# Jak. Frid. Malers weil. Hochfürstl. Markgräfl. Bad. Kirchenraths und Rectors des Gymnasii Jllustris Algebra zum Gebrauch hoher und niederer Schulen

Maler, Jakob Friedrich

Carlsruhe, 1821

Anhang

urn:nbn:de:bsz:31-266447

# Anhang.

## Etwas
## vom Combinations-Calcul.

§. 1.

Wenn mehrere einzelne Dinge neben einander gestellt werden, so kann man ihre Ordnung auf mancherley Art verändern. Z. B. a, b, c, stehen in einer andern Ordnung als a, c, b, oder b, c, a. Diese Dinge sind untereinander

1. entweder alle einerley, z. B. aaa oder bbbb;
2. oder alle verschieden, z. B. abcdm;
3. oder theils einerley, theils verschieden, z. B. aabbbcc oder aabbccdd.

Die Methode, alle möglichen Veränderungen dieser Ordnungen zu finden, heißt Combinations-Calcul im weitläuftigsten, allgemeinsten Verstand.

§. 2.

Alle möglichen Fälle dieser Art können hier, der Absicht gemäß, unmöglich entwickelt werden. Aber einige der wichtigsten und fruchtbarsten dürften doch einen Platz verdienen, um Anfänger auf eine Anwendung der Algebra aufmerksam zu machen, die so oft in der Mathematik, Physik, im gemeinen Leben, beym Binomium, Berechnung möglicher Fälle, Wahrscheinlichkeiten im Spiel, Beurtheilung des gefährlichen Lotto di Genua, Leben und Tod, Leibrenten, Wittwen-Kassen rc. statt findet. Jakob Bernoulli, Euler, Kästner, Fontana, Moivre, C. Chassot de Florencourt, Tetens, Biequilley, Michelsen, Lichtenberg, Hindenburg, Eschenbach, Fischer, Töpfer, Rothe, die Commentarien der K. Gött. Gesellschaft der Wissenschaften rc. führen jeden ferner Wißbegierigen so weit, als man bisher nur kommen konnte. Eine ausführliche Angabe verschiedener trefflicher Schriften über diesen Gegenstand findet sich in Kästner's Anfangsgründen der Analysis endlicher Größen neueste Ausg. 1794. S. 520 — 538.

§. 3.

Sind die Dinge aaa, oder bbbb, so findet keine Veränderung der Ordnung statt, wenn man nicht jedem einzelnen Dinge, wie bey den Zahlzeichen, einen besondern von seiner Stelle abhangenden Werth beylegt; und dann sind's nicht mehr einerley Dinge.

§. 4.

Sieht man bloß auf die mögliche Anzahl der Veränderungen des Orts der einzelnen verschