem anliegenden Abschnitt der Hypotenuse (begrenzt durch die Höhe auf derselben) und der Hypotenuse selbst, denn weil $\triangle$ APM $\sim$ $\triangle$ AMB, so ist (§ 117):

$$AP : AM = AM : AB$$

und weil $\triangle$ BPM $\sim$ $\triangle$ AMB, so ist auch

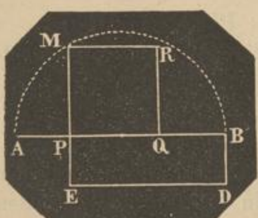
$$PB : BM = BM : AB.$$

Zusatz 2. Aus den beiden letztern Proportionen folgt noch ein anderer und zwar arithmetischer Beweis für den Pythagoräischen Lehrsatz. Man hat nämlich $AP . AB = \overline{AM}^2$; $PB . AB = \overline{BM}^2$. Addiert man mithin beide Gleichungen und berücksichtigt, dafs $AP . AB + PB . AB = (AP + PB)\, AB = AB . AB$, so folgt $\overline{AB}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{BM}^2$.

Aufgabe. Es sei $AP = 9$, $PB = 16$. Wie grofs ist MP?

Antwort. Es ist $MP = \sqrt{9.16} = \sqrt{144} = 12$.

127.



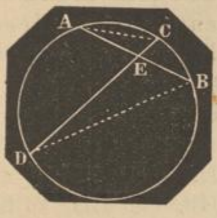
Aufgabe. Ein Quadrat zu zeichnen, welches so grofs ist, als ein gegegebenes Rechteck, mit anderen Worten: ein gegebenes Rechteck, PBDE, in ein an Inhalt gleiches Quadrat zu verwandeln.

Auflösung. Es kommt nur darauf an, zu den beiden gegebenen Seiten des Rechtecks PE und PB die mittlere Proportionale x zu finden, so dafs $PE : x = x : PB$, denn dann ist $x^2 = PE . PB$. (§ 99).

Man füge also PE geradlinig an PB, so dafs $AP = PE$, beschreibe über AB, als Durchmesser, einen Halbkreis, errichte in P auf AB das Perpendikel MP, so ist das über dieses Perpendikel konstruierte Quadrat MPQR das verlangte, weil nach § 126 $\overline{MP}^2 = AP . PB = PE . PB$.

Zusatz. Um ein Quadrat zu zeichnen, welches beliebig vielmal, z. B. $2\frac{3}{4}$ mal so groſs ist, als ein gegebenes Quadrat, mache man die eine Seite desselben $2\frac{3}{4}$ mal so lang und verwandele das erhaltene Rechteck in ein Quadrat.

128.



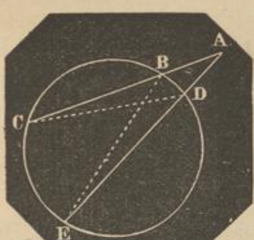
*) **Lehrsatz.** Wenn zwei Sehnen im Kreise sich schneiden, so ist das Produkt aus den beiden Abschnitten der einen Sehne gleich dem Produkt aus den beiden Abschnitten der andern Sehne.

In Zeichen:

$$AE.EB = CE.ED.$$

Beweis. Man ziehe die Hilfslinien AC und BD, so sind die beiden entstehenden Dreiecke gleichwinklig und folglich ähnlich, denn nach § 80 ist $\angle A = \angle D = \frac{\text{arc } BC}{2}$ und $\angle C = \angle B = \frac{\text{arc } AD}{2}$. Daher (§ 117) $\triangle AEC \sim \triangle BED$. Setzen wir nun ähnlich liegende Seiten in Proportion, so ist: $AE : DE = CE : BE$ und hieraus: $AE.BE = CE.DE$. Wäre z. B. $AE = 4$ m, $EB = 3$ m, $CE = 2$ m, so müſste $DE = \frac{3.4}{2} = 6$ m sein.

129.



*) **Lehrsatz.** Wenn zwei Sekanten (verlängerte Sehnen) sich auſserhalb des Kreises schneiden, so sind die Produkte aus jeder ganzen Sekante und ihrem auſserhalb liegenden Teile gleich.

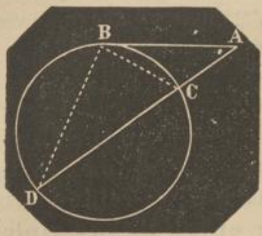
In Zeichen:

$$AC.AB = AE.AD.$$

Beweis. Denkt man sich die Hilfslinien CD und BE gezogen, so sind die beiden Dreiecke ADC und ABE ähnlich; beide haben nämlich den Winkel A gemein und dann die auf demselben Bogen BD stehenden Peripheriewinkel C und E gleich (§ 80). Die ähnlichen Dreiecke geben nun die Proportion $AD : AB = AC : AE$ und hieraus $AB.AC = AD.AE$.

7*

130.



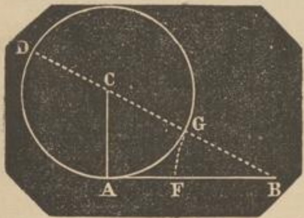
Lehrsatz. Wenn man von einem Punkt A, aufserhalb des Kreises eine Tangente, AB, und eine Sekante, AD, zieht, so ist die Tangente die mittlere Proportionale zu der ganzen Sekante und ihrem aufserhalb liegenden Teile.

In Zeichen:

$$AC : AB = AB : AD.$$

Beweis. Zieht man die Hilfslinien BC und BD, so ist $\triangle ABC \sim \triangle ADB$, denn beide haben den Winkel A gemein und aufserdem, nach § 84, $\angle D = \angle ABC$, daher (§ 117) $AC : AB = AB : AD$.

131.



*) **Aufgabe.** Eine gegebene Linie, AB, nach stetiger Proportion, nämlich so in F zu teilen, dafs sich die ganze Linie AB zum gröfsern Teile BF, wie dieser zum kleinern Teil AF verhält.

Anmerkung. Diese Teilung nennt man den goldenen Schnitt.

Auflösung. In dem einen Endpunkt A errichte auf AB eine Senkrechte $AC = \frac{1}{2} AB$, beschreibe aus C mit CA einen Kreis, ziehe BC, welche den Kreis in G schneidet, mache $BF = BG$, so ist F der verlangte Teilungspunkt.

Beweis. Verlängere BC nach D, so ist (§ 130):

$$BD : AB = AB : BG,$$

also auch: $AB : BD - AB = BG : AB - BG$, d. i.

weil $BD - AB = BD - DG = BG = BF$

und $AB - BG = AB - BF = AF$,

$$AB : BF = BF : AF.$$

Dreizehntes Buch.

Von den regelmäſsigen Vielecken. Berechnung des Umfangs und Inhalts des Kreises.

132.

Erklärung. Ein Vieleck heiſst regelmäſsig, wenn alle Seiten und alle Winkel gleichgroſs sind.

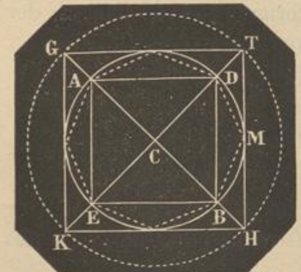
Denkt man sich einen Kreis in eine beliebige Anzahl gleicher Bögen geteilt, so würden die dazu gehörenden Sehnen, sowie auch die Peripheriewinkel, welche je zwei Sehnen mit einander bilden, gleich und somit das dadurch entstehende Vieleck, der Erklärung gemäſs, ein regelmäſsiges sein.

Könnte man also einen Kreis in jede beliebige Anzahl gleicher Bögen teilen, so könnte man auch, indem man nur die Sehnen zöge, ein jedes regelmäſsige Vieleck von beliebiger Seitenzahl zeichnen.

Die allgemeine Lösung dieser Aufgabe aber ist auf streng geometrische Weise, d. h. nicht durch Probieren, sondern durch, auf bestimmte Gesetze und Regeln gegründete Konstruktion, bis jetzt noch keinem Mathematiker gelungen und diese Aufgabe: ein beliebiges regelmäſsiges Vieleck von bestimmter Seitenzahl zu konstruieren, gehört daher zu den bis jetzt noch ungelösten.

In folgenden wenigen Fällen jedoch, wo der Kreis in 3, 4, 5, 15, so wie in die durch wiederholtes Verdoppeln dieser Zahlen angegebenen gleichen Teile geteilt werden soll, ist die Auflösung möglich.

133.



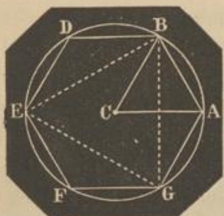
Aufgabe. Einen Kreis in vier gleiche Teile zu teilen, und ein regelmäſsiges Viereck zu konstruieren.

Auflösung. Man ziehe zwei auf einander senkrechte Durchmesser, so teilen diese den Kreis in vier gleiche Bögen. Zieht man die Sehnen, so hat man auch das regelmäſsige Viereck ADBE, welches offenbar ein Quadrat ist. Der Beweis ist leicht.

Zusatz 1. Um ein regelmäſsiges Viereck um den Kreis zu beschreiben, dessen Seiten mit den des eingeschriebenen parallel sind, halbiere man einen der Bögen in M (§ 71), ziehe durch M eine Tangente, welche die verlängerten Radien CD, CB in T und H schneidet, dann ist HT eine Seite des umgeschriebenen Vierecks, welche man nur in dem mit CT beschriebenen zweiten Kreise herumzutragen braucht.

Zusatz 2. Durch fortgesetztes Halbieren der Bögen erhält man die regelmäſsigen Vielecke von 8, 16, 32,... Seiten.

134.



Aufgabe. Einen Kreis in sechs gleiche Teile zu teilen und ein regelmäſsiges Sechseck zu zeichnen.

Auflösung. Man trage von einem Punkt, A, aus, den Radius CA, als Sehne, unmittelbar in der Peripherie herum, AB, BD etc., so erreicht man beim sechsten Male den Punkt A wieder und die Aufgabe ist gelöst.

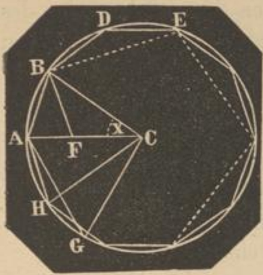
Beweis. Um zu zeigen, daſs der Radius AC = AB wirklich die Seite des Sechsecks ist, denke man noch BC gezogen, so folgt aus dem gleichseitigen und folglich auch gleichwinkligen Dreieck ABC, daſs $\angle C = 60^0$ (§ 65, Zusatz 3), folglich ist $\angle C$ der sechste Teil von 360^0, also auch der über dem Radius AB ausgespannte Bogen AB der sechste Teil vom Kreise.

Zieht man BE, BG, EG, so erhält man das regelmäſsige Dreieck im Kreise, und durch fortgesetztes Halbieren der Bögen die regelmäſsigen Vielecke von 12, 24, 48,.. Seiten.

135.

*) **Aufgabe.** In einem Kreise ein regelmäſsiges Zehneck zu zeichnen.

Auflösung. Man teile den Radius AC in F nach stetiger Proportion (§ 131), so ist der gröſsere Teil FC die Seite des Zehnecks.



Beweis. Nimmt man AB $=$ FC, zieht BF und BC, so kann man zeigen, daſs der Winkel x wirklich der zehnte Teil von vier Rechten oder $= \frac{360^0}{10} = 36^0$ und folglich AB $=$ FC die Seite des Zehnecks ist. Denn nach Voraussetzung ist AF : FC $=$ FC : AC, also, weil AB $=$ FC, auch : AF : AB $=$ AB : AC. Die beiden Dreiecke ABF und ABC haben also, auſser dem gemeinschaftlichen Winkel A, zwei ihn einschlieſsende proportionierte Seiten, sind folglich ähnlich (§ 120) und daher gleichwinklig, mithin $\angle$ ABF des $\triangle$ ABF $= \angle\, x$ des $\triangle$ ABC und die Winkel A und F des $\triangle$ ABF gleich den Winkeln A und B des $\triangle$ ABC. Da aber diese beiden Winkel A und B einander gleich sind, so müssen es auch jene Winkel A und F sein und folglich ist BF $=$ AB (s. § 40, Zusatz). Weil aber nach der Konstruktion auch CF $=$ AB, so ist BF $=$ CF, daher $\angle$ CBF $= x$. Nun ist $\angle$ ABC $= \angle$ ABF $+ \angle$ CBF $= x + x = 2\,x$ und $\angle$ A $= \angle$ ABC $= 2\,x$. Die drei Winkel des $\triangle$ ABC betragen mithin $x + 2\,x + 2\,x = 5\,x$, aber auch (s. § 65) $= 180^0$, folglich $x = 36^0$.

Ist BD $=$ DE $=$ AB, so ist BE die Seite des regelmäſsiges Fünfecks. Man kann also ein regelmäſsiges Vieleck von 5, 10, 20, 40, 80 . . . Seiten zeichnen. (§ 195, Anmerkung.)

Zusatz. Ist AG die Seite des regelmäſsigen Sechsecks, AH die des Zehnecks, so ist $\angle$ HCG $= 60^0 - 36^0 = 24^0 = \frac{360^0}{15}$, folglich GH die Seite des regelmäſsigen Fünfzehnecks. Man kann also auch noch regelmäſsige Vielecke von 15, 30, 60 . . . Seiten zeichnen.

136.

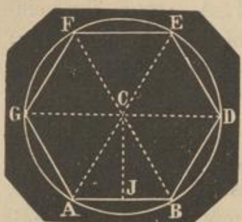
Aufgabe 1. Den rechten Winkel in drei gleiche Teile zu teilen. (NB. Der rechte Winkel ist, auſser den durch stetes Halbieren daraus abgeleiteten Winkeln von 45^0, $22\frac{1}{2}$, $11\frac{1}{4}$ . . ., der einzige, bei dem die Dreiteilung durch Konstruktion bewirkt werden kann. Vergl. die Randbemerkung zu § 48.)

Aufgabe 2. In einem Kreise drei andere gleiche Kreise zu beschreiben, die sich unter einander und zugleich auch den gegebenen Kreis berühren.

Auflösung 1. Beschreibe zwischen den Schenkeln des rechten Winkels einen Bogen und trage darin von beiden Endpunkten aus den Radius als Sehne ab, verbinde die Endpunkte beider Sehnen mit dem Mittelpunkt, so ist dadurch die Dreiteilung vollbracht (§ 134).

Auflösung 2. Beschreibe um den gegebenen Kreis ein regelmäfsiges Dreieck (§ 134 und § 133, Zusatz 1), verbinde dessen Eckpunkte mit dem Mittelpunkt und beschreibe in jedem der entstandenen drei Dreiecke einen Kreis.

137.



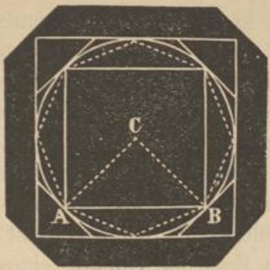
Lehrsatz. Die Fläche eines regelmäfsigen Vielecks ist so grofs, als die eines Dreiecks, dessen Grundlinie gleich dem Umfange des Vielecks und dessen Höhe gleich dem Radius des eingeschriebenen Kreises, d. i. gleich dem vom Mittelpunkt auf eine der Seiten gefällten Perpendikel CJ ist.

Beweis. Denkt man nach allen Eckpunkten die Radien CA, CB, CD... gezogen, so erhält man eben so viele Dreiecke als das regelmäfsige Vieleck Seiten hat. Weil nun die Höhen dieser Dreiecke, nämlich die vom Mittelpunkt auf die Seiten gefällten Perpendikel alle gleich sind (nämlich $=$ CJ $=$ dem Radius des dem regelmäfsigen Vieleck eingeschriebenen Kreises), so kann man die Grundlinien geradlinig an einander gelegt denken und erhält dann ein einziges Dreieck von der Höhe CJ, und dessen Grundlinie gleich dem Umfange des Vielecks ist. Arithmetisch ist der Beweis viel kürzer, es ist nämlich der Inhalt $F = \frac{1}{2} CJ . AB + \frac{1}{2} CJ . BD + .. = \frac{1}{2} CJ (AB + BD + ... + GA)$.

Zusatz. Auch der Inhalt eines um den Kreis beschriebenen regelmäfsigen Vielecks ist offenbar gleich der Fläche eines Dreiecks, dessen Grundlinie gleich dem Umfange des Vielecks und dessen Höhe gleich dem Radius des Kreises ist.

137a.

Lehrsatz. Der Flächeninhalt eines Kreises ist so grofs, als der eines Dreiecks, dessen Grundlinie gleich dem Umfange und dessen Höhe gleich dem Radius des Kreises ist.



Beweis. Man denke sich regelmäſsige Vielecke von beliebiger, aber gleicher Seitenzahl. eins in, eins um den Kreis beschrieben, so ist offenbar der Inhalt des innern kleiner, der des äuſsern gröſser, als der des Kreises. Denkt man sich nun die Seitenzahl beider Vielecke immerfort verdoppelt, indem man die jedesmaligen Bögen in Gedanken halbiert, so wird mit jeder folgenden Verdoppelung der Seitenzahl der Kreis in immer engere Grenzen eingeschlossen. Man sieht nämlich, daſs nach jeder Verdoppelung der Seitenzahl der Inhalt eines jeden der beiden Vielecke dem des Kreises immer näher rückt und deshalb ihr Flächenunterschied immer kleiner wird. Könnte man nun durch fortgesetztes Verdoppeln der Seitenzahl beide Vielecke so nahe zusammenrücken lassen, daſs ihr Flächenunterschied $= 0$ würde, so müssten beide Vielecke notwendig mit einander und mit dem Kreise ganz zusammen fallen. Bei der wirklichen Ausführung dieser Verdoppelung der Seitenzahl z. B. 4, 8, 16, 32 ... hätten wir allerdings eine unendliche Reihe von Vielecken zu beschreiben und deshalb eine, dem ersten Anschein nach, nie aufhörende Halbierung des jedesmaligen Bogens einer Vielecksseite oder des ihr entsprechenden Centriwinkels vorzunehmen, und das wäre allerdings eine endlose, folglich unmögliche Arbeit. Dessenungeachtet können wir sie aber doch als vollendet denken, ja sie in Gedanken (worauf es hier nur ankommt) selbst schnell vollenden, indem wir uns vorstellen: der Radius CB drehe sich um den Mittelpunkt, um den Winkel BCA zu beschreiben, alsdann beschreibt er erst offenbar die Hälfte dieses Winkels, dann von der übrig bleibenden Hälfte wiederum die Hälfte u. s. w., bis er auf CA fällt, und somit die Unzahl von Halbierungen durchlaufen und die nur endlos scheinende Arbeit wirklich vollbracht hat.*)

Bevor nun aber dieses geschehen, ehe nämlich die immer kleiner werdenden Seiten bis zu Elementen verschwinden und die Vielecke selbst zusammen fallen, sich in stetig gebrochene

*) Wegen dieses für Anfänger epineusen Satzes vergleiche man Algebra § 329.

Linien (Kreis) verwandeln, ist immer so nahe an der Grenze (dem Kreise) als man will, der Inhalt eines jeden Vielecks so groſs, als ein Dreieck, dessen Grundlinie gleich dem Umfange und dessen Höhe gleich dem Radius des eingeschriebenen Kreises ist, mithin muſs dieser Satz auch in ihrer gröſsten Nähe, für die Grenze, das ist für den Kreis selbst gelten. Der Kreis ist also wirklich so groſs, als ein Dreieck, dessen Grundlinie gleich der Peripherie und dessen Höhe gleich dem Radius ist.

Zusatz. Es folgt zugleich noch: daſs der Umfang eines umgeschriebenen Vielecks gröſser, der eines eingeschriebenen aber kleiner ist, als der Umfang des Kreises, ferner: daſs der Umfang eines eingeschriebenen Vielecks mit jeder Verdoppelung der Seitenzahl gröſser, der des umgeschriebenen hingegen immer kleiner wird, bis beide ihre Grenze, den Kreis, erreichen und gleich werden (§ 52).

138.

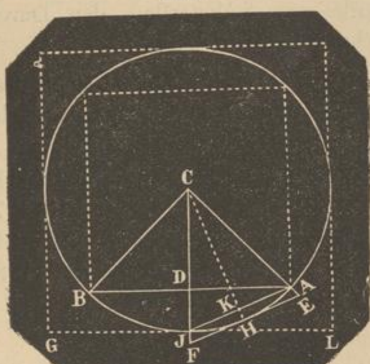
Kreisverhältnis. Berechnung des Umfangs und Inhalts eines Kreises kommt sehr häufig vor, und man muſste deshalb schon frühe darauf sinnen, zur Kenntnis der Zahl zu gelangen, welche angiebt, wie viel mal so groſs der Umfang eines Kreises ist, als sein Durchmesser. Daſs diese Zahl, das sogenannte Kreisverhältnis, zwischen 3 und 4 liegen muſs, folgt schon daraus, daſs der Umfang des eingeschriebenen regelmäſsigen Sechsecks gerade dreimal, der Umfang des umgeschriebenen Vierecks aber viermal so groſs ist, als der Durchmesser (§§ 134 und 133). Nun ist aber der Umfang des Kreises gröſser, als der Umfang des eingeschriebenen Sechsecks und kleiner, als der des umgeschriebenen Vierecks (§ 137, Zusatz). Es kommt also darauf an, den zu 3 hinzukommenden Bruch zu bestimmen, um jenes fragliche Kreisverhältnis zu haben.

Unter den geschichtlich bekannten Mathematikern war Archimedes, 300 v. Chr., der erste, welcher nach einer unvollkommenen, uns nicht geläufigen Arithmetik fand, daſs diese gesuchte Zahl zwischen $3\frac{1}{7}$ und $3\frac{10}{71}$ liegt. Er nahm, als für die damalige Praxis und auch jetzt noch häufig genügend, die erstere ein wenig zu groſse, aber bequemere Zahl $3\frac{1}{7}$. Metius fand diese fragliche Zahl weit genauer $= \frac{355}{113} = 3\frac{16}{113} =$ 3,141592... Durch höhere Mathematik ist dieses Kreisverhältnis noch genauer und schärfer, als je erforderlich, bis auf 1000 Decimalen berechnet worden, die in den ersten Stellen 3,1415926536 lauten.

Wir nehmen von diesem Kreisverhältnis, das irrational ist und als solches sich nie genau durch einen gemeinen Bruch ausdrücken läſst, nur die sieben ersten Decimalen, nämlich: 3,1415927, als für die meisten Fälle vollkommen genügend. In einem Werke der Braminen, betitelt *Ayeen Akbery*, hat man das Verhältnis des Durchmessers zum Umfang wie 1250 : 3927, d. i. wie 1 : 3,1416 gefunden, welches viele Jahrhunderte älter, und genauer ist, als das Archimedische $3\frac{1}{7} =$ 3,142.., welches schon in der dritten Decimale fehlerhaft ist. Das von Metius, $\frac{355}{113} = 3{,}1415929$, weicht erst in der siebenten Decimale von der Wahrheit ab. Das äuſserst mühsame und langweilige Verfahren, durch bloſse Elementar-Arithmetik diese Zahl zu finden, lehrt der folgende Paragraph.

Bei andeutenden Kreisrechnungen in Formeln pflegt man, der Kürze wegen, statt dieser Zahl den griechischen Buchstaben π (sprich: pih) zu setzen, wo man dann, je nachdem es die geringere oder gröſsere Genauigkeit erfordert, statt π die Zahl $3\frac{1}{7} = \frac{22}{7}$ oder 3,1416 oder 3,1415927 nimmt.

139.



Berechnung der Zahl π. Man setze, der bequemeren Rechnung halber, den Radius eines Kreises, AC = 1, so ist, nach § 107, die Seite des eingeschriebenen regelmäſsigen Vierecks AB = $\sqrt{2}$ = 1,41421356. Die Seite des umgeschriebenen Vierecks ist offenbar dem Durchmesser gleich, also $GL = 2$. Mithin ist der halbe Umfang des eingeschriebenen Vierecks 2,8284271 mal und der halbe Umfang des umgeschriebenen Vierecks viermal so grofs, als der Radius, und eben so viel mal so grofs sind die ganzen Umfänge der erwähnten Vierecke, als der Durchmesser.

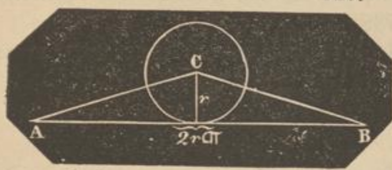
Aus den Seiten der ein- und umgeschriebenen Vierecke berechne man nun die Seiten der ein- und umgeschriebenen Achtecke, indem man zuerst das Perpendikel CD aus $AC = 1$ und $AD = \frac{1}{2} AB = 0{,}7071067 \ldots$ berechnet, nämlich $CD = \sqrt{1 - \overline{AD}^2}$, dann hat man auch $DJ = 1 - CD$. Aus den beiden Katheten DJ und AD findet man die eingeschriebene Achteckseite $AJ = 0{,}7653668 \ldots$. Um hieraus die umgeschriebene Achteckseite zu erhalten, berechne man erst das Perpendikel $CK = \sqrt{1 - (\frac{1}{2} AJ)^2}$, dann hat man aus den ähnlichen Dreiecken CAJ und CEF die Proportion: $CK : CH = AJ : EF$, und hieraus folgt die umgeschriebene Achteckseite $EF = 0{,}8284271 \ldots$ Mithin ist der halbe Umfang des eingeschriebenen Achtecks 3,0614674 .. mal, der des umgeschriebenen Achtecks 3,3137085 ... mal so grofs, als der Radius, also die ganzen Umfänge eben so viel mal so grofs, als der Durchmesser.

Fährt man auf diese mühsame Weise fort und berechnet die Seite des ein- und umgeschriebenen 16-Ecks, 32-Ecks u. s. w., so würde man finden, dafs, den Durchmesser = 1 gesetzt (vergleiche § 194):

Der Umfang des eingeschriebenen regelmäfsigen		Der Umfang des umgeschriebenen regelmäfsigen
4-Ecks,	= 2,8284271 ...	4,
8 „	= 3,0614674 ...	3,3137085 ...
16 „	= 3,1214451 ...	3,1825979 ...
32 „	= 3,1365485 ...	3,1517249 ...
64 „	= 3,1403311 ...	3,1441184 ...
	⋮	⋮
8192 „	= 3,1415925 ...	3,1415928 ...
16384 „	= 3,1415926 ...	3,1415927 ...

Die gesuchte Zahl π, welche angiebt, wie viel mal so grofs der Umfang des Kreises ist, als der Durchmesser, fällt also zwischen 3,1415926...und 3,1415927...(§ 137, Zusatz) und ist folglich bis auf sieben Decimalen genau: $\pi = 3{,}1415927$. Multipliziert man mit dieser Zahl den Durchmesser, so erhält man die Länge der Peripherie bis auf ein Zehnmilliontel des Durchmessers genau, z. B. bis auf $\frac{3}{4}$ mm genau, wenn der Durchmesser 7420,44 m (1 geographische Meile) wäre.

140.



Kreisrechnungen. Bedeutet r den Radius, d den Durchmesser, U den Umfang und F den Inhalt eines Kreises, so findet man Umfang und Inhalt nach folgenden Formeln:

$$U = 2\pi r = \pi d \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$F = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Die erste Formel, nach welcher man den Durchmesser d oder $2r$ mit π multiplizieren mufs, um den Umfang des Kreises zu erhalten, folgt schon aus § 139. Da nun die Fläche eines Kreises gleich der eines Dreiecks, CAB, ist, dessen Grundlinie AB gleich dem Umfang $2\pi r$ und dessen Höhe gleich dem Radius r ist (§ 137), so ist, indem man die halbe Grundlinie $\frac{1}{2}AB = \pi r$ mit der Höhe r multipliziert (§ 102), die Fläche des Kreises $F = r . \pi r = \pi r^2$ (sprich: „pih r quadrat").

Zusatz 1. Es folgt aus vorstehenden Formeln, dafs sich die Umfänge zweier Kreise wie ihre Radien, oder wie ihre Durchmesser, ihre Inhalte aber sich wie die Quadrate derselben verhalten.

Zusatz 2. Dividiert man den Umfang eines Kreises durch π, so erhält man den Durchmesser d. Dividiert man den Inhalt durch π und zieht aus dem Quotienten die Quadratwurzel, so erhält man den Radius.

In Zeichen:

$$d = \frac{U}{\pi} \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$r = \sqrt{\frac{F}{\pi}} \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Aufgabe 1. Man berechne die Umfänge dreier Kreise, deren Radien 5 m 38 cm; $3\frac{2}{3}$ m und $\frac{1}{2}$ m sind.

Bei diesem und allen folgenden Übungsbeispielen ist, der kürzern Rechnung halber, immer das Archimedische Kreisverhältnis genommen, nämlich $\pi = 3\frac{1}{7} = \frac{22}{7}$.

Aufgabe 2. Man berechne die Flächeninhalte der Kreise, deren Radien $3\frac{2}{3}$ m; 0,97 m; 4,05 cm und 1 m sind.

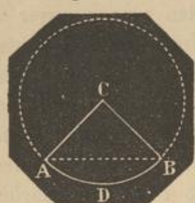
Aufgabe 3. Man suche die Radien zweier Kreise, deren Inhalte 54,62 qm; 5 qm 738 qcm.

Antwort. 33 m $81\frac{5}{7}$ cm; $23\frac{1}{21}$ m; $3\frac{1}{7}$ m; 42,254 qm; 2,9571 qm; 51,5507 qcm; $3\frac{1}{7}$ qm; 4,168823 m; 1,270586 m.

141.

Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich nun leicht, wie man Teile von einem Kreise berechnen mufs.

1) Ist die Länge eines in Graden gegebenen Bogens ADB zu berechnen, so mufs man den 360sten Teil vom ganzen Umfange so oft nehmen, als der Bogen Grade enthält.



2) Ist ein Kreisausschnitt, d. i. ein von zwei Radien und einem Bogen eingeschlossener Teil vom Kreise, wie CADB zu berechnen, so nimmt man den 360sten Teil von der ganzen Kreisfläche so oft, als der Winkel am Mittelpunkt oder der Bogen ADB Grade enthält. — Ist der Bogen ADB in Länge gegeben (gemessen), so betrachte man den Ausschnitt wie ein Dreieck, dessen Grundlinie gleich der Länge des Bogens und dessen Höhe gleich dem Radius ist.

3) Hat man endlich einen Kreisabschnitt, d. i. einen von einer Sehne und einem Bogen begrenzten Teil, ADBA, zu berechnen, so mufs man von dem Ausschnitt CADB das Dreieck CAB subtrahieren.

Ist der Kreisabschnitt nicht gröfser als der Halbkreis und setzt man die begrenzende Sehne $= s$, die Höhe (Verbindungslinie der Mitte der Sehne und der Mitte des Bogens) $= h$, so giebt die nachstehende Formel (von Rich. Schurig) die Fläche F des Abschnittes sehr genau.

$$F = \frac{h}{3}\left[\sqrt{s^2 + 2{,}63616\, h^2} + \sqrt{s^2 + 0{,}56384\, h^2}\right].$$

Zweiter Teil.

Körperliche Geometrie.

Vierzehntes Buch.

Von der Lage der Ebenen.

142.

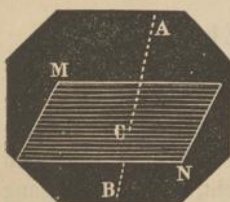
So wie die ebene Geometrie nur solche räumliche Grössen betrachtet, deren sämtliche Punkte in einerlei Ebene liegen und hierbei zuerst von der geraden Linie ausgeht, dann die Neigung zweier Linien gegen einander bestimmen lehrt, hierauf zu geschlossenen Figuren fortschreitet, die wichtigsten derselben besonders betrachtet, von den Eigenschaften, Ausmessung und Ähnlichkeit derselben handelt etc., so wird auf ähnliche Weise die sogenannte körperliche Geometrie (Stereometrie) sich mit solchen räumlichen Grössen beschäftigen, deren Punkte nicht alle in einerlei Ebene liegen, und hierbei zuerst die Lage der Ebenen gegen einander betrachten, dann zu geschlossenen Figuren, nämlich zu ringsum von allen Seiten durch lauter Ebenen oder krummen Flächen begrenzten Räumen (Körper) übergehen, sie ausmessen lehren etc.

Obwohl nun die körperliche Geometrie fast nur eine Anwendung der ebenen Geometrie ist, so bieten doch ihre ersten Sätze dem Anfänger deshalb Schwierigkeiten dar, weil in perspektivischer Zeichnung (indem das, was ausserhalb der Bildebene liegt, doch auf diese gezeichnet werden muss) nicht alle Teile einer Figur im richtigen Verhältnis erscheinen. Indessen kann man der Anschauung auf verschiedene Weise zu Hilfe kommen, indem man z. B., statt der geometrischen Körper, physische Körper aus irgend einer weichen Masse schneidet und formt.

143.

Man pflegt eine Ebene gewöhnlich durch ein Viereck anzudeuten und durch zwei gegenüber stehende Buchstaben zu bezeichnen. So wie man eine gerade Linie nach beiden Enden hin bis ins Unendliche verlängert denken kann, so kann man sich auch eine Ebene nach allen Seiten bis ins Unendliche ausgedehnt denken. Versinnlichen kann man eine Ebene und deren Lage durch ein Blatt Papier, von dessen Dicke und Unebenheiten man abstrahiert.

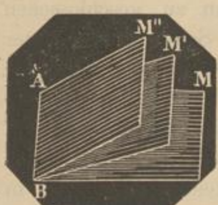
144.



Lehrsatz. Eine gerade Linie kann eine Ebene nur in einem Punkt schneiden.

Beweis. Sei MN eine Ebene und AB eine durch sie hindurch gehende gerade Linie.*) Hätte diese Linie aufser dem Durchschnittspunkt C noch einen zweiten mit der Ebene gemein, so müfste sie in ihrer ganzen Ausdehnung in derselben bleiben (§ 5), weil sie dieselbe aber schneiden soll, so kann dies nur in einem Punkt geschehen, weil beide, sowohl Linie als Ebene, keine Dicke haben.

145.



Lehrsatz. Durch zwei Punkte, A, B, oder durch die sie verbindende gerade Linie AB sind unzählig viele Ebenen möglich.

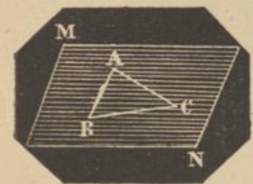
Beweis. Zuerst kann man sich eine durch A und B gehende Ebene BM, denken und sich sodann vorstellen, sie werde um AB, wie um eine Achse, gedreht (so

---

*) Sei MN ein Stück der Bildebene, so liegt nur ein Punkt, C, der Linie AB in dieser Ebene, alle übrigen Punkte der Linie AB liegen aufserhalb derselben, teils oberhalb, teils unterhalb. Man mufs sich also die Linie AB gegen die Ebene aufgerichtet denken. Wir werden solche Linien immer punktieren.

wie man ein Blatt in einem Buche wendet), alsdann kommt sie in unzählig verschiedene Lagen. Statt jeder dieser verschiedenen Lagen kann man sich aber eine andere Ebene, BM′, BM″,... durch AB gelegt*) denken.

146.



Lehrsatz. Durch drei nicht in gerader Linie liegende Punkte ist immer eine, aber nur eine Ebene möglich, und die Lage derselben vollkommen bestimmt.

Beweis. Zuerst kann man sich durch zwei der festen Punkte, z. B. durch B und C, eine Ebene gelegt und diese dann um BC gedreht denken, bis sie auch durch den dritten Punkt A geht.

Weil nun die Ebene durch alle drei Punkte A, B, C geht, so geht sie auch durch die drei Seiten des Dreiecks ABC (§ 5). Wollte man noch eine zweite Ebene durch die drei Punkte A, B, C legen, so müfste sie auch wieder durch die drei Seiten des Dreiecks A, B, C gehen, folglich mit der zuerst hindurch gelegten in ihrer ganzen Ausdehnung zusammen fallen. Es verhält sich hier mit der Ebene ähnlich, wie mit der geraden Linie. Durch einen Punkt sind unzählig viele gerade Linien möglich, durch zwei Punkte aber nur eine, deren Lage hierdurch völlig bestimmt ist. Durch ein oder zwei Punkte sind unzählig viele Ebenen möglich, durch drei aber nur eine, deren Lage dadurch bestimmt ist.

Zusätze. 1) Wenn zwei Ebenen drei nicht in gerader Linie liegende Punkte gemein haben, so fallen sie zusammen und bilden nur eine Ebene.

2) Man sagt von mehreren Punkten im Raume, durch welche eine Ebene gelegt werden kann, sie liegen in dieser Ebene oder in einerlei Ebene. — Durch je drei beliebige Punkte im Raume (z. B. drei Turmspitzen) kann man immer eine Ebene gelegt denken, aber nicht durch je vier (viel weniger durch fünf, sechs etc.), es sei denn, dafs der vierte Punkt schon mit

---

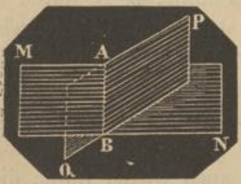
*) Bei Ebenen bedeutet das Wort legen (durch Punkte hindurch führen) dasselbe, was bei Linien ziehen heifst.

den drei andern in einerlei Ebene läge. Es erklärt sich hieraus, weshalb ein dreibeiniger Tisch immer fest steht, wie uneben auch der Grund, worauf er steht, sein möge.

3) Ferner ist klar, dafs durch zwei sich schneidende Linien oder durch einen Winkel immer eine Ebene möglich und der Lage nach bestimmt ist, eben so durch zwei Parallellinien, welche dem Begriffe zufolge immer in einer Ebene liegen.

Zwei Linien, welche kreuzweis über einander weggehen, liegen nicht in einerlei Ebene, sind also auch nicht parallel, obgleich sie sich nicht schneiden.

147.



Lehrsatz. Der Durchschnitt zweier Ebenen ist immer eine gerade Linie.

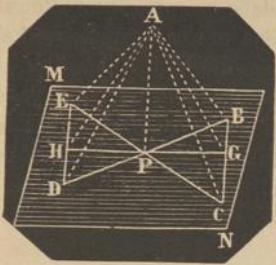
Beweis. Seien MN, PQ die beiden sich schneidenden Ebenen. Weil nun sämtliche Punkte des Durchschnitts beiden Ebenen gemein sind, so müssen sie auch in gerader Linie liegen; denn, lägen nur drei davon nicht in gerader Linie, so müfsten auch, weil diese Punkte in beiden Ebenen zugleich liegen, und durch drei nicht in gerader Linie liegende Punkte nur eine Ebene möglich ist, beide Ebenen zusammen fallen, und könnten sich nicht schneiden.

148.

Erklärung. Wenn eine Linie, AP (siehe folgende Figur), so auf einer Ebene, MN, steht, dafs sie mit allen durch den Fufspunkt P in der Ebene gezogenen Linien PB, PC, PD... rechte Winkel bildet, so sagt man: die Linie stehe senkrecht (normal) auf der Ebene, und umgekehrt: die Ebene stehe senkrecht auf der Linie. In jedem andern Falle heifsen beide schräg gegen einander.

149.

Lehrsatz. Eine Linie steht senkrecht auf einer Ebene, wenn sie nur auf zwei sich schneidenden Linien in derselben senkrecht steht.



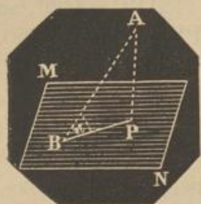
Beweis. Seien BD, CE die beiden in der Ebene MN liegenden und sich in P schneidenden Linien, und AB auf beiden senkrecht, so dafs $\angle APB = \angle APC = 90^0$,*) so haben wir nur zu zeigen, dafs AP dann auch auf jeder andern beliebig durch P gezogenen Linie, HG, senkrecht steht.

Weil nach Voraussetzung $\angle APB = \angle APC = 90^0$, so sind auch ihre Nebenwinkel APD und APE Rechte (§ 28). Nimmt man nun PB = PC = PD = PE, zieht BC und DE, so ist zuerst $\triangle BPC \cong \triangle DPE$ (§ 34), dann $\triangle BPG \cong \triangle DPH$ (§ 37); hieraus folgt: PG = PH und BG = DH. Denkt man sich jetzt die Punkte B, C, D, E mit A verbunden, so erhält man vier kongruente, bei P rechtwinklige Dreiecke, nämlich $\triangle APB \cong \triangle APC \cong \triangle APD \cong \triangle APE$, weil sie alle eine Kathete, AP, gemein und die andern Katheten PB, PC, PD, PE gleich haben, es sind also auch ihre schräg gegen die Ebene MN aufgerichteten Hypotenusen gleich, nämlich: AB = AC = AD = AE; mithin sind nun auch die schräg gegen die Ebene MN aufstehenden Dreiecke ABC und ADE kongruent und gleichschenklig, also auch die Winkel an den beiden Grundlinien BC und DE einander gleich, daher $\angle ABG = \angle ADH$. Denkt man jetzt noch AG und AH gezogen, so ist erstlich $\triangle ABG \cong \triangle ADH$ (§ 34). (Denn wie vorhin bewiesen, ist BG = DH, AB = AD und $\angle ABG = \angle ADH$, folglich auch AG = AH. Das Dreieck AHG ist also ein gleichschenkliges und P die Mitte der Grundlinie, folglich steht auch AP auf HG senkrecht (§ 44), und da dies für jede andere durch P gezogene Linie gilt, so steht auch AP auf der Ebene MN senkrecht (§ 148).

*) Die nicht in der Ebene MN liegenden Winkel und Linien können in der Zeichnung nicht in natürlicher Gröfse erscheinen, deshalb mufs hier die Einbildungskraft zu Hilfe kommen. Um sich diesen und ähnliche Sätze zu veranschaulichen, nehme man die Oberfläche des Tisches als die Ebene MN, ziehe darauf die Linien BD, CE, und stecke senkrecht auf diese in P einen Stift ein. Die übrigen, aufwärts gehenden Linien, wie AB, AC etc. kann man sich leicht hinzudenken, oder ebenfalls durch schräg eingesteckte Stifte anschaulich machen.

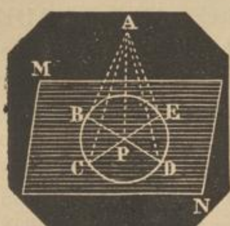
Zusatz. Es ist für sich klar, daſs 1) von einem Punkt auſserhalb oder innerhalb einer Ebene nur ein Perpendikel auf dieser Ebene möglich ist; 2) daſs die von einem Punkt an eine Ebene gehende Senkrechte kürzer ist, als jede Schräge. — Unter Entfernung eines Punktes von einer Ebene versteht man immer das auf diese (nötigenfalls erweitert gedachte) Ebene gefällte Perpendikel.

150.



Erklärung. Die Neigung einer schrägen Linie, AB, gegen eine Ebene, MN, wird immer durch den spitzen Winkel bestimmt, der entsteht, wenn man von einem beliebigen Punkt, A, der Schrägen ein Perpendikel, AP, auf die Ebene fällt, und den Fuſspunkt P desselben mit dem Fuſspunkt B der Schrägen verbindet. Durch diesen Winkel ABP ist dann die Neigung der Schrägen gegen die Ebene bestimmt.

151.



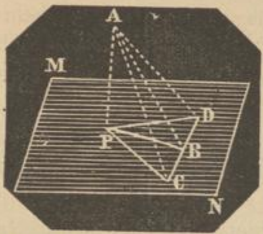
Lehrsatz. Wenn von einem Punkte, A auſserhalb der Ebene, mehrere Schrägen von gleicher Länge an dieselbe gehen, so liegen die Fuſspunkte dieser gleichen Schrägen alle in der Peripherie eines Kreises, dessen Mittelpunkt der Fuſspunkt des von demselben Punkt A auf die Ebene gefällten Perpendikels ist.

Beweis. Sei AB = AC = AD = etc. und AP perpendikulär auf MN. Denkt man nun P mit B, C, D . . verbunden, so sind alle entstehenden bei P rechtwinkligen Dreiecke einander kongruent, weil sie nach Voraussetzung gleiche Hypotenusen und eine Kathete, AP, gemeinschaftlich haben. Daher:

PB = PC = PD = etc. (§ 107 oder § 43.)

Zusatz. Bestimmt man in einer Ebene drei Punkte, B, C, D, welche von einem auſserhalb liegenden Punkt, A, gleich weit entfernt sind, und beschreibt dann durch diese drei Punkte einen Kreis, so ist der Mittelpunkt desselben der Fufspunkt des von A auf die Ebene gefällten Perpendikels.

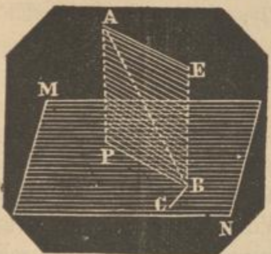
152.



Lehrsatz. Wenn man von einem Punkte, A, eine Schräge, AB, und eine Senkrechte, AP, an eine Ebene zieht, die Fufspunkte B und P verbindet, und auf dieser Verbindungslinie, im Fufspunkt der Schrägen ein Perpendikel, CB, errichtet, so ist dieses auch senkrecht auf der Schrägen AB. In Zeichen: Wenn AP senkrecht auf der Ebene MN und $\angle CBP = 90^0$ ist, so ist auch $\angle CBA = 90^0$.

Beweis. Verlängere CB, so dafs $BD = BC$, ziehe PC, PD, so sind die bei B rechtwinkligen Dreiecke PBC und PBD kongruent, daher $PD = PC$. Verbindet man jetzt C und D mit A, so sind die bei P rechtwinkligen Dreiecke APC und APD, wegen ihrer gleichen Katheten, kongruent; daher $AC = AD$. Das Dreieck ACD ist also gleichschenklig, und da B die Mitte der Grundlinie CD ist, so ist auch $\angle ABC = 90^0$.

153.



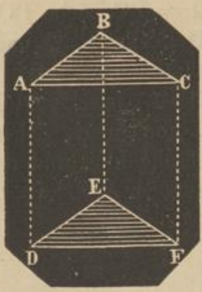
Lehrsatz. Wenn eine Linie senkrecht auf einer Ebene steht, so ist auch jede damit Parallele auf der Ebene senkrecht.

Beweis. Sei AP senkrecht auf MN, und $EB \parallel AP$. Alsdann kann man sich durch die Parallelen AP, EB eine Ebene, EP, gelegt denken (§ 146, 3), welche die Ebene MN in der geraden Linie PB schneidet. Weil nun nach Voraussetzung $\angle APB = 90^0$ und $EB \parallel AP$, so ist auch $\angle EBP = 90^0$. Denkt man sich nun CB auf PB senkrecht, so ist CB auch senkrecht auf der Schrägen AB (§ 152), mithin ist auch CB senkrecht auf der durch BP und BA gelegten Ebene, also auch senkrecht auf EB (§ 149). Die mit AP Parallele EB macht also mit BP und BC rechte Winkel, ist also senkrecht auf der Ebene MN (§ 149).

Zusatz 1. Da in einem Punkte nur ein Perpendikel auf einer Ebene möglich ist, so folgt, daſs, wenn man umgekehrt in einem Punkte, B, ein Perpendikel EB auf der Ebene MN errichtet, dieses mit jeder andern auf MN senkrechten Linie, AP, parallel sein muſs.

Zusatz 2. Wenn zwei Linien mit einer dritten einzeln parallel sind, so sind sie unter einander parallel. Denn denkt man sich durch die dritte Linie eine senkrechte Ebene gelegt, so steht auf dieser auch jede der beiden Parallelen senkrecht.

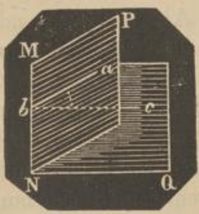
154.



Lehrsatz. Wenn die Schenkel zweier, nicht in einer Ebene liegenden Winkel, BAC und EDF, nach denselben Seiten hin parallel sind, so sind die Winkel gleich.

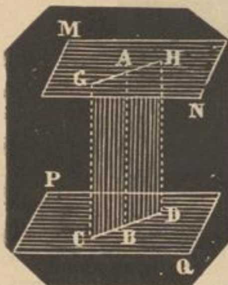
Beweis. Man denke sich von den parallelen Schenkeln gleiche Stücke abgeschnitten, AB = DE und AC = DF, dann BC und EF gezogen, so wie auch AD, BE, CF. Dann ist AD ‖ BE und AD ‖ CF. (§ 93); folglich CF ‖ BE (§ 153, 2), also auch BC = EF. Mithin ist △ BAC ≅ △ EDF (§ 41) und hieraus: ∠ BAC = ∠ EDF.

155.



Erklärung. Unter Neigung zweier Ebenen, MQ, PN, gegen einander versteht man stets den Winkel, der entsteht, wenn man auf ihrer gemeinschaftlichen Durchschnittslinie MN in einem beliebigen Punkt, *b*, zwei Perpendikel errichtet, wovon das eine, *bc*, in der Ebene MQ und das andere, *ba*, in der Ebene PN liegt. Da der Punkt *b* in der Durchschnittslinie MN zufolge § 154 ganz willkürlich genommen werden kann, so ist durch den Winkel *abc* die Neigung der beiden Ebenen gegen einander vollkommen bestimmt. Denkt man sich die obere Ebene PN um die Durchschnittslinie MN so lange gedreht, bis der Winkel *abc* ein rechter wird, so sind die Ebenen senkrecht gegen einander.

156.



Lehrsatz. Wenn zwei Ebenen, MN, PQ, auf einer und derselben Linie, AB, senkrecht stehen, so sind sie parallel.

Beweis. Durch die Linie AB denke man sich noch eine dritte Ebene, GD, gelegt und diese um AB ganz herum gedreht, so sind ihre jedesmaligen Durchschnittslinien in den beiden Ebenen MN, PQ, z. B. die Durchschnitte GH und CD, weil auf AB senkrecht (§ 148) und in einer Ebene, GD, liegend, stets parallel, also auch die Ebenen MN und PQ, in welchen die Durchschnittslinien liegen.

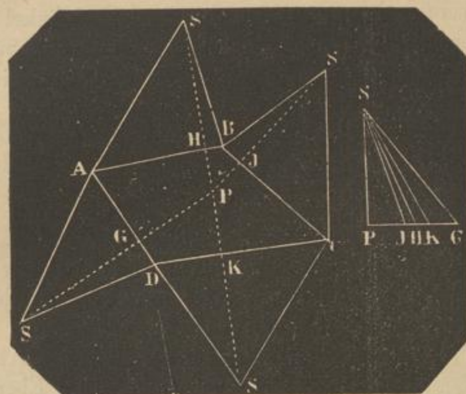
Zusatz 1. Wenn zwei parallele Ebenen von einer dritten geschnitten werden, so sind die Durchschnitte parallel, die innern Wechselwinkel und korrespondierenden Winkel gleich etc.

Zusatz 2. Wenn zwei sich schneidende Ebenen zugleich auf einer dritten Ebene senkrecht stehen, so ist auch ihre Durchschnittslinie auf der dritten Ebene senkrecht. Es seien z. B. die zwei an einander stoſsenden ebenen Wände eines Zimmers auf dem ebenen Fuſsboden (oder Decke) senkrecht, so ist es auch ihr Durchschnitt. (§ 149 und § 155).

Anmerkung. Die vorhergehenden Sätze kommen oftmals zur Anwendung, namentlich beruht auf ihnen die Theorie sowohl der perspektivischen, als auch der geometrischen Zeichnenkunst.

157.

*) **Aufgabe.** Es ist ein beliebiges ebenes Vieleck, z. B. ein Viereck, ABCD, gegeben, auf der Ebene dieses Vierecks denke man sich im Punkte P ein (in der Zeichnung nicht angegebenes) Perpendikel von gegebener Länge, SP, errichtet. Man soll nun über die Seiten des Vierecks Dreiecke zeichnen,



die gegen das Viereck aufgeklappt im Endpunkt S des Perpendikels SP zusammenstoſsen und ein schlieſsendes Dach bilden.

Auflösung. Vom Fuſspunkte P des Perpendikels SP (in der Zeichnenkunst heiſst P die Projektion von S) fälle auf die Seiten des Vierecks die Perpendikel PG, PH, PJ, PK und zeichne dann rechtwinklige Dreiecke, welche diese Perpendikel und die Höhe des Daches SP zu Katheten haben, so sind die Hypotenusen die nötigen Verlängerungen der von P auf die Seiten des Vierecks gefällten Perpendikel. Die Winkel SGP, SHP... geben zugleich die Neigungen der Dächer SAD, SAB... gegen die Ebene des Vierecks ABCD an. (§§ 152, 155.)

Zusatz. Halbiert man zwei benachbarte Winkel des Vielecks, z. B. A und B, und nimmt den Durchschnittspunkt der Halbierungslinien als Projektion der Spitze des zu konstruierenden Daches, so würden drei Dächer, SAB, SAD, SBC, gleiche Neigung gegen die Grundfläche ABCD bekommen. Soll diese Neigung 45° betragen, so muſs man die Höhe des Daches gleich den, vom bestimmten Projektionspunkt auf die drei Seiten AB, AD, BC gefällten und gleichen Perpendikeln nehmen.

Fünfzehntes Buch.

Von den Körpern und deren Berechnung.

158.

Erklärungen. Körper heifst jeder nach allen Richtungen hin begrenzte Raum. Die Summe aller ihn begrenzenden Flächen heifst die Oberfläche des Körpers. So wie aber eine Fläche durch eine einzige Linie begrenzt sein kann, z. B. der Kreis, so kann auch ein Körper durch eine einzige (krumme) Fläche begrenzt sein, z. B. die Kugel. Aufser den, später näher zu erwähnenden drei runden (krummflächigen) Körpern: Cylinder, Kegel und Kugel, beschäftigt sich aber die Elementar-Geometrie nur mit solchen Körpern, welche von lauter ebenen Flächen (Ebenen) begrenzt werden.

Die Linien, in welchen sich irgend zwei den Körper begrenzende Ebenen schneiden, heifsen Kanten. An den Punkten, in welchen drei oder mehrere Grenzebenen zusammenstofsen, entsteht das, was man, von aufsen betrachtet, eine Ecke, von innen gesehen, einen körperlichen Winkel nennt. Um eine Ecke oder einen körperlichen Winkel zu bilden, sind also wenigstens drei durch einerlei Punkt gehende Ebenen erforderlich.

Ein Körper wird manchmal nach der Anzahl der ihn begrenzenden ebenen Flächen benannt, ein achtflächiger Körper z. B. wird von acht Flächen begrenzt. Von weniger als vier Ebenen kann ein Körper nicht begrenzt sein. Körper, welche in der Praxis häufig vorkommen, und deren Namen deshalb wohl zu merken, sind folgende:

1) **Prisma.** Jeder Körper, begrenzt durch zwei kongruente Vielecke, welche man die Grundflächen nennt, deren gleichliegende Seiten parallel und dessen andere (die gleichliegenden Seiten der Grundflächen verbindende) Flächen, Seitenflächen genannt, folglich Parallelogramme sind (§ 93), heifst ein Prisma, und zwar ein dreiseitiges, vierseitiges etc., je nachdem die Grundflächen Dreiecke, Vierecke etc. sind. Die Kanten, in welchen irgend zwei Seitenflächen sich schneiden, nennt man hier Seitenlinien. Ein jedes Prisma kann man beschrieben denken, indem die eine untere Grundfläche sich an zwei parallelen Seitenlinien und stets parallel mit sich selbst bis zur obern Grundfläche bewegt (siehe Figur § 162). In jedem Prisma sind die Seitenlinien einander gleich und parallel.

2) Ein Prisma heiſst **gerade** (normal), wenn die Seitenlinien senkrecht auf der Grundfläche stehen, mithin alle Seitenflächen Rechtecke sind.

3) Unter Höhe eines Prismas versteht man den Abstand der beiden parallelen Grundflächen, nämlich das von einem beliebigen Punkt der einen Grundfläche auf die andere (nötigenfalls erweitert gedachte) Grundfläche gefällte Perpendikel. Bei einem geraden Prisma geben schon die Seitenlinien die Höhe an.

4) Ein gerades Prisma heiſst regelmäſsig, wenn die Grundflächen regelmäſsige Vielecke sind.

5) **Parallelepipedon** heiſst jedes Prisma, dessen Grundflächen Parallelogramme sind (siehe Figur § 159). Sind die Grundflächen und Seitenflächen Rechtecke, so heiſst das Parallelepipedon ein rechtwinkliges oder rechteckiges.

6) **Kubus** (Würfel, Hexaeder) heiſst jedes Parallelepiped, dessen Grundflächen und Seitenflächen Quadrate sind, die folglich gleich und senkrecht auf einander sind.

7) **Cylinder** (Walze) heiſst jeder prismatische Körper, der zwei kongruente und parallele Kreise zu Grundflächen hat, und dessen Seitenfläche — Mantel — eine einzige solche krumme Fläche ist, deren sämtliche mit der Grundfläche parallelen Durchschnitte der Grundfläche gleich sind. Die die Mittelpunkte der Grundflächen verbindende Gerade nennt man **Achse**. Man unterscheidet gerade und schiefe Cylinder, je nachdem die Achse senkrecht auf den Grundflächen steht, oder nicht. Ersteren kann man sich durch Umdrehung eines Rechtecks, ECBG, um die Seite EC, als Achse beschrieben denken (Rotationscylinder — . . . siehe Figur § 164). Die Radien EG und CB beschreiben dann gleiche und parallele Kreise, die Seitenlinie GB die in sich zurücklaufende krumme Seitenfläche.

8) **Pyramide** heiſst jeder Körper, dessen Grundfläche ein beliebiges Vieleck ist, und dessen Seitenflächen Dreiecke sind, die in einer Spitze, S, zusammenstoſsen (s. Figur § 166).

Ein von der Spitze der Pyramide auf die Grundfläche gefälltes Perpendikel heiſst die Höhe der Pyramide. Eine Pyramide wird nach der Anzahl Seiten der Grundfläche benannt: dreiseitige, vierseitige etc. Ferner heiſst eine Pyramide regelmäſsig, wenn die Grundfläche ein regelmäſsiges Vieleck ist, und das von der Spitze darauf gefällte Perpendikel den Mittelpunkt des regelmäſsigen Vielecks trifft.

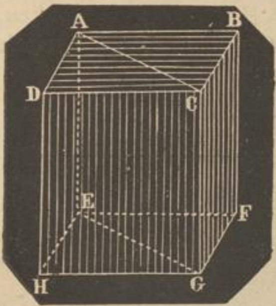
9) **Kegel** heiſst jeder pyramidische Körper, dessen Grund-

fläche ein Kreis, und dessen Seitenfläche — Mantel — eine einzige solche krumme ist, dafs darin von der Spitze nach jedem Punkt der Peripherie der Grundfläche eine gerade Linie gezogen werden kann. Die von der Spitze nach dem Mittelpunkt der Grundfläche gehende Linie heifst die Achse des Kegels. Man unterscheidet gerade und schiefe Kegel, je nachdem die Achse auf der Grundfläche senkrecht steht, oder nicht. Ersteren kann man sich beschrieben denken, indem ein rechtwinkliges Dreieck, SCB, sich um eine Kathete, SC, als Achse dreht. (Rotationskegel — ... s. Figur § 170.)

10) Zwei Körper heifsen symmetrisch, wenn alle Bestandteile derselben, wie Ecken, Winkel, Seitenflächen etc. einzeln genommen, vollkommen gleich sind, jedoch in der Zusammensetzung gerade entgegengesetzte Lage haben, so dafs dasselbe Stück, welches bei dem einen Körper rechts, oben etc. in dem andern links, unten etc. liegt. Obgleich solche symmetrische Körper sonst vollkommen gleich sind (z. B. die rechte und die linke Hand), so können sie doch, wegen der entgegengesetzten Lage ihrer gleichen Teile, nicht in vollkommen gleiche Grenzflächen eingeschlossen werden (nicht unmittelbar kongruent sein). Man nennt sie symmetrisch-kongruent.

159.

Lehrsatz. Ein Parallelepipedon wird durch eine Diagonal-Ebene in zwei gleich grofse dreiseitige Prismen geteilt *)



Beweis. Man denke sich durch zwei gegenüber liegende parallele Seitenlinien, CG und AE, eine Ebene (Schnitt) geführt, so wird dadurch das Parallelepiped AG offenbar in zwei dreiseitige Prismen geteilt. Das rechts liegende dreiseitige Prisma hat die Ebenen BCGF, ABFE und die Diagonal-Ebene ACGE zu Seitenflächen, das links liegende die Ebenen ADHE, DCGH und die

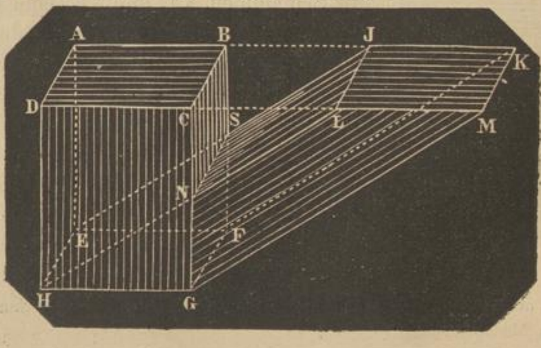
*) Des leichtern Verständnisses halber möge der Anfänger zuvor §§ 161 und 162 lesen. Auch möge man sich solche Körper aus einer weichen Masse formen.

Diagonal-Ebene zu Seitenflächen. Betrachtet man im rechts liegenden Prisma das Dreieck ABC, und im links liegenden das Dreieck HEG als untere Grundfläche, so sind die Grundflächen in beiden gleich, und da auch die Seitenflächen in beiden Prismen, sowohl gegen ihre Grundflächen ABC, HEG, als unter einander dieselbe Neigung haben (§§ 155 und 156, 1), so sind die Prismen jedenfalls symmetrisch kongruent und also gleich grofs. Wäre das Parallelepiped ein gerades, so könnte man beide Hälften in einander gesteckt denken.

160.

Lehrsatz. Ein schiefes Parallelepipedon ist so grofs, als ein gerades von derselben Grundfläche und Höhe.

Beweis. Man nehme zuerst an, dafs die beiden obern Grundflächen zwischen denselben Parallelen AK, DM liegen und denke sich die Parallelen AD, BC, JL, KM,. .EH, FG gegen die Bildfläche aufgerichtet, z. B. senkrecht auf der Ebene des Papiers, so dafs also AB, JK, EF in der Bildfläche, DC, LM, HG aber davor liegen. Das Parallelepiped AG kann man sich nun auch beschrieben denken, indem sich die hintere Seitenfläche ABFE parallel mit sich selbst und an den beiden parallelen Linien AD, BC hingleitend, bis zur vordern Seitenfläche DCGH aufbewegt (§ 158, 1), eben so kann man sich das Parallelepiped JG durch die parallele Bewegung der hintern Seitenfläche JKFE bis zur vordern LMGH entstanden denken. Eben so kann man sich nun auch die beiden dreiseitigen Prismen KBG und JAH beschrieben denken, indem beim erstern die hintere Fläche, nämlich das Dreieck



KBF, parallel mit sich selbst bis zur vordern MCG, und beim andern Prisma die hintere Fläche JAE bis zur vordern LDH sich bewegt. Diese beiden dreiseitigen Prismen sind aber offenbar vollkommen gleich. Subtrahiert man von beiden das dreiseitige Prisma, von welchem JBS die hintere und LCN die vordere Grundfläche ist, und addiert zu den gleichen Resten wieder das dreiseitige Prisma, von welchem SEF die hintere und NHG die vordere Grundfläche ist, so erhält man die beiden fraglichen und gleichen Parallelepipeda.

Läge die obere Grundfläche des schiefen Parallelepipedons mit der des geraden nicht zwischen denselben Parallelen, so kann man auf gleiche Weise erst zeigen, daſs es einem solchen, und folglich auch dem geraden an Gröſse gleich ist.

Zusatz 1. Parallelepipeda von derselben Grundfläche und Höhe sind gleich groſs.

Zusatz 2. Weil jedes der beiden Parallelepipeda durch eine Diagonal-Ebene in zwei gleich groſse dreiseitige Prismen geteilt wird (§ 159), so ist klar, daſs auch jedes schiefe dreiseitige Prisma so groſs ist, als ein gerades von derselben Grundfläche und Höhe.

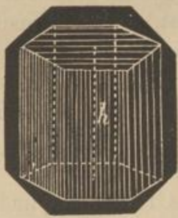
Zusatz 3. Weil jedes Prisma in dreiseitige zerlegt werden kann, so ist auch jedes beliebig vielseitige schiefe Prisma so groſs, als ein gerades von derselben Grundfläche und Höhe.

161.

Körpermaſs. Um von der Gröſse eines Körpers einen bestimmten Begriff zu erhalten, muſs ausgemittelt werden, wie oft ein anderer, als Maſseinheit betrachteter Körper darin enthalten ist. Als die bequemste Form der Einheit zeigt sich hier sogleich der Würfel oder Kubus (§ 158, 6). Solche kubische Körpereinheiten giebt es nun von verschiedener Gröſse, die alle nach der ihnen zu Grunde liegenden Längeneinheit benannt werden. Ist z. B. der zur Maſseinheit genommene Kubus 1 m lang, breit und hoch, mithin jeder seiner sechs Flächen 1 qm, so heiſst dieser Kubus oder der von ihm ausgefüllte Raum, 1 Kubikmeter (cbm). Ist der Kubus 1 cm lang, breit und hoch, so hat man 1 Kubikcentimeter (cbcm). Hiernach versteht man auch, was ein Kubikfuſs, Kubikmeile etc. heiſst.

Weiſs man nun, wie oft eine solche kubische Einheit, z. B. 1 cbm, in einem Körper enthalten ist, so giebt diese Zahl, verbunden mit der deutlichen Vorstellung der Einheit, einen bestimmten Begriff von der Gröſse (Kubikinhalt, kubischen Inhalt, Raumesinhalt, Volumen) des Körpers. Wie man diese Zahl finden kann, zeigen folgende Sätze.

162.



Lehrsatz. Der Inhalt eines Prismas ist gleich dem Produkte aus Grundfläche und Höhe.

Bedeutet F den Flächeninhalt (Quadratinhalt) der Grundfläche, h die Höhe und V den Kubikinhalt (Volumen), so ist in Zeichen:

$$V = F \, . \, h.$$

Beweis. Zeigen wir zuerst, daſs der Satz wahr ist für ein gerades rechtwinkliges Parallelepipedon.

Angenommen, ein Zimmer habe diese Form und es sei die Länge desselben = 7 m, die Breite = 6 m und die Höhe = 5 m. Dann wäre der Quadratinhalt des Fuſsbodens = 42 qm und es könnten dann (weil die Grundfläche eines Kubikmeters 1 qm ist) offenbar 42 cbm (Würfel) auf dem Fuſsboden neben einander stehen. Ist nun die Höhe des Zimmers 5 m, so würden (weil die Höhe eines Kubikmeters 1 m ist) fünf solche Schichten von je 42 cbm das ganze Zimmer genau ausfüllen, mithin der Kubikinhalt des Zimmers = 42.5 = 210 cbm sein. — Wäre die Grundfläche des geraden Parallelepipedons statt eines Rechtecks, wie hier angenommen worden, ein schiefwinkliges Parallelogramm, so findet offenbar dieselbe Regel statt, ohne daſs man nötig hat, das Parallelogramm erst in ein Rechteck zu verwandeln. Und hiernach erhellt nun wohl, daſs man den Kubikinhalt eines jeden sowohl geraden als schiefen Prismas (§ 160, Zusatz 3) findet, wenn man erst den Quadratinhalt der Grundfläche sucht und diesen mit der Höhe multipliziert; denn so viel Quadratmeter die Grundfläche hält, so viel Kubikmeter könnten (gehörig geformt) auf derselben neben einander stehen, und man hat dann die Anzahl Kubikmeter in dieser untern Schicht so oft zu nehmen, als die Höhe Meter enthält.

Zusatz 1. Die Seitenfläche eines geraden Prismas wird erhalten, indem man den Umfang mit der Höhe multipliziert; denn, weil die einzelnen Seitenflächen lauter Rechtecke von gleicher Höhe sind, so sind sie alle zusammen offenbar gleich einem einzigen Rechtecke von derselben Höhe, und dessen Grundlinie gleich dem Umfange ist.

Zusatz 2. Um die Seitenfläche eines schiefen Prismas zu erhalten, berechne man die einzelnen Seitenflächen, indem man zwischen je zwei der gleichen und parallelen Seitenlinien ein Perpendikel fällt. Die ganze Seitenfläche ist also gleich einem Parallelogramm oder Rechteck, dessen Grundlinie gleich der Seitenlinie, und dessen Höhe gleich dem Umfange eines auf den Seitenlinien senkrechten Durchschnitts (eines sogenannten Normalschnittes) ist.

Anmerkung. Beim Reduzieren der Zahlen auf höhere oder niedere Einheiten mufs man bemerken, dafs nach dem Decimalsystem 1 cbm = 1000000 cbcm ist, weil die Grundfläche = 100 . 100 und die Höhe = 100 ist. 1 Liter (l) ist = einem Würfel, dessen Kante 10 cm mifst.

163.

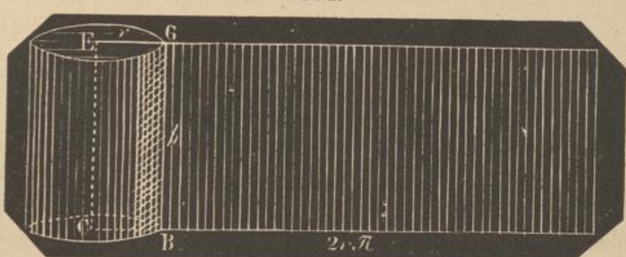
Aufgaben. 1. Die Grundfläche eines dreiseitigen Prismas sei ein rechtwinkliges Dreieck, dessen eine Kathete, $b = 3$ m 74 cm, die andere $c = 2$ m 30 cm, die Höhe des Prismas sei $h =$ 4 m 15 cm; wie grofs ist der Kubikinhalt V?

2. Wie grofs ist der Kubikinhalt einer Säule von Sandstein, und wie grofs ist ihr Gewicht, wenn ihre Höhe = 5 m 66 cm, ihre Grundfläche ein Quadrat ist, dessen Seiten = 85 cm und das Gewicht von 1 cbm Sandstein = 5200 ℔ ist?

3. Der Kubikinhalt einer Eisenstange ist 88700 cbm, die Grundfläche ist ein Rechteck, dessen eine Seite = 20 cm, die andere = 11 cm; wie lang ist die Stange?

Antwort. (1) V = 18,2211 cbm. (2) 4,08935 cbm. Gewicht = 21264,62 ℔. (3) 4 m 3,18 cm.

164.



Lehrsatz. 1) Der Kubikinhalt eines Cylinders ist gleich dem Produkte aus Grundfläche und Höhe. 2) Die Seitenfläche (der Mantel) des geraden Cylinders ist gleich dem Produkt aus dem Umfange und der Höhe.

Bezeichnet h die Höhe des Cylinders, r den Radius der Grundfläche, V den Kubikinhalt eines beliebigen Cylinders und F die Seitenfläche eines geraden Cylinders, so ist in Zeichen:

$$V = \pi r^2 h \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

$$F = 2 \pi r h \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Beweis. Der Cylinder kann als ein regelmäſsiges Prisma von unendlicher Seitenzahl betrachtet werden. Da nun die Grundfläche $= \pi r^2 h$ (§ 140) und die Höhe h, so ist $V = \pi r^2 h$. Was die Mantelfläche des geraden Cylinders betrifft, so kann man sich dieselbe vom Zylinder abgewickelt denken und erhält dann offenbar ein Rechteck, dessen Höhe $= h$, und dessen Grundlinie gleich dem Umfange der Grundfläche $= 2 \pi r$ ist (§ 140). Die Formel (1) gilt selbstverstanden auch für einen schiefen Cylinder; die Seitenfläche eines solchen kann aber nur durch höhere Mathematik gefunden werden, weil die Abwickelung eine in der elementaren Mathematik unberechenbare Fläche giebt. Zufolge § 162, Zusatz 2 ist die Seitenfläche eines schiefen Cylinders gleich einem Rechteck, dessen Grundlinie gleich der Seitenlinie, und dessen Höhe gleich dem Umfange eines auf der Seitenlinie senkrechten Durchschnitts ist. Dieser Umfang ist aber kein Kreis und läſst sich, wie gesagt, nur durch höhere Mathematik berechnen, für praktische Zwecke aber leicht genau genug messen.

165.

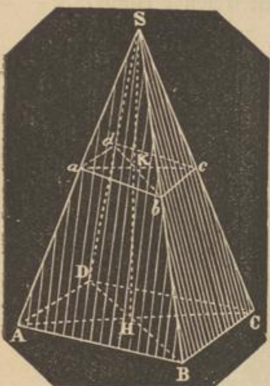
Aufgaben. 1. Wie gross ist der Inhalt V und die Seitenfläche F eines geraden Cylinders, dessen Höhe $h = 1$ m 56 cm, und dessen Radius $r = 26$ cm ist? ($\pi = 3^1/_7$).

2. Ein cylindrisches Gefäſs soll $V = 2600$ Liter halten, der Radius desselben $r = 76$ cm sein. Wie groſs muſs seine Höhe h genommen werden?

3. Ein Cylinder soll $h = 84$ cm hoch sein und $V =$ 678 Liter Inhalt haben. Wie grofs mufs der Radius der Grundfläche sein?

Antwort. Es ist (1) $V = 331{,}433$ Liter und $F = 25494{,}86$ cm. (2) $h = 1$ m $43{,}226$ cm. (3) $r = 50{,}677$ cm.

166.



Lehrsatz. Der Durchschnitt einer Pyramide, welcher mit der Grundfläche parallel ist, ist mit derselben ähnlich, und die Flächeninhalte des Durchschnitts und der Grundfläche verhalten sich, wie die Quadrate der zugehörigen Höhen.

$$abcd : ABCD = \overline{SK}^2 : \overline{SH}^2.$$

Beweis. Weil die Linien ab, AB in parallelen Ebenen liegen, so können sie sich nicht schneiden, weil sie aber zugleich auch in einerlei Ebene liegen, nämlich in der Ebene des Dreiecks SAB, so sind sie parallel. Aus gleichem Grunde ist auch $bc \parallel BC$ etc. Die Winkel des Durchschnitts und die der Grundfläche sind also paarweise gleich (§ 154). Ferner ist nun auch (§ 117), $ab : AB = Sa : SA$ oder auch, indem man noch die Fufspunkte K und H der Perpendikel SK, SH mit den Eckpunkten des Durchschnitts und der Grundfläche verbunden denkt, weil dann auch $aK \parallel AH$, $bK \parallel BH$ etc.

$$ab : AB = Sa : SA = SK : SH$$

eben so: $bc : BC = Sb : SB = SK : SH$ etc.

Es verhalten sich also je zwei parallele Seiten, wie SK : SH, daher:

$$ab : AB = bc : BC = cd : CD \text{ etc.}$$

mithin ist: $abcd \sim ABCD$ (§ 116).

Nach § 125 ist nun $abcd : ABCD = \overline{ab}^2 : \overline{AB}^2$. Weil aber $SK : SH = ab : AB$, also auch $\overline{SK}^2 : \overline{SH}^2 = \overline{ab}^2 : \overline{AB}^2$, so ist auch, wie der Lehrsatz behauptet, $abcd : ABCD = \overline{SK}^2 : \overline{SH}^2$.

Wäre z. B. SH zwei, drei, viermal so grofs, als SK, so wäre die Grundfläche vier, neun, sechzehnmal so grofs, als die Fläche des Durchschnitts.

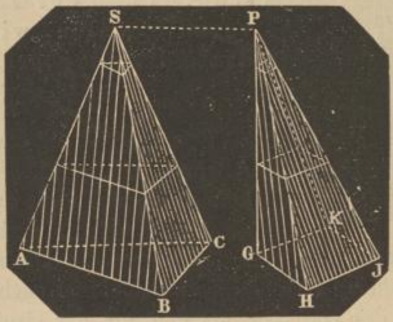
Beispiel 1. Es sei SK $= 5$ m, SH $= 12$ m, ABCD $=$ 40 qm. Wie grofs ist $abcd = x$?

Antwort. Man hat $x : 40 = 5^2 : 12^2$ und hieraus $x = 6\frac{17}{18}$ qm.

Beispiel 2. Es sei SH $= 12$ m, ABCD $= 60$ qm. Der Durchschnitt $abcd$ soll 20 qm sein, auf welcher Höhe SK $= x$ mufs er genommen werden?

Antwort. Aus $20 : 60 = x^2 : 144$ folgt $x = 6{,}9282$ m.

167.

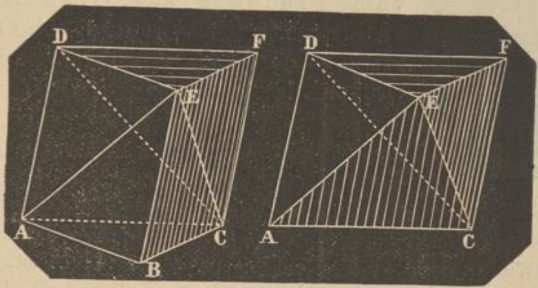


Lehrsatz. Pyramiden von gleich grofser Grundfläche und Höhe sind inhaltsgleich.

Beweis. Man überlege erst folgendes: Wenn zwei gleiche gerade Linien, $ab = ab$, sich parallel mit sich selbst auf gleiche Höhe bewegen, so beschreiben sie offenbar gleiche Flächen (§ 96, Zusatz). Auch müssen sie gleich grofse Flächen beschreiben, wenn sie bei ihrer parallelen Bewegung gleichzeitig und in demselben Verhältnis bis zu Null abnehmen. Auf diese Weise kann man sich die Dreiecke dab, fab beschrieben denken, wenn die Seiten ab auf der Hälfte ihres Weges um die Hälfte, auf dreiviertel ihres Weges um dreiviertel u. s. f. abnehmen.

Ebenso kann man sich nun die beiden Pyramiden beschrieben denken. Sind nämlich, wie der Lehrsatz voraussetzt, ihre Grundflächen gleich groſs, ABC = GHJK, und ihre Höhen gleich, so sind auch je zwei Durchschnitte von gleicher Höhe einander gleich, weil sie stets nach § 166 die gleichvielsten Teile von den gleichen Grundflächen sind. Bewegen sich nun die gleichen Grundflächen parallel mit sich selbst auf gleiche Höhe, so beschreiben sie offenbar gleich groſse Prismen, und eben so auch gleich groſse Pyramiden, indem sie hierbei gleichzeitig und im erwähnten Verhältnis bis zu Null abnehmen.

168.



Lehrsatz. Ein dreiseitiges Prisma ist so groſs, als drei Pyramiden von derselben Grundfläche und Höhe.

Beweis. Man lege durch die drei Punkte E, A, C, eine Ebene, diese geht dann durch die Linie AC (§§ 5 und 146) und schneidet also eine Pyramide, EABC, ab, welche E zur Spitze und ABC zur Grundfläche, also dieselbe Höhe und dieselbe Grundfläche, wie das Prisma hat. Denkt man sich diese Pyramide EABC vom Prisma weggenommen, so bleibt eine vierseitige, in Figur 2 dargestellte Pyramide übrig, welche E zur Spitze und das Parallelogramm DFCA zur Grundfläche hat; legt man nun wieder durch die drei Punkte E, D, C eine Ebene, so teilt diese die vierseitige Pyramide EDFCA in zwei dreiseitige, welche die gemeinschaftliche Spitze E haben, und wovon die links liegende Pyramide DAC die rechts liegende DFC zur Grundfläche hat. Diese beiden Pyramiden EDAC und EDFC sind aber gleich groſs (§ 167), und da die rechts liegende Pyramide, in welcher man auch C als Spitze und DFE als die Grundfläche betrachten kann, der zuerst abgeschnittenen Pyramide EABC gleich ist, so sind alle drei Pyramiden, in welche das Prisma zerlegt worden, gleich groſs, und folglich ist, wie der Lehrsatz behauptet, ein dreiseitiges Prisma so groſs, als drei Pyramiden von derselben Grundfläche und Höhe.

169.

Lehrsatz. Der Inhalt einer Pyramide ist gleich dem dritten Teil vom Produkte aus Grundfläche und Höhe, oder, was dasselbe sagt, gleich der Grundfläche mit einem Drittel der Höhe multipliziert.

Bedeutet F den Quadratinhalt der Grundfläche, h die Höhe und V den Inhalt der Pyramide, so ist in Zeichen:

$$V = \frac{1}{3} hF.$$

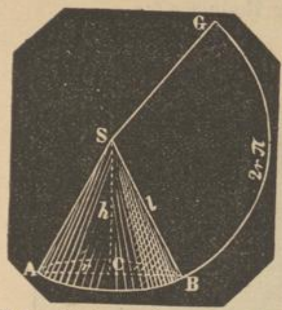
Beweis. Jede Pyramide, die keine dreiseitige ist, kann durch Diagonalebenen in solche zerlegt werden, und da nun nach § 168 jede dreiseitige Pyramide gleich dem dritten Teil eines Prismas von gleicher Grundfläche und Höhe ist, so muſs auch jede noch so vielseitige Pyramide gleich dem dritten Teil eines Prismas von gleicher Grundfläche und Höhe sein. Der Inhalt eines Prismas ist nun aber gleich dem Produkt aus Grundfläche und Höhe (§ 162), mithin der Inhalt einer Pyramide gleich dem Produkt aus Grundfläche und einem Drittel der Höhe.

Zusatz. Um die Seitenfläche einer Pyramide zu bestimmen, muſs man die Seitendreiecke einzeln berechnen und dann addieren.

Aufgabe. Eine der ägyptischen Pyramiden ist $146\frac{1}{2}$ m hoch und die Grundfläche ein Quadrat, dessen Seiten ebenfalls $146\frac{1}{2}$ m. Wie groſs ist der Inhalt V dieser Pyramide?

Antwort. Es ist $V = \frac{(146\frac{1}{2})^2 . 146\frac{1}{2}}{3} = 1\,048\,073$ cbm.

170.



Lehrsatz. 1) Der Inhalt eines Kegels ist gleich dem Produkt aus der Grundfläche und einem Drittel der Höhe. 2) Die Seitenfläche eines geraden Kegels ist gleich dem Produkt aus dem halben Umfange und der Seitenlinie.

Bedeutet V den Inhalt, F die Seitenfläche, h die Höhe l die Seitenlinie und r den Radius des Kegels, so ist in Zeichen:

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} \ldots\ldots (1)$$

$$F = \pi r l = \pi r \sqrt{r^2 + h^2} \ldots\ldots (2)$$

Beweis. 1. Man kann den Kegel als eine Pyramide betrachten, deren Grundfläche ein regelmäſsiges Vieleck von unendlich vielen Seiten ist; er ist deshalb auch, was sein Inhalt betrifft, gleich dem dritten Teil eines Cylinders von derselben Grundfläche und Höhe.

2. Was die Seitenfläche (Mantelfläche) betrifft, so kann man dieselbe vom Kegel abgewickelt denken. Die Abwickelung giebt dann, wenn der Kegel gerade ist, offenbar einen Kreisausschnitt, dessen Bogen, BG, gleich dem Umfange des Grundkreises, und dessen Radius gleich der Seitenlinie des Kegels ist. (§ 141, 2.)

Anmerkung. Der Inhalt eines schiefen Kegels wird auf dieselbe Weise nach Formel (1) berechnet, die Seitenfläche eines schiefen Kegels kann aber nur durch höhere Mathematik gefunden werden, weil die Abwickelung keinen Kreisausschnitt bildet.

171.

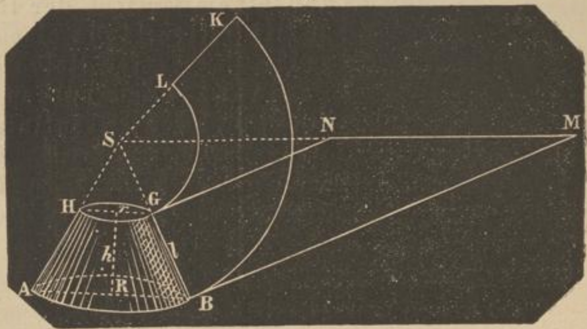
Aufgaben. 1. Der Radius der Grundfläche eines geraden Kegels sei $r = 3$ m, die Höhe $h = 4$ m, also die Seitenlinie $l = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ m. Wie groſs ist der Inhalt V und die Seitenfläche F? ($\pi = \frac{22}{7}$ gesetzt).

2. Der Inhalt eines Kegels ist V = 1,76 cbm, der Radius $r = 40$ cm. Wie groſs ist die Höhe h?

3. Der Inhalt eines Kegels ist $V = 18$ cbm, die Höhe, $h = 4$ m 68 cm. Wie grofs ist der Radius r?

Antwort. (1) $V = 37\frac{5}{7}$ cbm. $F = 47\frac{1}{7}$ qm (2) $h = 10\frac{1}{2}$ m (3) $r = 1{,}91607$ m.

172.



Lehrsatz. Die Seitenfläche eines parallel mit der Grundfläche abgekürzten geraden Kegels ist gleich der Fläche eines Trapezes, dessen parallele Seiten gleich den Peripherien der beiden parallelen Grundflächen, und dessen Höhe gleich der Seitenlinie ist.

Bedeutet also $l = GB$ die Seitenlinie, so ist in Zeichen:

$$F = \pi l\,(R + r).$$

Beweis. Man denke sich den abgekürzten Kegel zu einem ganzen ergänzt und dann abgewickelt. Stellt nun die auf SB senkrechte Linie BM die Länge der untern Peripherie ($2\pi R =$ arc BK) dar, so ist die auf SG senkrechte Linie GN notwendig gleich der obern Peripherie ($2\pi r =$ arc GL), denn die Bögen BK, GL verhalten sich wie ihre Radien SB, SG; wie diese verhalten sich aber auch die Linien BM, GN. Stellt also das Dreieck SBM die Seitenfläche des ganzen Kegels dar, so enthält das Dreieck SGN die Seitenfläche des Ergänzungskegels, und mithin das Trapez GBMN die Seitenfläche des abgekürzten Kegels. In dem Trapez ist nun aber $BM = 2\pi R$. $GN = 2\pi r$. Folglich ist (§ 103):

$$F = \frac{2\pi R + 2\pi r}{2} . l = (\pi R + \pi r)\, l = \pi l\,(R + r).$$

Dieser Satz folgt übrigens auch ganz einfach aus der Betrachtung der Figur GLKB, welche man sich als ein Trapez denken kann. Wäre z. B. $R = 6$ m, $r = 4$ m und $l = 5$ m, so wäre $F = 157\frac{1}{7}$ qm.

Sechzehntes Buch.

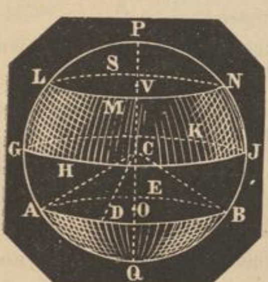
Von der Kugel.

173.

Erklärungen. Die Kugel ist ein Körper von einer einzigen krummen Fläche dergestalt begrenzt, daſs alle Punkte derselben von einem innerhalb liegenden Punkt, Mittelpunkt oder Centrum, gleich weit entfernt sind.

Jede vom Mittelpunkt bis an die Oberfläche gehende Linie heiſst Radius oder Halbmesser, und jede durch den Mittelpunkt nach beiden Seiten bis an die Oberfläche gehende Linie heiſst Durchmesser oder Diameter.

174.



Lehrsatz. Jeder ebene Durchschnitt einer Kugel ist ein Kreis.

Beweis. Verbindet man beliebige Grenzpunkte, A, D, B, E, des Durchschnitts ADBE mit dem Mittelpunkt C, so sind diese Verbindungslinien CA, CD, CB . ., als Radien der Kugel einander gleich, mithin ist nach § 151 die krumme Linie ADBEA auf der Kugel ein vollkommener Kreis, dessen Mittelpunkt der Fuſspunkt O des von C auf die Ebene des Kreises (Durchschnitts) gefällten Perpendikels ist.

Zusatz. Errichtet man auf der Ebene eines Kugelkreises, ADBE, im Mittelpunkt O ein Perpendikel, so muſs dies durch den Mittelpunkt der Kugel gehen.

175a.

Erklärungen. Jeder Kreis, dessen Ebene nicht durch den Mittelpunkt geht, wie ADBE, heiſst ein Kugelkreis, jeder Kreis aber, dessen Ebene durch den Mittelpunkt geht, wie GHJK, heiſst ein gröſster Kreis (Normalkreis).

Es ist klar, daſs alle gröſsten Kreise einander gleich sind, daſs jeder die Kugel halbiert, und daſs auch je zwei gröſste Kreise sich halbieren, weil ihre Radien dem der Kugel gleich sind (vgl. § 19).

2. Die Endpunkte P, Q eines Durchmessers, der durch den Mittelpunkt O eines Kugelkreises, ADBE, geht und auf dessen Ebene senkrecht steht,*) heiſsen die Pole des Kreises.

3. Alle Kreise auf der Kugel, deren Ebenen parallel sind, heiſsen Parallelkreise. Parallelkreise, wie ADBE, GHJK, haben also gemeinschaftliche Pole..

4. Das körperliche Stück einer Kugel, welches, wie AQB, von der Ebene eines Kreises und einer krummen Fläche begrenzt wird, heiſst Kugelabschnitt oder Kugelsegment, die den Kugelabschnitt mit begrenzende krumme Fläche heiſst Kugelhaube (Calotte, Kugelmütze, Kugelkappe), und das auf dem Grundkreise im Mittelpunkt errichtete Perpendikel OQ heiſst die Höhe (oder Pfeil, Sagitte) des Abschnitts und der Haube. Ein von einem gröſsten Kreis begrenzter Abschnitt heiſst Halbkugel oder Hemisphäre.

5. Ein Streifen von der Kugeloberfläche, welcher, wie LJ, von zwei Parallelkreisen, GHJK und LMNS, begrenzt wird, heiſst eine Zone (Gürtel), und das von der Zone und den Ebenen der beiden Parallelkreise begrenzte körperliche Stück der Kugel heiſst Zonenabschnitt (Zonenkörper). Der Abstand der beiden parallelen Kreisebenen, nämlich CV, heiſst die Höhe der Zone und des Zonenabschnitts.

6. Das Stück einer Kugel, welches, wie CAQB, aus einem Kegel, CAB, und einem daran liegenden Haubenabschnitt, AQB, besteht, heiſst ein Kugelausschnitt (Kugelsektor, Kugelkegel).

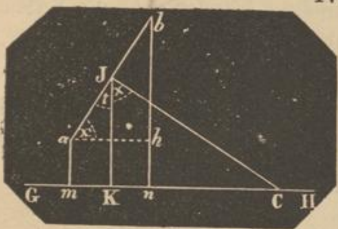
Anmerkung. Man kann sich sowohl die ganze Kugel, als auch ihre eben erklärten Teile auf folgende Weise entstanden denken: Der Halbkreis PNBQ drehe sich um den Durchmesser PQ, wie um eine Achse, so beschreibt die Fläche des Halbkreises die Kugel, die halbe Peripherie PNBQ die Kugeloberfläche, die Punkte N, J, B Parallelkreise, deren Pole (Drehpunkte) P und Q sind; der Bogen PN beschreibt eine

*) Bei Kreisen, die kleiner als ein gröſster Kreis, wie hier ADBE, ist dies von selbst der Fall. (§ 174, Zus.)

Haube, der Bogen NJ eine Zone, der Kreisausschnitt CQH einen Kugelausschnitt etc.

Was nun die Berechnung der Oberfläche und des Inhalts der Kugel, so wie auch Stücke derselben betrifft, so wird dies jedem sehr leicht begreiflich werden, der den folgenden Hilfssatz, welcher den Schlüssel dazu giebt, gut versteht.

175b.



Hilfssatz. Wenn eine gerade Linie, ab, sich um eine Achse, GH, ganz herumdreht,*) so läſst sich die Fläche F, welche sie beschreibt, nach der Formel:

$$F = 2\pi . CJ . mn$$

berechnen, worin CJ das auf der Mitte der Linie ab errichtete, bis an die Achse GH gehende Perpendikel, π die bekannte Zahl $3\frac{1}{7}$, und mn das Stück der Achse ist, welches die von a und b darauf gefällten Perpendikel zwischen sich fassen.

Beweis. Zuerst ist klar, daſs die Linie ab die Seitenfläche eines abgekürzten Kegels beschreibt, dessen parallele Radien am und bn sind und dessen Seitenlinie ab ist. Nach § 172 ist also die Fläche, welche die Linie ab nach ihrer ganzen Umdrehung beschrieben hat:

$$F = \pi . ab . (bn + am) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

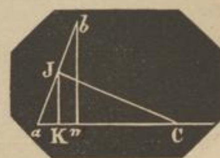
Dieser Ausdruck muſs nun aber, um ihn auf die Kugel anwenden zu können, zweimal umgeformt werden. Denkt man sich von der Mitte J der Linie ab das Perpendikel JK auf die Achse gefällt, so ist leicht einzusehen, daſs $2 JK = bn + am$ ist. (Man denke sich nur durch J eine Parallele mit mn gezogen, die dann zu am dasselbe Stück hinzusetzt, welches sie von bn abschneidet.) Man darf also in der Formel (1) 2 JK statt $bn + am$ setzen, und es ist daher auch:

$$F = \pi . ab . 2JK = 2\pi . JK . ab \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

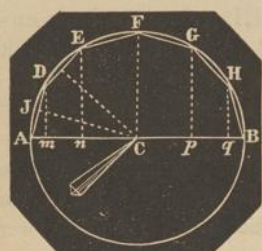
Zieht man nun noch ah parallel mit mn, so sind die beiden Dreiecke abh und CJK gleichwinklig und folglich ähnlich,

*) Man denke sich Trapez $mabn$ fest mit GH verbunden und diese Figur um GH rotierend.

(jedes hat einen rechten Winkel, außerdem $x + t = x' + t = 90^0$, woraus $x = x'$) mithin ab : CJ $= ah$: JK, oder, weil $mn = ah$, auch ab : CJ $= mn$: JK, hieraus: CJ . mn = JK . ab. Man kann also in die zweite Formel CJ . mn statt JK . ab setzen, und man hat dann für die von ab beschriebene Fläche folgende im Lehrsatz behauptete Formel: $F = 2\pi$. CJ . mn. Diese Formel gilt auch, wenn der eine Endpunkt a der Linie ab in der Achse GH liegt, alsdann beschreibt ab (oder mb) die Seitenfläche eines ganzen Kegels, und es ist dann (§ 170) $F = \pi . bn . ab$, oder auch, weil $2JK = bn$ ist: $F = \pi . 2JK . ab = 2\pi . JK . ab$. Ferner: da $\triangle\, abn \sim \triangle CJK$ ist, $ab : CJ = an : JK$, hieraus: $CJ . an = JK . ab$. Daher auch: $F = 2\pi . CJ . an$.



176.



Lehrsatz. Die Oberfläche einer Kugel ist viermal so groß, als die Fläche eines größten Kreises, und der Inhalt der Kugel so groß, als der eines Kegels, dessen Grundfläche gleich der Oberfläche, und dessen Höhe gleich dem Radius der Kugel ist.

Bedeutet r den Radius, d den Durchmesser, F die Oberfläche und V den Kubikinhalt der Kugel, so ist:

$$F = 4\pi r^2 = \pi d^2 \;\ldots\ldots\; (1)$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\pi}{6} d^3 \;\ldots\; (2)$$

Beweis. In dem die Kugel beschreibenden Halbkreis denke man sich ein regelmäßiges Vieleck beschrieben und suche zuerst eine Formel für die Fläche, welche dieses regelmäßige Vieleck beschreibt, indem es sich um den Durchmesser AB ganz herumdreht. Weil alle Vielecksseiten gleich, folglich auch alle auf ihren Mitten errichteten und durch den Mittelpunkt C gehenden Perpendikel gleich sind (§ 71, Zusatz), so ist, nach § 175b, die Fläche, welche die Seite AD beschreibt, $= 2\pi$. CJ . Am, die Fläche, welche die folgende Seite DE beschreibt, $= 2\pi \,.\, CJ \,.\, mn$, die Fläche, welche EF beschreibt, $= 2\pi \,.\, CJ \,.\, nC$ u. s. w., mithin die Fläche, welche das ganze Vieleck beschreibt:

$$= 2\pi \,.\, CJ \,.\, Am + 2\pi \,.\, CJ \,.\, mn + \ldots\ldots + 2\pi \,.\, CJ \,.\, qB$$

oder, indem man den, allen Gliedern gemeinschaftlichen Faktor $2\pi \,.\, CJ$ heraussetzt:

$$= 2\pi \,.\, CJ \,.\, (Am + mn + nC + \ldots\ldots + qB)$$

oder, da der Ausdruck in der Klammer dem Durchmesser AB gleich ist,

$$= 2\pi \,.\, CJ \,.\, AB.$$

Man erhält also die Fläche, welche ein regelmäſsiges Vieleck beschreibt, indem man die Peripherie des dem Vieleck umgeschriebenen Kreises $2\pi \,.\, CJ$ mit dem Durchmesser AB multipliziert. Dieser Satz ist immer richtig, wieviel Seiten das regelmäſsige Vieleck auch haben möge. Denkt man sich also die Seitenzahl des regelmäſsigen Vielecks immerfort verdoppelt, so ändert sich in dem oben gefundenen Ausdruck $2\pi \,.\, CJ \,.\, AB$ bloſs der Faktor CJ, der mit jeder Verdoppelung der Seitenzahl immer gröſser, und zuletzt, wo diese Verdoppelung aufhört und das Vieleck in einen Halbkreis übergeht, dem Radius CA gleich wird. Es ist mithin die Fläche, welche der Halbkreis beschreibt, d. i. die Oberfläche der Kugel, $= 2\pi \,.\, CJ \,.\, AB = 2\pi r \,.\, AB$, oder, den Radius der Kugel $CA = r$, den Durchmesser $AB = 2r$, die Oberfläche $=$ F gesetzt: $F = 2\pi r \,.\, 2r = 4\pi r^2 = \pi d^2$.

Durch ähnliche Schlüsse, wie in § 137, gelangt man nun auch leicht zu dem im Lehrsatz angegebenen Ausdruck für den Inhalt der Kugel. Denkt man sich nämlich innerhalb der Kugel um den Mittelpunkt herum aneinander liegende regelmäſsige dreiseitige Pyramiden von gleicher Grundfläche und folglich auch von gleicher Höhe gelegt, so daſs ihre Spitzen im Mittelpunkt, die Eckpunkte ihrer Grundflächen in der Oberfläche der Kugel, die Grundflächen selbst also innerhalb der Kugel liegen, so ist die Summe aller dieser Pyramiden kleiner, als die Kugel. Denkt man sich die Grundflächen dieser gleichen regelmäſsig eingeschriebenen Pyramiden immer kleiner, folglich ihre Höhe immer gröſser werdend, so kommt die Summe dieser Pyramiden dem Inhalte der Kugel immer näher. Bezeichnet man nun die Grundfläche der 1. Pyramide mit g_1, der 2. Pyramide mit g_2, der 3. mit g_3 u. s. w., die Höhe der Pyramiden mit h, so ist nach § 169 der Kubikinhalt der 1. Pyramide $=$ $\frac{g_1 h}{3}$, der zweiten $= \frac{g_2 h}{3}$ u. s. w., folglich die Summe, d. i. der Kubikinhalt sämtlicher Pyramiden

$$= \frac{g_1 h}{3} + \frac{g_2 h}{3} + \frac{g_3 h}{3} + \frac{g_4 h}{3} + \ldots\ldots$$

$$= \frac{h}{3}(g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + \ldots).$$

Sobald nun die Grundflächen der Pyramiden unendlich klein und dann Teile der Oberfläche der Kugel selbst werden, geht ihre Höhe h in den Radius der Kugel über und die Summe sämtlicher Pyramiden wird genau dem Kubikinhalt der Kugel gleich, der mithin

$$= \frac{r}{3}(g_1 + g_2 + g_3 + \ldots\ldots) \text{ wird.}$$

Die Summe $g_1 + g_2 + \ldots.$ sämtlicher Grundflächen wird aber alsdann zur Oberfläche der Kugel ($4\pi r^2$) und jener Ausdruck für den Kubikinhalt der Kugel wird $\frac{r}{3} . 4\pi r^2$ (= dem Inhalt eines Kegels mit der Grundfläche $4\pi r^2$ und Höhe r) $=$ $\frac{4\pi r^3}{3}$.

177.

Aufgaben. 1. Der Radius einer Kugel ist $r = 15$ cm. Wie grofs ist die Oberfläche F und der Kubikinhalt V? ($\pi = \frac{22}{7}$ gesetzt).

2. Wie viel Meter $\frac{3}{4}$ breiten Taffet sind erforderlich, um einen kugelförmigen Luftballon zu bekleiden, dessen Radius = 2 m 56 cm?

3. Die Oberfläche einer Kugel ist = 23 qm. Wie grofs ist der Radius?

4. Eine Kugel, deren Radius = 18 cm ist, soll vergoldet werden. Wie teuer kommt dies, wenn für den Quadratcentimeter 15 Pfennige bezahlt wird?

5. Die Oberfläche einer Kugel ist = 3,579 qm. Wie grofs ist der Radius?

6. Der Kubikinhalt einer Kugel ist 97,5 cbcm. Wie grofs ist der Radius?

7. Man denke sich in einen Cylinder einen Kegel und eine Kugel gezeichnet, so dafs die Radien aller drei Körper gleich

sind, und die Höhe des Kegels und Cylinders gleich dem doppelten Radius ist. Wie verhalten sich diese drei Körper: Kegel, Kugel und Cylinder hinsichtlich ihres Volumens zu einander?

Antwort. (1) $F = 2828\frac{4}{7}$ qcm, $V = 14142\frac{6}{7}$ cbcm; (2) 82,388 m; (3) $r = 1,3526$ m; (4) 610 M. 97 Pf.; (5) $r = 53,54$ cm; (6) $r = 2,8548$ m; (7) wie 1 : 2 : 3.*)

178.

Aufgabe. Eine Formel zu finden, nach welcher man die Fläche einer Kugelhaube berechnen kann.

Auflösung. Führt man den Beweis in § 176 in Bezug auf die dortigen Vielecksseiten AD und DE allein, so würde sich für die durch diese entstehende krumme Oberfläche

$$= 2\pi . \mathrm{CJ} . \mathrm{A}m + 2\pi . \mathrm{CJ} . mn$$
$$= 2\pi . \mathrm{CJ} . (\mathrm{A}m + mn)$$
$$= 2\pi . \mathrm{CJ} . \mathrm{A}n \quad \text{ergeben.}$$

Denkt man sich nun immer mehr Seiten in den Bogen AE, so würde, ganz analog der dortigen Ausführung, CJ zuletzt in den Radius r der Kugel, die durch die Vielecksseiten A bis E entstehende krumme Oberfläche $2\pi . \mathrm{CJ} . \mathrm{A}n$ daher in die durch den Bogen AE entstehende krumme Oberfläche (Kugelhaube) mit der Formel $2\pi r . \mathrm{A}n$ übergehen.

In Bezug auf die Figur unseres § 178 erhält man dafür $2\pi r . \mathrm{AP}$, oder, wenn man die Höhe AP der Haube mit h und die krumme Fläche derselben mit F bezeichnet,

$$F = 2\pi rh.$$

Zusatz 1. Aus denselben Betrachtungen folgt, daſs dieselbe Formel auch für eine Zone gilt, und daſs alle Zonen von gleicher Höhe auf derselben Kugel auch gleiche Flächen haben.

Zusatz 2. Denkt man sich vom Scheitel A der Haube nach einem Punkt, M, der sie begrenzenden Peripherie die Sehne $\mathrm{AM} = a$ gezogen, so ist (§ 126, Zusatz 1) $h : a = a : 2r$, hieraus: $a^2 = 2rh$. Wir können also in obiger Formel a^2

---

*) Dieses merkwürdige Verhältnis entdeckte Cicero auf einem dem Archimed in Syrakus gesetzten Denkmale.

statt $2rh$ setzen und erhalten dann für die Fläche der Haube den Ausdruck:

$$F = \pi a^2,$$

welche Formel für die Praxis viel bequemer ist, indem man statt der Höhe und des Radius nur eine Sehne zu messen braucht.

Beispiel. Wie viel Quadratmeter Kupferblech sind zur Bedachung einer Kuppel erforderlich, wenn die vom höchsten zum tiefsten Punkt gemessene Sehne AM = $5\frac{1}{3}$ m ist?

Antwort. 89,397 qm.

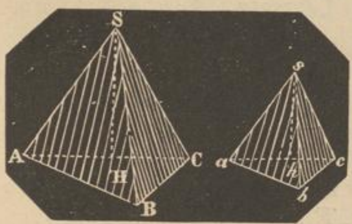
Siebzehntes Buch.

Ergänzungen.

179.

Erklärung. Zwei Körper heifsen ähnlich, wenn die körperlichen Winkel wechselweise gleich sind, und je zwei ähnlich liegende Kanten dasselbe Verhältnis zu einander haben; alsdann sind offenbar auch die Seitenflächen ähnlich, und beide Körper an Form vollkommen gleich, und nur an Gröfse verschieden.

180.



Lehrsatz. Die Inhalte ähnlicher Körper verhalten sich wie die Kuben ähnlich liegender Seiten.

Beweis. Man braucht nur zu zeigen, dafs der Satz für ähnliche Pyramiden gilt, weil ähnliche Körper in solche zerlegt werden können.

Sei demnach Pyramide SABC $\sim$ Pyramide *sabc*. Weil alle ähnlich liegende Seiten einerlei Verhältnis zu einander haben, und die Winkel wechselweise gleich sind, so sind erstens die Grundflächen ähnlich und verhalten sich, wie die Quadrate ähnlich liegender Seiten (§ 125); wie diese Seiten, so verhalten sich aber auch die Höhen der Pyramiden, nämlich $sh : SH = ab : AB$, also auch $\frac{1}{3}\, sh : \frac{1}{3}\, SH = ab : AB$. Man hat also:

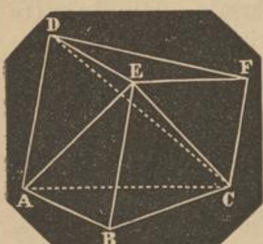
$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{\triangle ABC}{\triangle abc} = \dfrac{AB^2}{ab^2} \\[2ex] \dfrac{\frac{1}{3}SH}{\frac{1}{3}sh} = \dfrac{AB}{ab}\end{array}\right\}$$

Beide Gleichungen mit einander multipliziert, kommt $\dfrac{\frac{1}{3}SH.\triangle ABC}{\frac{1}{3}sh.\triangle abc} = \dfrac{AB^3}{ab^3}$

d. h. der Inhalt der kleinern Pyramide ($\frac{1}{3}sh.\triangle abc$) ist so oft in dem Inhalt der gröſsern ($\frac{1}{3}SH.\triangle ABC$) enthalten, als der Kubus einer Seite der kleinern Pyramide in dem Kubus der ähnlich liegenden Seite der gröſsern. Wäre z. B. AB zweimal so groſs als ab, so wäre der Kubikinhalt der gröſsern Pyramide $2^2 = 8$mal so groſs, als der der kleinern. Denkt man sich nun zwei ähnliche Körper in ähnliche Pyramiden zerlegt, so verhalten sich je zwei ähnliche Pyramiden, also auch die Summe der Pyramiden in dem einen Körper zur Summe in dem andern und mithin die beiden ähnlichen Körper selbst, wie die Kuben zweier ähnlich liegenden Seiten.

Soll ein Körper konstruiert werden, dessen Inhalt m mal so groſs ist, als der eines ähnlichen Körpers, so müssen die ähnlich liegenden Seiten sich wie 1 zu $\sqrt[3]{m}$ verhalten. Für Kugeln, Kegel und Cylinder folgt der Lehrsatz von selbst aus den Formeln.

181.



*) **Lehrsatz.** Ein schief abgeschnittenes dreiseitiges Prisma ist so groſs, als drei Pyramiden, welche die Grundfläche des Prismas ABC zu Grundflächen und die drei gegenüber liegenden Ecken E, D, F zu Spitzen haben.

Beweis. Legt man zuerst durch die drei Punkte EAC eine Ebene, so schneidet diese eine Pyramide EABC ab. Es bleibt nun noch eine vierseitige Pyramide übrig, welche E zur Spitze und das Trapez DACF zur Grundfläche hat. Diese wird durch eine durch D, E, C gelegte Ebene in zwei dreiseitige zerlegt, EDAC und EDFC. Denkt man sich nun die Spitze E der links liegenden Pyramide EDAC parallel mit der Grundfläche DAC (also in gleich bleibender Höhe) nach B verschoben, so ist dadurch die Pyramide EDAC in die gleich grofse BDAC verwandelt (§ 167). In letzterer kann man nun aber auch D als Spitze und ABC als Grundfläche betrachten. Die dritte Pyramide EDFC endlich, kann man erst in die Pyramide EAFC*) verwandelt denken, indem die Grundflächen DFC und AFC, als Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe, gleich grofs sind. Denkt man sich nun bei dieser Pyramide EAFC die Spitze E in gleich bleibender Höhe nach B verlegt, so ist sie in die Pyramide BAFC verwandelt, bei welcher man aber auch F als Spitze und ABC als Grundfläche betrachten kann.

Bezeichnen also h, h', h'' die drei von den Ecken E, D, F auf die Grundfläche ABC = F, gefällten Perpendikel, und V den Inhalt des schief abgeschnittenen dreiseitigen Prismas, so ist:

$$V = \frac{h + h' + h''}{3} . F.$$

182.

Aufgabe. Eine Formel zu finden, nach welcher man den Inhalt V eines abgekürzten Kegels aus den beiden parallelen Radien R, r und der Höhe $h = OC$ berechnen kann.

Auflösung. Setzt man die unbekannte Höhe des Ergänzungskegels vorläufig $= x$, so ist nach § 170:**)

$$V = \frac{\pi R^2 (h + x)}{3} - \frac{\pi r^2 x}{3}$$

$$\text{oder } V = \frac{\pi R^2 h}{3} + \frac{\pi (R^2 - r^2) x}{3} \ldots\ldots (1)$$

Zur Bestimmung der unbekannten Höhe x hat man:

$$x : h + x = r : R \text{ und hieraus } x = \frac{hr}{R - r}$$

*) Man denke die Linie AF gezogen.

**) Bei diesen Anwendungen der Algebra auf Geometrie mufs die Kenntnis der erstern Wissenschaft vorausgesetzt werden.

Diesen Wert von x in die Gleichung(1)substituiert, kommt:

$$V = \frac{\pi R^2 h}{3} + \frac{\pi (R^2 - r^2) r h}{3(R-r)}.$$

und hieraus nach gehöriger Reduktion die verlangte Formel: *)

$$V = \frac{\pi h}{3} (R^2 + Rr + r^2)$$

Beispiel. Sei $R = 80$ cm, $r = 54$ cm, $h = 95$ cm, so ist $V = 1{,}3571$ cbm.

183.

Aufgabe. Eine Formel zu finden, nach welcher man den Inhalt V einer abgekürzten Pyramide aus deren beiden parallelen Grundflächen F, f, und der Höhe h berechnen kann.

Auflösung. Die Höhe der Ergänzungspyramide sei $= x$, so ist:

$$V = \frac{h + x}{3} . F - \frac{x}{3} f$$

oder $V = \frac{1}{3} h F + \frac{1}{3} x (F - f) \ldots\ldots\ldots (1)$

Ferner ist (§ 166):

$$\frac{x^2}{(h+x)^2} = \frac{f}{F} \text{ also } \frac{x}{h+x} = \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{F}} \text{ und hieraus: } x = \frac{h\sqrt{f}}{\sqrt{F} - \sqrt{f}}$$

Diesen für x gefundenen Ausdruck in die Gleichung (1) substituiert, kommt:

$$V = \frac{1}{3} h F + \frac{\frac{1}{3} h \sqrt{f}}{\sqrt{F} - \sqrt{f}} (F - f)$$

oder $V = \frac{1}{3} h F + \frac{1}{3} h \sqrt{f} (\sqrt{F} + \sqrt{f})$ **)

und hieraus nach gehöriger Reduktion die verlangte Formel:

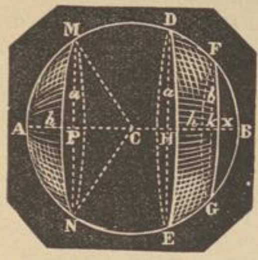
$$V = \frac{h}{3} (F + \sqrt{Ff} + f)$$

---

*) Es ist nämlich $\frac{R^2 - r^2}{R - r} = R + r$. (Algebra § 143.)

**) Weil $\frac{F - f}{\sqrt{F} - \sqrt{f}} = \frac{(\sqrt{F})^2 - (\sqrt{f})^2}{\sqrt{F} - \sqrt{f}} = \sqrt{F} + \sqrt{f}$. (Algebra § 143 und § 215, 4.)

184.



Aufgabe. Eine Formel abzuleiten, nach welcher man den Kubikinhalt eines Kugelausschnitts, CMAN, berechnen kann, wenn der Radius r der Kugel und die Höhe der Haube, welche der Ausschnitt zur Grundfläche hat, $AP = h$ gegeben ist.

Auflösung. Was von der ganzen Kugel, als eine Summe von kleinen Pyramiden (Kegeln) gilt, gilt offenbar auch von einem Ausschnitt. Er ist nämlich gleich einem Kegel, dessen Höhe gleich dem Radius, und dessen Grundfläche die Haube ist. Letztere ist (§ 178) $= 2\pi rh$, folglich der Inhalt des Ausschnitts:

$$V = \tfrac{2}{3}\pi r^2 h.$$

185.

Aufgabe. Den Inhalt eines Haubenabschnitts, MAN, aus der Höhe $AP = h$ und dem Radius der Kugel zu berechnen.

Auflösung. Man muſs den Kegel CMN vom Ausschnitt CMAN subtrahieren. Der Inhalt des Kegels ist $= \pi . \frac{CP}{3} . MP^2$, oder weil $CP = r - h$ und $\overline{MP}^2 = r^2 - (r-h)^2 = 2rh - h^2$ und der Inhalt des Ausschnitts (nach § 184) $= \frac{2}{3}\pi r^2 h$, so ist der Abschnitt $V = \frac{2}{3}\pi r^2 h - \pi . \frac{r-h}{3} . (2rh - h^2)$, oder die Klammern aufgelöst und gehörig reduziert:

$$V = \pi h^2 (r - \tfrac{1}{3}h) \ldots\ldots. (1)$$

Zusatz. Ist statt des Radius r der Kugel der bequemer zu messende Radius des Grundkreises des Abschnitts, $MP = a$ gegeben, so folgt aus § 126: $h : a = a : 2r - h$; hieraus: $r = \frac{a^2 + h^2}{2h}$. Dies statt r in obige Formel (1) substituiert, ist auch:

$$V = \frac{\pi h}{6} (3a^2 + h^2) \ldots\ldots\ldots. (2)$$

186.

Aufgabe. Den Inhalt V eines Zonen-Abschnitts, DEGF, zu berechnen, wenn die Höhe HK $= h$ und die Radien der beiden Grundflächen DH $= a$ und FK $= b$ gegeben sind.

Auflösung. Man setze KB $= x$ und subtrahiere den Abschnitt FBG vom Abschnitt DBE, so hat man den Zonen-Abschnitt (§ 185, Formel 2):

$$V = \pi . \frac{3a^2 + (h+x)^2}{6} . (h+x) - \frac{\pi x}{6} . (3b^2 + x^2).$$

$$\text{oder } \frac{6V}{\pi} = 3a^2h + 3a^2x + h^3 + 3h^2x + 3hx^2 - 3b^2x$$

$$\frac{6V}{\pi} = 3a^2h + h^3 + 3(hx^2 + a^2x + h^2x - b^2x).$$

Um x zu eliminieren, hat man, den Radius der Kugel $= r$ gesetzt (§ 126):

$$x : b = b : 2r - x, \quad \text{hieraus: } 2r = \frac{b^2}{x} + x$$

$$h + x : a = a : 2r - (x+h), \quad \text{hieraus: } 2r = \frac{a^2}{h+x} + x + h.$$

Mithin ist $\frac{b^2}{x} = \frac{a^2}{h+x} + h$ und hieraus folgt:

$$hx^2 + a^2x + h^2x - b^2x = b^2h,$$

folglich nach Substitution und gehöriger Reduktion:

$$V = \frac{\pi h}{2}(a^2 + b^2 + \tfrac{1}{3}h^2).$$

187.

Um den Inhalt ganz unregelmäſsiger Körper zu finden, muſs man sie in Prismen oder Pyramiden zerlegen und die einzelnen Stücke berechnen. Geht dies nicht an, so muſs man sich auf folgende Weise zu helfen suchen:

1) Hat man den Inhalt eines Hohlgefäſses zu bestimmen, so kann man es mit Wasser füllen, dieses dann in einen senkrechten Cylinder oder ein Parallelepipedon von bekannter Grundfläche gieſsen, die Höhe, bis zu welcher das Wasser ihn anfüllt, messen, und hat dann diese nur mit der Grundfläche zu multiplizieren. Ist der Cylinder (Parallelepiped) im voraus, zu einem kubischen Maſsstab dienend, gehörig

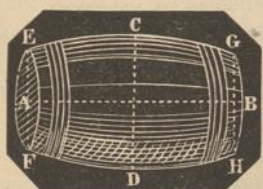
graduiert, so kann man das Volumen, welches das Wasser in ihm einnimmt, unmittelbar ablesen.

2) 1 Liter (Kubikdecimeter) Wasser wiegt 1 kg oder 2 ℔, folglich kann man auch aus dem Gewichte des Wassers, welches ein Hohlgefäſs enthält, seinen Inhalt berechnen.

3) Ist der Inhalt eines nicht hohlen unregelmäſsigen Körpers zu bestimmen, so kann man ihn in einen hohlen Cylinder (Prisma) von bekannter Grundfläche legen, den leer bleibenden Raum so weit mit Wasser (Sand) ausfüllen, bis der Körper ganz bedeckt ist. Man nimmt dann den Körper wieder heraus und miſst, um wieviel das Wasser im Cylinder jetzt niedriger steht, und multipliziert diese Senkung mit der Grundfläche.

4) Man umgebe den Körper — er sei z. B. ein groſser auf dem Felde liegender Stein — mit einem prismatischen Körper (Parallelepipedon), dessen Inhalt man berechnen kann, fülle den leer bleibenden Raum mit Sand (Erde) aus, berechne jetzt den ganzen prismatischen Körper und subtrahiere den Kubikinhalt des zur Ausfüllung gebrauchten Sandes.

188.



*) Den kubischen Inhalt leerer Fässer berechnet man annäherungsweise nach einer der beiden folgenden Formeln, worin D = CD den gröſsten durchs Spund gemessenen Durchmesser, d = EF = GH den Durchmesser der parallelen Böden und h = AB die Länge des Fasses, V den Inhalt bedeutet, und $\pi = 3\frac{1}{7}$ ist.

$$V = \frac{\pi h}{9} (D + \tfrac{1}{2} d)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$V = 0{,}04909\, h\, (10\, D^2 + 5\, d^2 + D d) \ldots\ldots (2)$$

Die zweite Formel (von Rich. Schurig) giebt das Volumen genauer. — Wäre z. B. D = 100 cm, d = 60 cm, h = 110 cm, so giebt die erste Formel: V = 649,17 Liter, die zweite Formel: V = 661,15 Liter.

Sind die beiden Böden von verschiedenen Durchmessern, so nimmt man für d das arithmetische Mittel derselben.

189.

Regelmäfsige Körper. Regelmäfsige Vielecke, d. h. solche, deren Winkel und Seiten einander gleich sind, kann man von jeder beliebigen Seitenzahl, mithin unendlich viele verschiedene denken. Übertragen wir aber diesen Begriff von Regelmäfsigkeit auch auf Körper, und nennen nur solche Körper regelmäfsige, deren Ecken (körperliche Winkel) einander gleich, und deren Seitenflächen kongruente und zugleich regelmäfsige Vielecke sind, so ergiebt sich, als eine notwendige Folge und merkwürdiges Resultat unserer Denkgesetze, dafs es solcher regelmäfsigen Körper nicht mehr, als fünf verschiedene geben kann.

Der Grund liegt nämlich darin: dafs 1) zur Bildung eines körperlichen Winkels (Ecke) wenigstens drei Ebenen erforderlich sind, und dafs, wie ebenfalls leicht einzusehen, 2) alle Kantenwinkel (Linienwinkel), welche eine Ecke bilden (z. B. um die Spitze einer Pyramide herum liegen), zusammen allemal weniger, als vier rechte Winkel betragen.

Hieraus folgt nun sogleich, dafs es keinen regelmäfsigen Körper geben kann, dessen Seitenflächen kongruente regelmäfsige Sechsecke und viel weniger noch regelmäfsige 7, 8, 9...Ecke wären; denn schon im regelmäfsigen Sechseck beträgt jeder Winkel 120°. Drei solche Winkel können also nicht (weil 4 Rechte betragend) zur Bildung einer Ecke zusammengestellt werden, und wir haben es deshalb nur noch mit den regelmäfsigen 3, 4 und 5 Ecken zu versuchen.

Im regelmäfsigen Dreieck ist jeder Winkel = 60°. Drei, vier und auch fünf solche Winkel betragen weniger, als vier rechte und können also eine Ecke bilden. Im regelmäfsigen Viereck ist jeder Winkel = 90°, und im regelmäfsigen Fünfeck = 108°. Von jedem dieser Winkel können also nur drei eine Ecke bilden. Die gehörige Zusammenstellung giebt nun folgende fünf regelmäfsige Körper.

1. *Tetraeder*, dessen Seitenflächen regelmäfsige Dreiecke sind. — Man denke sich auf der Ebene eines gleichseitigen Dreiecks, ABC, im Mittelpunkt O ein Perpendikel errichtet und schneide dieses mit einer Seite, AB, aus einem Punkt, A, in einem Punkt, P, so giebt dieser Punkt P mit A, B, C verbunden noch drei regelmäfsige, dem ABC kongruente Dreiecke, und es ist

leicht einzusehen, dafs in der entstandenen Pyramide PABC auch die vier körperlichen Winkel (Ecken) einander gleich sind, weil jeder durch drei Kantenwinkel von je 60° gebildet. Zeichnet man, um das Netz des *Tetraeders* zu erhalten, über jede Seite des regelmäfsigen Dreiecks ABC wieder regelmäfsige Dreiecke, ABS etc., so kann man die ganze Figur aus dem Papier schneiden, und die äufsern Dreiecke dachförmig gegen das innere aufschlagen.

2. *Hexaeder*, dessen sechs gleiche Seitenflächen Quadrate sind, wovon je drei eine Ecke bilden. Dieser Körper ist der schon bekannte Würfel oder Kubus, und dessen Netz leicht zu konstruieren.

3. *Oktaeder*, dessen acht gleiche Seitenflächen regelmäfsige Dreiecke sind, wovon je vier eine Ecke bilden. Man denke sich auf der Ebene eines Quadrats, ABCD, im Mittelpunkt O ein Perpendikel errichtet, und dieses durch die Ebene hindurch verlängert. Schneidet man dieses Perpendikel mit einer Seite, AB, aus A auf beiden Seiten des Quadrats in den Punkten P und P', und verbindet diese mit A, B, C, D, so hat man über der Grundfläche ABCD zwei gleiche entgegengesetzte Pyramiden gezeichnet, welche das *Oktaeder* bilden.

4. *Dodekaeder*, dessen zwölf gleiche Seitenflächen regelmäfsige Fünfecke sind, und wovon jede der zwanzig Ecken aus drei Kantenwinkeln von je 108° gebildet ist.

5. *Ikosaeder*, dessen zwanzig gleiche Seitenflächen wiederum regelmäfsige Dreiecke sind, und wovon jede seiner 12 Ecken durch 5 Kantenwinkel von je 60° gebildet wird.

Die genauere Beschreibung und Netzzeichnung der drei letzten regelmäfsigen Körper, sowie die Berechnung derselben würde zu viel Raum einnehmen, und da die vollständige Theorie dieser Körper doch nur rein wissenschaftliches Interesse hat, so müssen wir uns darauf beschränken, den merkwürdigen Umstand, dafs es nur fünf verschiedene Arten regelmäfsige Körper geben kann, kurz angedeutet zu haben. Hat man jedoch diese Körper zur Hand, so ist auch die Möglichkeit ihrer Konstruktion leicht einzusehen.

Achtzehntes Buch.

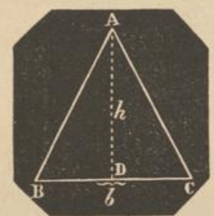
Anwendung der Algebra auf Geometrie.

190.

Unter Anwendung der Algebra auf Geometrie versteht man die Verbindung beider Wissenschaften mit einander, wodurch sie befähigt werden, Probleme zu lösen, welche die Kräfte jeder einzelnen übersteigen. Einige solcher Verbindungen sind im Vorhergehenden bereits schon vorgekommen; wir erinnern nur an die Aufgabe: die Inhalte räumlicher Gröſsen, z. B. des Kreises, Kegels, der Kugel etc. zu bestimmen, welches offenbar der Geometrie allein nicht möglich ist, aber auch der Arithmetik allein nicht, weil diese die Kenntnis geometrischer Gesetze voraussetzt, worauf sie ihre Rechnungen gründet. Kurz, beide muſsten mit einander verbunden werden, wie denn überhaupt fast die ganze praktische Geometrie nur aus einer solchen Verbindung hervorgeht. Deshalb ist auch die Arithmetik für die Praxis höchst wichtig und der eigentliche Lebensnerv der praktischen Geometrie, wie dies besonders ein eigener und wichtiger Teil der Mathematik, die Trigonometrie, zeigt.

Durch Hilfe der Arithmetik können ferner manche Beweise ungemein vereinfacht und abgekürzt werden. Manche geometrische Sätze lassen sich nur auf arithmetischem Wege finden und beweisen. Man merke sich hier folgendes: Sind von einer räumlichen Gröſse solche Stücke in Zahlen gegeben, wodurch andere damit in Verbindung stehende Stücke der Gröſse nach vollkommen bestimmt sind und durch Zeichnung gefunden werden könnten, wie z. B. durch die drei Seiten eines Dreiecks der Radius des um- oder eingeschriebenen Kreises etc., so muſs es auch allemal zwischen solchen von einander abhängigen räumlichen Gröſsen eine arithmetische Beziehung geben, und somit eine allgemeine Gleichung existieren, welche den Zusammenhang dieser Gröſsen enthält. Und diese Gleichung aufzufinden, d. i. die geometrische Beziehung unter den fraglichen Gröſsen in die arithmetische Sprache zu übersetzen, ist eine der Hauptanwendungen der Arithmetik auf Geometrie. Hat man solche Gleichungen (Formeln) einmal gefunden, so zeigen sie, abgesehen von ihrer oft merkwürdigen Form, manchmal noch mehr, als man suchte, ganz ungeahnte merkwürdige Verhältnisse, so daſs in diesem Sinne die Arithmetik ein wichtiges Entdeckungsmittel ist. — Einige Gewandtheit in der Algebra, schnelle Erinnerung geometrischer Lehrsätze, sind aber hierzu erforderlich, wie die folgenden Beispiele zeigen werden.

191.



Aufgabe. Es ist die Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks BC $= b$ gegeben, sowie die Schenkel AB $=$ AC $= a$. Man sucht die Höhe AD $= h$ und den Inhalt F.

Auflösung. Aus dem rechtwinkligen Dreieck ADC folgt sogleich:

$$h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}.$$

$$F = \tfrac{1}{2} b . \sqrt{a^2 - \tfrac{1}{4} b^2} = \frac{b}{4} \sqrt{4a^2 - b^2}.$$

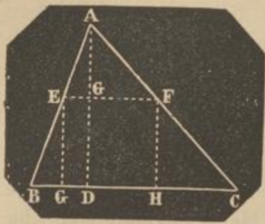
Wäre $b = a$, also das Dreieck ein gleichseitiges, so wäre

$$h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{3}.$$

$$F = \left(\frac{a}{2}\right)^2 . \sqrt{3}.$$

192.

Aufgabe. Es ist die Grundlinie und Höhe eines Dreiecks gegeben, BC $= a$, AD $= h$. Man sucht die Seite x eines darin



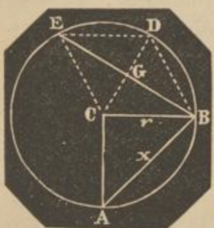
gezeichneten Quadrats, von welchem eine Seite auf der Grundlinie liegt.

Auflösung. Weil $\triangle$ AEF $\sim$ $\triangle$ ABC, und AG $= h - x$, so hat man:

$$(h - x) : h = x : a$$

$$\text{hieraus: } x = \frac{ah}{a + h}$$

193.



Aufgabe. Es ist der Radius eines Kreises CA $= r$ gegeben. Wie findet man hieraus die Seite des eingeschriebenen regelmäſsigen Vierecks AB $= x$, und des Dreiecks BE $= y$?

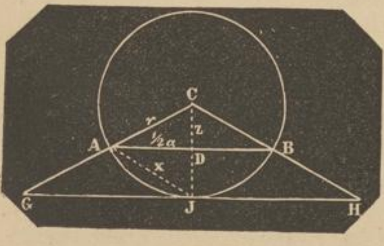
Auflösung. Für die Seite des Vierecks ist: $x^2 = 2r^2$, also:

$$x = r\sqrt{2}.$$

Ist BD $=$ DE $= r$, so ist CG $= \frac{1}{2} r$ (§ 46), und folglich $(\frac{1}{2}y)^2 = r^2 - (\frac{1}{2}r)^2$, hieraus:

$$y = r\sqrt{3}.$$

194.



Aufgabe. Aus dem Radius eines Kreises AC $= r$, und der Seite eines beliebigen eingeschriebenen regelmäſsigen Vielecks AB$= a$, die Seite des umgeschriebenen regelmäſsigen Vielecks GH $= u$, und die Seite des eingeschriebenen regelmäſsigen Vielecks von doppelt so vielen Seiten AJ $= x$ zu finden.

Auflösung. Setzt man vorläufig das Perpendikel CD $= z$, so hat man zuerst $z^2 = r^2 - (\frac{1}{2}a)^2$, also: $z = \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}a^2}$.

Dann ist CD : CJ = AB : GH oder $z : r = a : u$, hieraus: $u = \frac{ar}{z}$, oder: statt z seinen Wert gesetzt,

$$u = \frac{ar}{\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}a^2}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Weil nun $DJ = r - z$, so ist: $x^2 = (\frac{1}{2}a)^2 + (r - z)^2$, oder: $x^2 = \frac{1}{4}a^2 + r^2 - 2rz + z^2$, oder, statt z und z^2 ihre Werte gesetzt:

$$x = \sqrt{2r(r - \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}a^2})} \ldots\ldots (2)$$

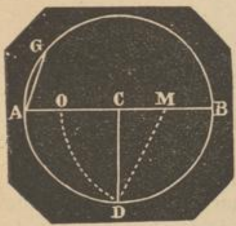
Setzt man in beiden Formeln $r = 1$, so hat man:

$$u = \frac{a}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}a^2}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$x = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a^2}} \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Wäre a die Seite des eingeschriebenen regelmäſsigen Vierecks $= \sqrt{2}$ (§ 193), so findet man nach Formel (4) die Seite x des eingeschriebenen Achtecks, und wenn man darin diesen gefundenen Wert wieder statt a setzt, nach derselben Formel die Seite des eingeschriebenen 16-Ecks etc. Auf diese mühsame Weise sind die Zahlen § 139 berechnet worden.

195.



*) **Aufgabe.** Aus dem Radius $AC = r$ die Seite des regelmäſsigen Zehnecks zu berechnen.

Auflösung. Wird der Radius in O nach stetiger Proportion geteilt, so ist (§ 135) OC die Seite des Zehnecks. Setzt man $OC = x$, mithin $AO = r - x$, so hat man (Algebra § 227):

$$r - x : x = x : r$$

$$x^2 + rx = r^2$$

$$x^2 + rx + \left(\frac{r}{2}\right)^2 = r^2 + \frac{r^2}{4}$$

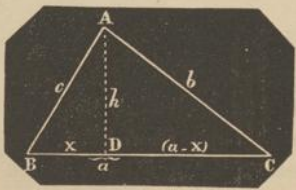
$$x + \tfrac{1}{2}r = \pm\sqrt{\frac{5r^2}{4}}$$

$$x = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

Anmerkung. Hieraus folgt noch eine leichtere Konstruktion für die Seite des Zehnecks. Man halbiere nämlich den Radius BC in M, errichte CD senkrecht auf AB, nehme MO = MD, so ist CO die Seite des Zehnecks (und zugleich die Gerade DO die des Fünfecks).

Beweis. Es ist $\overline{\mathrm{MO}}^2 = \overline{\mathrm{MD}}^2 = r^2 + \frac{1}{4}r^2 = \frac{5r^2}{4}$, also $\mathrm{MO} = \frac{1}{2}r\sqrt{5}$, folglich $\mathrm{CO} = \frac{1}{2}r\sqrt{5} - \frac{1}{2}r = \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$, wie vorhin.

196.



Aufgabe. Es sind die drei Seiten a, b, c eines Dreiecks gegeben, auf die Seite $\mathrm{BC} = a$ ist das Perpendikel AD gefällt, man sucht den Abstand desselben von B (die Projektion von c auf a).

Auflösung. Setzt man den fraglichen Abstand $\mathrm{BD} = x$, mithin $\mathrm{DC} = a - x$, und $\mathrm{AD} = h$, so ist: $h^2 = c^2 - x^2$, und auch $h^2 = b^2 - (a-x)^2$, folglich:

$$b^2 - (a - x)^2 = c^2 - x^2$$

$$b^2 - a^2 + 2ax - x^2 = c^2 - x^2$$

$$\text{und hieraus: } x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\text{*)}$$

197.

Aufgabe. Eine Formel abzuleiten, nach welcher man aus den drei gegebenen Seiten a, b, c eines Dreiecks den Inhalt F berechnen kann.

Auflösung. Es kommt nur darauf an, die Höhe h zu finden. Setzen wir deshalb (s. Figur § 196) in den Ausdruck

$$h^2 = c^2 - x^2 = (c + x)(c - x)$$

---

*) Man vergleiche wegen des negativen Resultats, welches diese Formel geben kann, Algebra § 126.

statt x den dafür gefundenen Wert, so ist:

$$h^2 = \left(c + \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)\left(c - \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)$$

$$h^2 = \left(\frac{2ac+a^2+c^2-b^2}{2a}\right)\left(\frac{2ac-a^2-c^2+b^2}{2a}\right)$$

$$h^2 = \frac{\{(a+c)^2-b^2\}\,\{b^2-(a-c)^2\}}{4a^2}$$

$$h^2 = \frac{(a+c+b)\,(a+c-b)\,(b+a-c)\,(b-a+c)}{4a^2}$$

$$h = \frac{1}{2a}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}$$

Multipliziert man die gefundene Höhe mit $\frac{a}{2}$, so ist:

$$F = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}\,^{*})$$

Diese Formel, welche besonders für die Feldmeſskunst von groſser Wichtigkeit ist, läſst sich noch auf eine für die numerische Rechnung bequemere Form bringen. Setzen wir nämlich die Summe der drei gegebenen Seiten:

$$a+b+c=s=2.\tfrac{1}{2}s$$

so ist: $a+b-c=2.\tfrac{1}{2}s-2c=2(\tfrac{1}{2}s-c)$

$$a+c-b=2.\tfrac{1}{2}s-2b=2(\tfrac{1}{2}s-b)$$

$$b+c-a=2(\tfrac{1}{2}s-a).$$

Dies in vorstehende Formel substituiert, kommt, nach gehöriger Reduktion:

$$F = \sqrt{\tfrac{1}{2}s.(\tfrac{1}{2}s-a)\,(\tfrac{1}{2}s-b)\,(\tfrac{1}{2}s-c)}$$

in Worten: man subtrahiere von der halben Summe der drei Seiten jede derselben, multipliziere die drei Reste und die

*) Diese Formel, sagt Playfair, zu Euklids Zeiten wahrscheinlich unbekannt, findet sich, jedoch ohne Beweis, in den Schriften Heros des Jüngern, eines Ingenieurs, welcher um das achte Jahrhundert gelebt zu haben scheint. Sie war jedoch schon viel früher in Hindostan bekannt, wie aus einem Werke des Bramegupta hervorgeht. Der Italiener Tartaglia aber, der im sechzehnten Jahrhundert lebte, machte zuerst darauf aufmerksam.

halbe Summe mit einander, und ziehe aus dem Produkt die Quadratwurzeln, was mittelst Logarithmentafeln sich leicht thun läſst. Sei z. B. gegeben:

	$\frac{1}{2}s = 331{,}4$	$\ldots 2{,}5203525$
$a = 256{,}7$ m	$\frac{1}{2}s - a = 74{,}7$	$\ldots 1{,}8733206$
$b = 198{,}6$ m	$\frac{1}{2}s - b = 132{,}8$	$\ldots 2{,}1231981$
$c = 207{,}5$ m	$\frac{1}{2}s - c = 123{,}9$	$\ldots 2{,}0930713$
$s = 662{,}8$ m		$8{,}6099425$
	lg F =	$4{,}3049712$
	F =	20182,33 qm.

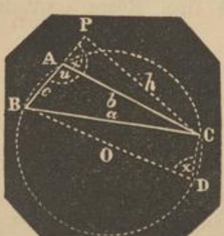
198.

Aufgabe. Aus den drei Seiten eines Dreiecks a, b, c den Radius r des eingeschriebenen Kreises zu berechnen.

Auflösung. Nach dem vorhergehenden § kann man den durch die Seiten bestimmten Inhalt F des Dreiecks als bekannt ansehen; da nun der Mittelpunkt O des eingeschriebenen Kreises von allen drei Seiten gleich weit entfernt ist (§ 76), so hat man: $\frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = \mathrm{F}$, und hieraus:

$$r = \frac{2\mathrm{F}}{a + b + c}$$

199.



Aufgabe. Aus den drei Seiten a, b, c eines Dreiecks den Radius R des umgeschriebenen Kreises zu finden.

Auflösung. Setzt man den als bekannt anzusehenden Inhalt $= \mathrm{F}$, und das von C auf AB gefällte Perpendikel $\mathrm{CP} = h$, so ist erstlich:

$$\frac{ch}{2} = \mathrm{F}, \text{ also: } h = \frac{2\mathrm{F}}{c}$$

Verbindet man den Endpunkt D des Durchmessers mit C, so ist $\angle$ BCD $=$ P $= 90^0$ (§ 81), ferner: $x + u = x' + u = 180^0$ (§ 90), also $x = x'$, mithin $\triangle$ CAP $\sim$ $\triangle$ BDC, daher: $b : 2\mathrm{R} = h : a$, oder $b : 2\mathrm{R} = \frac{2\mathrm{F}}{c} : a$, und hieraus:

$$\mathrm{R} = \frac{abc}{4\mathrm{F}}.$$

200.

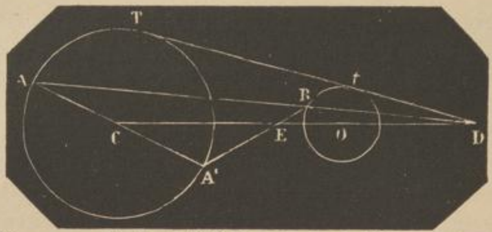
Aufgabe. Es soll ein Quadrat, dessen Seite $= a$, mit gleichen Kreisen möglichst angefüllt werden. Mit wie viel Kreisen kann dies geschehen und wie viel beträgt die Flächensumme der leer bleibenden Zwischenräume?

Auflösung. Denkt man sich die Seiten des Quadrats in n gleiche Teile geteilt, so zerfällt das Quadrat in n^2 kleinere gleiche Quadrate. In jedes kann ein Kreis beschrieben werden, dessen Inhalt $= \pi \left(\frac{a}{2n}\right)^2$. Der Inhalt aller Kreise ist $= n^2 . \pi \left(\frac{a}{2n}\right)^2 = \pi . \frac{a^2}{4}$; folglich ist, wie grofs auch n angenommen werden möge, die Summe aller Kreisflächen doch jedesmal gerade so grofs, als ein einziger eingeschriebener Kreis; die fragliche Summe der leeren Zwischenräume ist folglich $= a^2 - \pi . \frac{a^2}{4} = a^2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$, und das Quadrat kann mit 1, 4, 9, 16, 25... gleichen Kreisen ausgefüllt werden.

Eben so ist leicht einzusehen, dafs ein Kubus, dessen Seite $= a$, mit 1, 8, 27, 64...n^3 gleichen Kugeln ausgefüllt werden kann und dafs die Summe der leeren Zwischenräume stets $= a^3\left(1 - \frac{\pi}{6}\right)$.

201.

Aufgabe. Es sind die Gröfsen zweier Kreise und ihr Abstand gegeben: CA $=$ R, OB $= r$, CO $= e$. Man ziehe zwei parallele Radien, sowohl nach derselben, als auch nach entgegengesetzten Richtungen OB $\parallel$ CA und OB $\parallel$ CA′, verbinde ihre Endpunkte durch gerade Linien und bestimme dann deren Durchschnittspunkte D und E in der Centrallinie von O, nämlich OD $= x$, und OE $= y$.



Auflösung. Weil $\triangle BOD \sim \triangle ACD$, so hat man:

$$x : x + e = r : R, \text{ hieraus:}$$

$$x = \frac{re}{R - r}$$

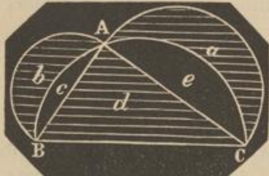
Ferner ist $\triangle OEB \sim \triangle ECA'$, daher:

$$y : e - y = r : R, \text{ hieraus:}$$

$$y = \frac{re}{R + r}$$

Anmerkung. Weil die gefundenen Werte x, y von der Lage der parallelen Radien nicht abhängen, und dieselben bleiben, wenn die Verbindungslinie auf dem einen Radius, mithin auch auf dem andern senkrecht steht, so ist es leicht, an zwei gegebene Kreise eine gemeinschaftliche Berührungslinie zu ziehen, indem man erst die Punkte D und E bestimmt und dann nach § 83 verfährt. Denkt man sich statt der Kreise Kugeln, und die kleinere von der gröſsern beleuchtet, so ist die Länge des sogenannten Kernschattens durch den für x gefundenen Ausdruck gegeben.

202.



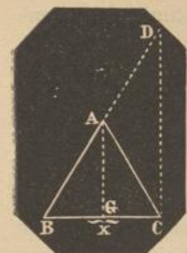
Aufgabe. Über die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks, ABC, sind Halbkreise beschrieben; man soll beweisen, daſs die Flächensumme der beiden mondförmigen Stücke a und b, welche nach ihrem Entdecker die Hippokratischen Möndchen genannt werden, so groſs ist, als die Fläche des Dreiecks ABC.

Auflösung. Die Fläche des gröſsern Halbkreises ist $= \frac{1}{8} . \pi BC^2$, die der beiden kleinern $= \frac{1}{8}\pi . \overline{AB}^2 + \frac{1}{8}\pi . \overline{AC}^2 = \frac{1}{8}\pi(\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2) = \frac{1}{8}\pi . \overline{BC}^2$, folglich ist

$$c + d + e = a + e + b + c,$$

hieraus: $a + b = d$. Wäre das rechtwinklige Dreieck gleichschenklig, so wäre jedes der beiden Möndchen gleich der Hälfte des Dreiecks ABC.

203.



Aufgabe. Wie grofs mufs die Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks sein, wenn der Inhalt desselben F = 48 qm, und die gleichen Schenkel AB = AC = a = 10 m sein sollen.

Auflösung. Es sei die gesuchte Grundlinie BC$=x$, also das darauf gefällte Perpendikel AG $=\sqrt{a^2-(\frac{1}{2}x)^2}$, so hat man:

$$F = \tfrac{1}{2}x\sqrt{a^2 - \tfrac{1}{4}x^2}$$

$$F^2 = \frac{x^2}{4}\left(a^2 - \frac{x^2}{4}\right) = \frac{a^2x^2}{4} - \frac{x^4}{16}$$

$$x^4 - 4a^2x^2 = -16F^2 \text{ (Algebra § 231)}$$

$$x^4 - 4a^2x^2 + (2a^2)^2 = 4a^4 - 16F^2$$

$$x^2 - 2a^2 = \pm\sqrt{4a^4 - 16F^2}$$

$$x = \sqrt{2a^2 \pm \sqrt{4a^4 - 16F^2}}$$

Je nachdem man das obere oder untere Vorzeichen nimmt, hat man $x = 16$, und auch $x = 12$. Dafs hier wirklich zwei verschiedene Grundlinien möglich sind, worauf die Algebra aufmerksam macht, ist leicht einzusehen, wenn man AB um sich selbst nach D verlängert, und DC zieht; dann ist $\triangle$ABC = $\triangle$ADC (§ 97, Zusatz). Ist also BC = 12, so ist DC = 16.

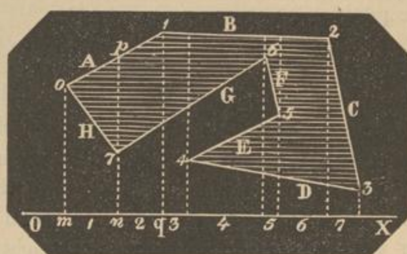
204.

*) Zum Schlusse dieses Kapitels wollen wir noch eine uns von Gaufs mitgeteilte, für die praktische Geometrie wichtige Methode erläutern, nach welcher man den Flächeninhalt einer aufs Papier getragenen Figur (z. B. einer Karte) leichter, als nach der gewöhnlichen Methode berechnen kann.

Nach der gewöhnlichen Methode zerlegt man die Figur in lauter Dreiecke (in Rechtecke ist selten möglich), mifst nach demselben verjüngten Mafsstab, nach welchem die Figur aufgetragen worden, in jedem Dreieck Grundlinie und Höhe, und berechnet hieraus den fraglichen Inhalt. Diese Methode ist aber nicht allein der Karte sehr nachteilig, sondern auch noch andern Übelständen und Unbequemlichkeiten ausgesetzt, denen wir auf folgende Weise ausweichen können.

Des leichtern Verständnisses halber wollen wir als Beispiel zuerst eine geradlinig begrenzte Figur von bestimmter Seitenzahl annehmen.

Wir ziehen nun neben dieser Figur in beliebiger Richtung eine Linie, OX (Abscissenachse), und fällen darauf von jedem Eckpunkt ein Perpendikel (Ordinate), welches wir uns aufwärts durch die Figur hindurch verlängert denken, so ist dadurch die Abscissenlinie in $n - 1$ Teile geteilt,*) wenn die Figur n Seiten hat, und es ist klar, dafs jeder dieser Teile der Abscissenlinie mit zwei Ordinaten und einer Seite der Figur oder mit einem Stück von der Seite, ein Trapez bildet; kurz, die ganze Figur (bis an die Abscissenachse gerechnet) ist in lauter Trapeze zerlegt, die teils positiv, teils negativ sind. —



Bezeichnen wir die ganzen Seiten der Figur einfach mit A, B, C…, und Stücke davon mit denselben, jedoch numerierten Buchstaben, so können wir den Flächeninhalt der Figur folgendermafsen erst kurz andeuten:

$$\begin{array}{llllllll}
1A_1 & -1H & -2G_1 & +3B_1 & +4E_1 & -4D_1 & -5F & +7C \\
2A_2 & & -3G_2 & +4B_2 & +5E_2 & -5D_2 & & \\
 & & -4G_3 & +5B_3 & & -6D_3 & & \\
 & & & +6B_4 & & -7D_4 & & \\
\hline
\end{array}$$

$$\text{Fläche} = (A) + (B) + (C) + (-D) + (E) + (-F) + (-G) + (-H)$$

*) Eins oder mehrere dieser Teile kann $= 0$ sein, wenn eine oder mehrere Seiten der Figur mit der Ordinatenrichtung parallel laufen.

wobei also $1\,A_1$ das Trapez $opnm$ und 1 H das davon zu subtrahierende Trapez $o7nm$, ferner $2\,A_2$ das Trapez $p1qn$, und $(A) = 1\,A_1 + 2\,A_2$ das Trapez $o1qm$ bedeutet etc.

Man sieht also, daſs die algebraische Summe der Trapeze, welche die Seiten mit den aus ihren Endpunkten gefällten Ordinaten und den dazwischen liegenden Stücken der Abscissenlinie bilden, den Flächeninhalt der Figur auf sehr einfache Weise darstellt. Was die Vorzeichen betrifft, unter denen offenbar ein enger Zusammenhang stattfindet, so lassen sich dieselben auf folgende Weise erklären:

Wir können den Umfang einer Figur auf zweierlei Weise umgehen; einmal, indem wir die Figur selbst immer zur Rechten, dann auch, indem wir sie immer zur Linken haben. Geht man vom Endpunkt einer der beiden äuſsersten Ordinaten, z. B. von o aus, und zwar steigend von o nach 1, von 1 nach 2 etc., so unterscheiden sich die Seiten ganz einfach durch + und —, je nachdem sie vorwärts oder rückwärts laufen, d. h. je nachdem sie von der ersten Ordinate weiter ab zu den folgenden oder wieder zurückführen. Hiernach müssen also notwendig A, B, C positiv, D aber negativ, E wieder positiv sein etc.

Bezeichnet man demnach die Eckpunkte der Figur, von einer der äuſsersten Ordinaten ausgehend, mit 0, 1, 2..., die von einem beliebig genommenen Punkt, O, abgemessenen Abscissen derselben mit x_0, x_1, $x_2 \ldots$, und die zugehörigen Ordinaten mit y_0, y_1, $y_2 \ldots$ (wobei also $x_0 = Om$, $x_1 = Oq \ldots$; $y_0 = om$, $y_1 = 1q \ldots$; $x_1 - x_0 = mq$; $\frac{y_0 + y_1}{2} = \frac{om + 1q}{2}$ etc.), so kann man die vorhergehende Formel, wenn man die Trapeze (A), (B)... durch Koordinaten ausdrückt, auch so schreiben:

$$F = (x_1 - x_0) \cdot \frac{y_0 + y_1}{2} + (x_2 - x_1) \frac{y_1 + y_2}{2} + (x_3 - x_2) \frac{y_2 + y_3}{2} + \ldots (1)$$

Wir können auf diese Weise allen Trapezen der Gleichförmigkeit halber das *plus*-Zeichen geben, denn ist eins derselben negativ, so ist die dazu gehörige Seite rückläufig, mithin auch die Abscisse des vorhergehenden Punktes gröſser, als die des folgenden, und deshalb liegt das Negative schon in dem Faktor, welcher die Höhe des Trapezes ausdrückt; so ist z. B. in $(-D) = (x_4 - x_3) \frac{y_3 + y_4}{2}$ der Faktor $x_4 - x_3$ wirklich negativ.

Aus obiger Formel folgt:

$$F=\frac{1}{2}\begin{cases}(x_1-x_0)\,(y_0+y_1)\\(x_2-x_1)\,(y_1+y_2)\\(x_3-x_2)\,(y_2+y_3)\\(x_4-x_3)\,(y_3+y_4)\\(x_5-x_4)\,(y_4+y_5)\\(x_6-x_5)\,(y_5+y_6)\\(x_7-x_6)\,(y_6+y_7)\\(x_0-x_7)\,(y_7+y_0)\end{cases}$$

Ohne die angedeuteten Multiplikationen wirklich auszuführen, sieht man leicht, daſs je zwei auf einander folgende Produkte, nämlich das erste und zweite, das zweite und dritte, das letzte und erste, immer zwei gleiche und entgegengesetzte Teile enthalten, z. B. das erste $+ x_1 y_1$, das zweite $- x_1 y_1$ etc., läſst man diese aus, so ist:

$$F=\tfrac{1}{2}\,[x_0(y_7-y_1)+x_1(y_0-y_2)+x_2(y_1-y_3)+x_3(y_2-y_4)+\ldots$$
$$+\,x_6(y_5-y_7)+x_7(y_6-y_0)].$$

Diese höchst einfache schöne Formel*) (in welcher man auch die Koordinaten x, y mit einander verwechseln könnte) würde in Worten lauten: Man multipliziere jede Abscisse mit der Differenz der nächst vorhergehenden und nächstfolgenden Ordinate und nehme von der algebraischen Summe dieser Produkte die Hälfte.

Es ist klar, daſs diese Formel allgemein gilt, die Anzahl der Punkte möge noch so groſs sein. Hat die Figur auch krummlinige Grenzen, so findet man das Resultat desto genauer, je mehr Punkte man annimmt. Findet man es bequemer, die Abscissenlinie durch die Figur gehen zu lassen, so kann dies die Gestalt der Formel nicht ändern, weil diese Verlegung der Abscissenlinie erstlich die Abscissen-Differenzen $(x_1-x_0)\ldots$, selbst nicht ändert, und was die Ordinaten $y_0, y_1\ldots$ betrifft, so ist, wenn auch jede um $\mp a$ geändert wird, doch immer $(y_m \mp a)-(y_p \mp a)=y_m-y_p$.

Was das bequeme Messen der Koordinaten betrifft, so braucht man dazu zwei rechtwinklig verbundene Maſsstäbe, wovon der eine, an der Abscissenlinie fortgleitende Schenkel die Abscissen, und der andere zugleich die Ordinaten abliest.

*) Nach einer brieflichen Mitteilung hat Gauſs diese Formel schon 1790 gefunden. Sie wird seitdem oftmals wieder aufs neue gefunden, d. h. von verschiedenen Schriftstellern ohne Angabe der Quelle mitgeteilt.

Anhang.

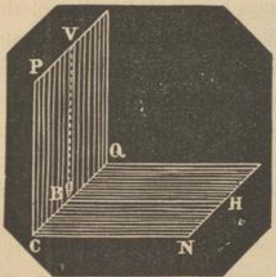
Praktische Geometrie.

205.

Obwohl man eigentlich jede Anwendung der Geometrie auf wirklich vorkommende Fälle des praktischen Lebens praktische Geometrie nennen kann, so pflegt doch gemeiniglich nur derjenige Teil der angewandten Mathematik so genannt zu werden, welcher sich hauptsächlich mit der Feldmeſskunst beschäftigt, und da in dieser das Nivellieren eine der wichtigsten Operationen ist, so müssen wir hiervon, so wie von den dazu erforderlichen Instrumenten, noch eine Vorstellung zu geben versuchen, weil die hierbei vorkommenden neuen Begriffe beim Übergang zum Studium der Mechanik und Naturwissenschaften als bekannt vorausgesetzt werden müssen.

206.

Erklärungen. 1. Diejenige Richtung im Raume, welche ein ganz frei und ruhig hängendes Lot, VB (Senkblei, ein Faden, dessen unteres Ende mit einer kleinen Kugel beschwert ist), angiebt, heiſst vertikal (von *vertex,* Scheitel, weil diese Linie, aufwärts verlängert, durch den höchsten Punkt am Himmelsgewölbe, den Scheitelpunkt, geht). Eine solche Senkrechte heiſst absolute oder freie Senkrechte.



2. Jede längs durch eine Vertikallinie gelegte Ebene, wie PQ, heiſst eine Vertikalebene.

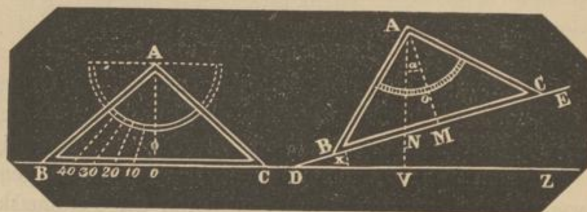
3. Jede Linie, die auf einer Vertikallinie rechtwinklig steht, wie BH, heiſst eine Horizontallinie.

4. Jede Ebene, welche, wie QN, auf einer Vertikallinie senkrecht steht, heiſst Horizontalebene.

Die Wände eines Zimmers z. B. sind oder sollten vertikal, Fuſsboden und Decke horizontal sein.

Ein sehr einfaches Instrument, mittelst dessen man untersuchen kann, ob eine Linie oder Ebene genau vertikal ist, giebt uns das oben erwähnte Lot (Senkblei), welches man an der Linie oder Ebene herunter hängen läfst, und beobachtet, ob die Linie oder Ebene dieselbe Richtung hat.

207.



Erklärung. Ein gleichschenkliges Dreieck von Metall (Holz), in dessen Spitze A ein Lot frei hängt, nennt man eine Setzwage. Befindet sich zwischen dessen Schenkeln ein aus der Spitze A beschriebener, in Grade geteilter Kreis bogen,*) so dient dies Instrument nicht allein, um zu untersuchen, ob Linien oder Ebenen eine horizontale Lage haben, oder um sie in eine solche zu bringen, sondern auch, um ihre Neigung gegen den Horizont zu bestimmen.

Stellt man nun diese Setz- oder Bergwage auf eine Linie, BZ, und das Lot spielt gerade auf den Nullpunkt ein, so ist, weil AB = AC, der Winkel BAC halbiert, das Lot folglich senkrecht auf BC, mithin die Linie BZ horizontal.

Wäre die Setzwage unrichtig (und nie mufs man sich auf die Richtigkeit eines Instruments verlassen, sondern dessen Fehler zu eliminieren wissen), wäre z. B. der linke Schenkel AB kürzer als AC, so wird, auf einer horizontalen Linie, das Lot vom Nullpunkt nach dem kürzern Schenkel hin, um einen gewissen Winkel, y, (den Fehler des Instruments) abweichen. Dreht man dann aber das Instrument um, so dafs B nach C und C nach B kommt, so mufs das Lot jetzt wieder um denselben Winkel y nach dem kürzern (jetzt rechten) Schenkel hin abweichen; daher die allgemeine Regel: man drehe die Setzwage jedesmal um, spielt dann das Lot

*) Oft sind die Teilungen auf der Grundlinie BC bezeichnet, wodurch der Gradbogen entbehrlich wird.

beidemal auf 0 ein, oder weicht es nach entgegengesetzten Seiten gleich viel von 0 ab, so ist die Linie horizontal.

Ebenso untersucht man, ob eine Ebene horizontal ist, indem man die Setzwage nach zwei sich kreuzenden Richtungen aufstellt (§ 149).

Stellt man die Setzwage auf eine um den Winkel x gegen den Horizont geneigte Linie, DE (Figur 2), und das Lot weicht beidemal (vor und nach der Umdrehung) gleichweit, z. B. um $a = 30^0$ vom Nullpunkt ab, so ist offenbar der fragliche Winkel $x = a$, weil das Lot von selbst vertikal hängt, mithin die rechtwinkligen Dreiecke AMN und DVN gleichwinklig sind.

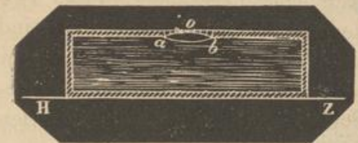
Ist das Instrument unrichtig, so fällt das Lot beidemal, nämlich vor und nach der Umdrehung, um einen Winkel, y, zu weit nach dem kürzern Schenkel hin. Giebt nun die erste Ablesung a^0, die zweite b^0; so hat man, wenn $b < a$, das erste Mal offenbar $x + y$, das zweite Mal $x - y$ abgelesen, daher:

$$x + y = a$$
$$x - y = b$$
$$\text{hieraus:} \quad x = \frac{a + b}{2}$$

d. h. man nimmt von der Summe beider Ablesungen die Hälfte.

Die Neigung einer Ebene gegen den Horizont (die Abdachung oder Böschung eines Berges z. B.) wird eben so bestimmt, nur mufs man in der fraglichen Ebene natürlich erst eine Horizontallinie mit Hilfe der Setzwage bestimmen, auf dieser dann eine Senkrechte annehmen, und auf diese die Setzwage stellen.

208.



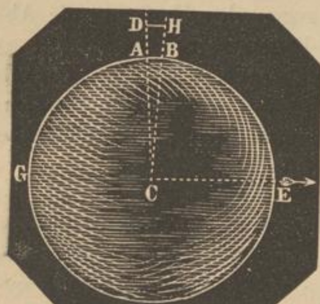
Niveau (Libelle, Wasserwage) ist eine genaue cylindrische Röhre von Glas, die jedoch an einer Stelle, *aob* (Mitte), von innen genau ausgeschliffen sein mufs, so dafs die Bögen *oa*, *ob* der Aushöhlung vollkommen gleich, auch beide vom Mittelpunkt *o* aus durch Teilstriche gleichmäfsig geteilt sind. Diese Röhre ist bis auf den kleinen Raum der Aushöhlung *a o b* mit Weingeist gefüllt und hermetisch verschlossen. Zum Schutz der Röhre, und damit man sie besser handhaben kann, ist sie mit einem Gehäuse von Messing so umgeben, daſs etwas mehr als die innere Aushöhlung *aob* sichtbar bleibt. Die untere Platte des Gehäuses ist mit der Achse der Röhre parallel, oder doch durch eine Stellschraube leicht in solche Lage zu bringen. Dieses kleine Instrument (Niveau, sprich: Niwöh) ist weit bequemer und besser, als die Setzwage, wenn es bloſs darauf ankommt, zu untersuchen, ob Linien, oder Ebenen horizontal sind.

Es ist nämlich leicht einzusehen, daſs, wenn das Niveau auf einer horizontalen Linie steht, der kleine leer gebliebene und nur mit Luft erfüllte Raum, die sogenannte Luftblase — weil stets die höchste Stelle einnehmend — sich so stellen wird, daſs sowohl vor, als nach der nötigen Umwendung, beide Enden der Blase um gleich viel Striche vom Nullpunkt abstehen.

Das Niveau möge übrigens richtig (justiert) sein oder nicht, es wird gerade so damit beobachtet, wie mit der Setzwage.

209.

Für die meisten Zwecke der praktischen Geometrie ist es erlaubt, die Erde als eine vollkommene Kugel*) anzunehmen,



und daſs die an irgend einem Orte, A, durch das Lot bestimmte Vertikallinie DA verlängert durch den Mittelpunkt C geht, weil die eine Hälfte der Erde das Lot eben so stark anzieht, als die andere Hälfte. Jeder andere Ort, B, E.., hat also eine andere Vertikallinie. Vertikallinien sind also nicht parallel. Für sehr nahe gelegene Örter jedoch kann man, wie folgende Betrachtung zeigt, Stücke von ihren Vertikallinien in vielen Fällen der Praxis unbedenklich als parallel annehmen. — Sind z. B. DA, HB die Vertikallinien für zwei nur um eine

*) Streng genommen ist, selbst nachdem man von den Erhöhungen und Vertiefungen (Berg und Thal), als gegen die Gröſse der Erde verschwindend, abstrahiert hat, die Erde dennoch keine Kugel, sondern ein Ellipsoid.

halbe Meile von einander entfernte Örter, A, B, und ABEG ein gröſster Kreis, dessen Umfang = 5400 geogr. Meilen, so wäre der Winkel ACB, welchen die, erst in der groſsen Entfernung von 859,44 Meilen, zusammenstoſsenden Vertikalen DA, HB mit einander machen, nur 2 Minuten, also am Scheitel C nicht mehr wahrnehmbar, und deshalb auch die in zwei nahen Punkten A, D errichteten Perpendikel (Horizontalen) AB und DH für unsere Sinne gleich lang, also auch DA parallel mit HB.

Aus denselben Gründen ist nun ferner auch die Länge des Bogens AB = der Geraden AB, mithin der Bogen selbst als gerade Linie zu betrachten. In vielen Fällen (z. B. in der Schiffahrts- und Feldmeſskunst) kann man sogar Bögen von 3 bis 5 Meilen Länge und darüber, als gerade Linien, mithin auch Flächen von 3 bis 5 Meilen Ausdehnung unbedenklich als eben annehmen.

Was von der Oberfläche der Erde als fester Körper gilt, muſs offenbar auch von der Oberfläche eines ruhigen flüssigen Körpers darauf gelten, die also in groſser Ausdehnung genommen, wie die Erde, krumm ist, in kleiner Ausdehnung aber als eben betrachtet werden kann, z. B. die Oberfläche eines kleinen ruhigen Seees.

210.

Nivellieren. Die Oberfläche einer ruhigen Flüssigkeit nennt man Niveau, und man sagt von zwei oder mehreren Punkten auf der Erde, sie seien in einerlei Niveau, wenn sie so liegen, daſs die (erweitert gedachte) Oberfläche einer ruhigen Flüssigkeit, welche durch den einen Punkt geht, auch durch die übrigen Punkte geht. Sämtliche Punkte sind dann, die Erde als Kugel betrachtet, gleichweit vom Mittelpunkt entfernt und liegen also in einer krummen Fläche, die man aber, wenn die Punkte nur einige hundert Schritte oder bis zu einer Meile von einander entfernt sind, als eine ebene horizontale Fläche annehmen kann, weil dann alle durch diese Punkte gedachten Vertikallinien als unter sich parallel betrachtet werden können.

Das Verfahren, Punkte auf der Oberfläche der Erde zu bestimmen, welche in einerlei Niveau liegen, oder auch den Unterschied ihres Niveaus zu finden, d. h. um wie viel der eine höher oder tiefer liegt, als der andere, nennt man nivellieren. Nivellements (sprich: Niwellemangs) sind sehr häufig erforderlich, z. B. bei Anlegung von Kunststrafsen, Eisenbahnen, Deichen, Wasserbauten, Wasserleitungen, Kanälen etc. Das hierzu nötige Instrument, so wie das Verfahren selbst, werden die folgenden Paragraphen erläutern.

211.

Nivellier-Instrumente giebt es sehr verschiedene. Die bessern bestehen aus einem, auf einem dreibeinigen Stativ ruhenden Fernrohr, welches sich um eine vertikale Achse ganz herum drehen und mittelst eines daran befindlichen Niveaus sich so stellen läfst, dafs die Achse des Fernrohrs (Visierlinie, Kollimationslinie) genau horizontal ist (siehe folgende Figur). In der Bildebene des Fernrohrs, nämlich die Stelle nahe am Okularglase, wo das Bild von einem gesehenen Gegenstand entsteht, ist ein feiner Faden (Visierfaden) horizontal und senkrecht gegen die Visierlinie ausgespannt, oder statt eines Fadens auch wohl zwei Fäden (Fadenkreuz), von welchen der eine horizontal, der andere vertikal ist*). Zu einem solchen Nivellier-Instrument gehören nun noch zwei Zielstangen, welche in Meter und Centimeter eingeteilt sind, und an welchen sich, mittelst einer Schnur, eine kleine Visiertafel mit einem scharf markierten Zielpunkt auf und nieder schieben läfst.

212.

Nivellieren aus der Mitte. Um den Höhenunterschied zweier Punkte auf der Erde, 0 und 1, zu finden, stellt der Beobachter sein Nivellierinstrument zwischen den beiden Punkten 0 und 1 in der Mitte A auf (siehe folgende Figur); seine beiden Gehilfen in 0 und 1 halten jeder ihre Nivellierstange mit Hilfe des Senkbleis in vertikaler Lage. Der Beobachter stellt nun mit Hilfe des (der) Niveaus die Achse des Fernrohrs horizontal, richtet es auf die in 0 errichtete Nivellierstange, winkt dem Gehilfen, die Visiertafel zu heben oder zu senken, bis der markierte Zielpunkt in der horizontalen Visierlinie, und folglich an dem horizontalen Visierfaden erscheint, alsdann wird die Zielhöhe $0h$ abgelesen. Es sei z. B. $0h = 84{,}7$ cm. Hier-

*) Die wirkliche Ansicht und Handhabung des Instruments wird dem Praktiker das übrige lehren.

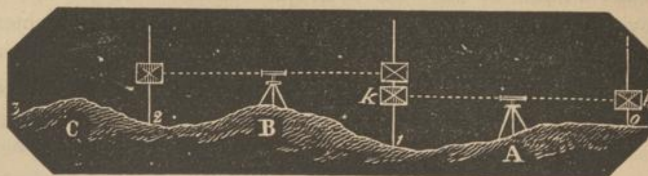
auf wird nun, indem man das Fernrohr um seine vertikale Achse dreht, eben so nach der vom zweiten Gehilfen in 1 errichteten Nivellierstange visiert. Es sei die hier abgelesene Zielhöhe $1\,k = 214{,}3$ cm, alsdann ist der Höhenunterschied beider Punkte $= 1\,k - 0\,h = 214{,}3 - 84{,}7 = 129{,}6$ cm, um soviel liegt nämlich der Punkt 1 unter dem durch 0 gedachten Horizont, oder der Ort (1) hat 129,6 cm Fall (Gefäll) in Bezug auf den Ort (0), oder letzterer Ort (0) hat in Bezug auf erstern 129,6 cm Steigung.

213.

Ist das Nivellierinstrument in gleicher Entfernung von den beiden Örtern 0 und 1 aufgestellt, und wäre dann auch die Visierlinie, wegen eines Fehlers des Instruments, nicht genau horizontal, und träfe sie den Zielpunkt in 0 z. B. um 11 mm zu hoch, so würde, wegen der gleichen Entfernung beider Örter vom Instrument, derselbe Fehler auch auf der andern Seite stattfinden, nämlich die Zielhöhe in 1 auch um 11 mm zu hoch ausfallen. Durch Subtraktion beider Zielhöhen wird aber dieser Fehler des Instruments eliminiert, also unschädlich. Dies ist der Grund, weshalb man das Instrument in gleicher Entfernung von den beiden nivellierten Örtern aufstellt, auch werden hierdurch zugleich noch die Fehler eliminiert, welche bei sehr großen Entfernungen die Refraktion und Krümmung der Erde verursachen könnten. Es genügt indessen, diese gleiche Entfernung des Standpunkts nur näherungsweise durch bloßes Abschreiten zu bestimmen. Eben so wenig ist es nötig, daß der Standpunkt des Instruments mit den beiden nivellierten Örtern in einerlei Richtung liegt, verschiedene Umstände können nötigen, ihn bedeutend zur Seite annehmen zu müssen. Um jedoch auch noch kleine Beobachtungsfehler möglichst unschädlich zu machen, muß man aus demselben Standpunkte noch einmal nivellieren, indem man zuvor das Instrument, durch näheres Zusammenrücken oder weiteres Ausspreizen der drei Beine, höher oder tiefer stellt, und dann von beiden gefundenen Höhenunterschieden, die jedoch bei kurzen Distanzen nicht über 2 bis 3 cm differieren dürfen, das Mittel nehmen.

214.

Liegen die beiden Örter 0 und 3, deren Höhenunterschied bestimmt werden soll, sehr weit aus einander, so werden Zwischenstationen notwendig. Der Beobachter schreitet dann



eine passende, sonst beliebige Länge (100, 200, 300 Schritte etc.)*) von 0 nach A, und eben so weit von A nach 1, dann eine passende Länge von 1 nach B, und eben so weit von B nach 2 ab etc.**) und beobachtet zugleich auf die vorhin gezeigte Weise vom Standpunkt A aus den Höhenunterschied der Punkte 0 und 1; von B aus den Höhenunterschied der Punkte 1 und 2 u. s. w. bis zu Ende, indem er die beobachteten Zielhöhen etwa folgendermaſsen aufzeichnet:

Standpunkt zwischen	Entfernung der Zielpunkte in Schritten.	Zielhöhen rückwärts.	Zielhöhen vorwärts.	Fall.	Steigung.	Bemerkungen.
0 und 1	350	84,7 cm	276,3 cm	191,6 cm		
1 „ 2	400	205,6 „	147,6 „	....	58,0 cm	
2 „ 3	300	185,2 „	180,5 „	....	4,7 „	
	1050	475,5 cm	604,4 cm	191,6 cm	62,7 cm	

Aus dieser Tabelle folgt, daſs in Bezug auf den Ort 0, der Ort 1 um 191,6 cm tiefer liegt; der Ort 2 aber, weil er

*) Wie weit man die Distanzen nehmen soll, hängt von der Terrainbeschaffenheit, von der Länge der Nivellierstangen, dann auch von der Tragkraft des Fernrohrs ab, indem, wenn möglich, der Beobachter durch Hilfe des Fernrohrs die Zielhöhen selber abliest.

**) Die Örter 0, 1, 2 ... pflegt man zuweilen mit numerierten, in die Erde getriebenen Pfählen zu bezeichnen, besonders dann, wenn behufs Anlegung eines Deiches, einer Eisenbahn etc. die nivellierte Strecke planiert, d. h. alle Örter durch nötige Erhöhungen und Abgrabungen in gleiche Höhe (Niveau) kommen sollen.

wieder 58,0 cm höher als der Ort 1 liegt, nur um 133,6 cm tiefer als 0, und weil 3 wieder 4,7 cm höher als 2 liegt, dieser Ort 3 in Bezug auf 0 ein Gefäll von 128,9 cm hat. Hieraus ergiebt sich nun leicht die allgemeine Regel, daſs, um den Höhenunterschied des Anfangs- und Endpunkts (oder auch irgend zweier Punkte des ganzen Zuges zu finden, man nur die Summe aller Gefälle bis zum Endpunkt, sowie auch die Summe aller Steigungen zu suchen braucht, dann die kleinere Summe von der gröſsern abzieht, und dem Rest die Benennung der gröſsern Summe giebt. So ist z. B. der Höhenunterschied zwischen 0 und 3 = 191,6 — 62,7 = 128,9 cm Fall; der zwischen 1 und 3 = 62,7 — 0 = 62,7 cm Steigung etc. Zur Kontrole der Rechnung kann man die Summe aller Zielhöhen vorwärts und rückwärts zwischen irgend zwei Punkten von einander subtrahieren, was dasselbe Resultat geben muſs. Zur gröſsern Sicherheit muſs man dieselbe Strecke noch einmal vom Endpunkt nach dem Anfangspunkt wieder zurück nivellieren. Ob übrigens der ganze Zug der nivellierten Punkte in einerlei Richtung liegt, oder sich beliebig schlängelt, das ist gleichgültig.

215.

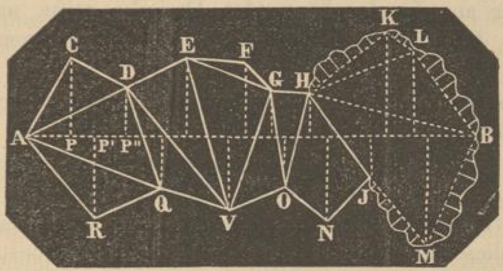
Nivellieren aus den Endpunkten. Kann man wegen eines zwischenliegenden Hindernisses (eines Flusses z. B.) das Instrument weder in der Mitte, noch zur Seite zweier Punkte, 0 und 1, aufstellen, so muſs man, um einen etwaigen Fehler des Instruments zu eliminieren, zeitraubende und dennoch miſsliche Reduktionen wegen Refraktion und Krümmung der Erde zu vermeiden, aus beiden Endpunkten 0 und 1 nivellieren. Man stellt dann das Instrument zuerst in dem einen Punkt (0) auf, visiert nach dem andern (1), liest die Zielhöhe ab, z. B. 212,9 cm, miſst zugleich auch die Höhe des Instruments, z. B. 139,0 cm, so hat man das Gefäll von (1), = 73,9 cm. Der Vorsicht halber stelle man jetzt das Instrument höher oder tiefer und visiere noch einmal nach (1), um zu sehen, ob auch dasselbe Resultat 73,9 cm kommt. Hierauf wird nun das Instrument nach dem andern Ort (1) gebracht, und von hier aus ebenso zweimal nach (0) visiert, jetzt aber die Zielhöhe von der Instrumentshöhe subtrahiert, wo man dann dasselbe Resultat wie vorhin erhalten, oder wenn beide nur wenig differieren, das Mittel nehmen muſs.

216.

Erklärung. Unter Karte (Plan) von einem Lande versteht man eine kleinere Figur (Zeichnung), in welcher alle Punkte dieselbe Lage gegen einander haben, oder doch andeuten, wie die, wovon sie Bilder sein sollen. Solche Karten werden nach dem Zwecke, dem sie entsprechen sollen, und wonach sich ihre technische Anfertigung richtet, verschieden benannt. So giebt es z. B. petrographische oder geologische Karten, welche die Gebirgsarten eines Landes, ihre Auflagerungen etc. kennen lehren. Ihre Entwerfung setzt geognostische Kenntnisse, sowie die übliche Zeichensprache voraus. Hierüber giebt es eigene Werke, so wie auch über die sogenannte Markscheidekunst, welche zur Leitung des Bergbaues unter der Erde messen und nivellieren lehrt. Militärkarten (Generalstabskarten, Situationspläne) sollen von einer Gegend (Terrain) eine deutliche Vorstellung geben, namentlich alle Berge, deren Höhe, Abhänge, Schluchten, den Lauf der Flüsse, Hecken, Hindernisse, (Coupierungen) und andere wichtige Punkte darstellen. Diese Karten sind für die Kriegsführung wichtig, um danach die günstigen Positionen eines Heeres und die zu machenden Operationen etc. im voraus bestimmen zu können. Über die technische Anfertigung solcher Karten handeln besondere Werke. Geographische Karten (Land- und See-Karten) stellen ganze Reiche und selbst die ganze Oberfläche der Erde dar, namentlich die Lage und Grenzen der Länder und Provinzen, der Meere, den Lauf der Flüsse etc. Unter diesen Karten giebt es sehr wenige, welche den Anforderungen der Mathematik nur einigermaſsen entsprächen, indem viele Länder, z. B. Afrika, noch gar nicht aufgeschlossen, viel weniger vermessen sind, was erst mit der Zeit und nur nach und nach geschehen kann. Ökonomische Karten (Kameral- oder Kataster-Karten). Solche Karten läſst der Staat zur Bestimmung eines Katasters (Steuerbuch, Ackerverzeichnis) anfertigen, um nach der Gröſse der Ländereien und ihres Ertrags die Steuern zu regulieren.

Bevor nun aber eine geographische oder ökonomische Karte von einer Gegend entworfen werden kann, muſs dieselbe erst aufgenommen (vermessen) werden, und dieser Aufnahme muſs dann, wenn die Gegend von groſser Ausdehnung ist, immer erst eine sogenannte Triangulation vorausgehen, d. h. das ganze Land wird erst, um feste Anhaltspunkte zu erhalten, mit einem Netz von Dreiecken überspannt, und die Lage ihrer Eckpunkte durch scharfe Winkelmessungen, trigonometrische Rechnungen und Wahrscheinlichkeitsrechnung genau bestimmt. Ist aber die aufzunehmende Gegend nur von geringer Ausdehnung, etwa von einem Punkt aus übersehbar, und nur eine ökonomische Karte davon zu entwerfen, so ist eine vorhergehende Triangulation nicht notwendig. Die Aufnahme kann dann gleich mittelst des Meſstisches und der Meſskette geschehen. Ist die Gegend zugleich auch noch ziemlich eben, so wird eine solche sehr oft bloſs mit Hilfe der Meſskette und des Winkelkreuzes (Winkelspiegels) aufgenommen, wobei man folgendermaſsen verfährt.

217.

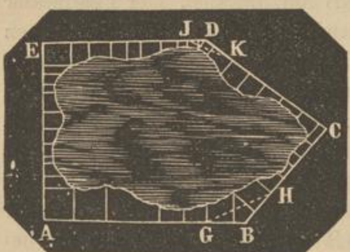


Es sei das Stück Land AB aufzumessen. Der Feldmesser umgeht zuerst dasselbe und entwirft davon in seinem Tagebuch nach dem Augenmaſs ein nur halbweg ähnliches Bild. Kann man nun in der aufzumessenden Figur eine Linie, AB, auffinden, von welcher die Eckpunkte C, D, E . . . nicht zu weit entfernt sind, so ist es oftmals (namentlich bei langen schmalen Figuren) vorteilhaft, die Lage der Eckpunkte durch Abscissen und Ordinaten zu bestimmen. Während nämlich die Kettenzieher die Kette in der Richtung AB fortziehen, muſs der sie begleitende Feldmesser die Länge der Abscissen AP, AP′ . . . von der Kette ablesen und zugleich mit einem Dreimeterstock, den er rechtwinklig an die Kette anlegt, die Ordinaten PC, P″D . . . messen (oder durch einen dritten Gehilfen messen lassen) und die Längen der Abscissen und zugehörigen Ordinaten in seinem Tagebuche bemerken. Sind die Perpendikel (Ordinaten) CP, DP″ . . . über 20 m lang, so ist es sicherer, sie mit Hilfe des Winkelkreuzes (oder eines Winkelspiegels) zu konstruieren, sonst aber nimmt man den rechten Winkel nur nach Augenmaſs. Hat die aufzumessende Figur krummlinige Grenzen, so muſs man so viele Ordinaten messen, daſs man die zwischen je zwei Ordinaten liegenden Bögen praktisch als gerade Linien betrachten kann. Werden die Ordinaten zu lang und deren zu viele, so muſs man mehrere neue Abscissenlinien, HK, KL . . . zu Hilfe nehmen.

Obgleich das Messen sehr vieler Koordinaten zeitraubend und höchst langweilig ist, so ist dieses doch bei Aufnahme krummer Wege, Gräben, Flüsse und Grenzen durchaus notwendig.

Läſst sich eine aufzunehmende Figur durch Diagonalen in lauter Dreiecke zerlegen, die nicht gar zu spitze Winkel haben, so kann man auch dies thun, indem man dann alle Seiten der an einander hängenden Dreiecke miſst, und ihre Länge in dem von der Figur nur flüchtig entworfenen Bilde notiert.

Auch kann und muſs man sehr oft eine Figur durch eine andere Hilfs-Figur aufnehmen, die man in oder um erstere konstruiert, und deren Seiten man dann als Abscissenlinien annimmt. Ist die Hilfs-Figur ein Viereck, Fünfeck etc., so ist es vorteilhaft, wenn sie möglichst viel rechte Winkel hat, weil sich diese am leichtesten mit dem Winkelkreuz konstruieren lassen. Eine Hilfs-Figur muſs namentlich konstruiert werden, um eine andere aufzunehmen, deren Inneres unzugänglich ist, z. B. ein Morast, Teich, Wald etc. Es ist wohl einleuchtend, daſs man unter Umständen auch alle drei Methoden mit einander verbinden kann.



Nachdem nun die Aufnahme auf die eine oder andere Weise geschehen, ist es sehr leicht, ein genaueres Bild oder Karte davon zu entwerfen. Man braucht nämlich nur die Längen sämtlicher gemessenen und notierten Koordinaten und Dreiecksseiten nach einem verjüngten Maſsstabe aufzutragen, und die Endpunkte der Ordinaten durch einen freien Handzug zu verbinden.

Bei der Entwerfung der im letzten Beispiele angenommenen fünfseitigen Hilfs-Figur wird man bemerken, daſs, nachdem die drei rechtwinklig an einander stoſsenden Seiten, AB, AE, ED, nach dem verjüngten Maſsstab genau aufgetragen worden, und man nun mit den, vom verjüngten Maſsstab abgemessenen Längen der beiden andern Seiten, BC, DC, zwei Bögen beschreibt, der Durchschnittspunkt derselben vollkommen bestimmt ist, und in der Karte die Lage des Punktes C darstellt, es mithin nicht nötig ist, die beiden Winkel B und D auf dem Felde noch zu messen, was sonst durch die Aufmessung der beiden Dreiecke GBH und JDK geschehen könnte.

Nach demselben Maſsstab, nach welchem eine Karte gezeichnet worden, kann man nun auch den Abstand je zweier Punkte, welcher auf dem Felde gar nicht gemessen worden, unmittelbar auf der Karte messen; und die wirkliche Nachmessung auf dem Felde könnte entscheiden, ob die Karte richtig ist.

Was die Bestimmung des Flächeninhalts einer aufgemessenen Figur betrifft, zu welchem Zweck eine ökonomische Aufnahme hauptsächlich gemacht wird, so ist es am besten, diesen aus den Zahlen der unmittelbar gemessenen Koordinaten und Dreiecksseiten zu berechnen, und die Trapeze, welche je zwei Ordinaten mit dem zwischen ihnen liegenden Stück der Abscissenlinie bilden, nach § 103, die Dreiecke aber nach § 197 zu berechnen, und alles zu addieren. Sind aber die Zahlen der unmittelbar gemessenen Linien nicht vorhanden, so muſs man freilich den Inhalt nach der Karte bestimmen, indem man diese in schickliche Dreiecke und Trapeze etc. zerlegt, Grundlinien und Höhen nach dem der Karte zu Grunde liegenden verjüngten Maſsstab miſst, und die Dreiecke und Trapeze berechnet. Genauere Resultate giebt in diesem Falle aber die § 204 erklärte Methode.

Unter den verschiedenen künstlichen, für Katasterbureaux wichtigen Instrumenten, mittelst deren man den Inhalt einer Karte näherungsweise, aber sehr schnell, ohne alle Rechnung und Messung bestimmen kann, verdient erwähnt zu werden: der von *Ernst* in Paris nach den Ideeen des Berner Ingenieurs *Oppikofer* konstruierte Flächenmesser. Dieses äuſserst sinnreiche, etwa 210 M. kostende Instrument braucht nur längs des Umfangs um die Figur herumgeführt zu werden, und kann man dann aus der Stellung der Zeiger den Inhalt unmittelbar ablesen. Es findet sich beschrieben und abgebildet in dem *Bulletin de la société d'encouragement* 1841, p. 402. In demselben *Bulletin* 1850, p. 100 befindet sich noch ein neuerer von *Beuvière* erfundener Flächenmesser beschrieben und abgebildet. Ein noch neuerer von *Wetli* erfundener und von *Stampfer* in Dinglers polyt. Journal 1850, Heft 6, beschriebener Flächenmesser soll nach *Stampfers* Urteil der beste von allen sein. Preis etwa 340 M. Wie uns scheint, gründet sich die Konstruktion dieser Instrumente auf der § 204 aufgestellten Formel. In einer kleinen Broschüre von *J. Amsler* 1856 wird noch ein neuerer Flächenmesser beschrieben, welcher viel einfacher und billiger sein soll. Ferner sind noch die von *Hansen* und *Bauernfeind* erfundenen Flächenmesser zu erwähnen.

Die Gröfse des verjüngten Mafsstabes, nach welcher eine Karte aufgetragen wird, richtet sich nach der Gröfse der aufgemessenen Figur. Wäre z. B. die gröfste Ausdehnung derselben 4000 m (etwa eine halbe Meile) und soll die Karte davon auf ein Blatt Papier kommen, dessen gröfste Ausdehnung $\frac{1}{2}$ m ist, so ist klar, dafs auf der Karte (deren Mafsstab Achttausendstel des wirklichen ist) 80 m auf 1 cm kommen, kleinere Längen von 1 bis 2 m nicht mehr deutlich dargestellt werden können, und man den Inhalt darnach nur näherungsweise bestimmen kann. Karten, welchen noch viel kleinere Mafsstäbe zu Grunde liegen, dienen nur dazu, eine Vorstellung von der Form des Landes, von der Lage der Hauptörter, dem Laufe der Flüsse etc. zu geben. Dies gilt namentlich von den Karten, welche auf einem Bogen Papier ganze Weltteile darstellen. Auf solchen finden nur die bedeutendsten Örter, Flüsse etc. Platz, indem hier selbst Meilen grofse Ausdehnungen in Punkte verschwinden.

Pierer'sche Hofbuchdruckerei. Stephan Geibel & Co. in Altenburg.

Inhalt.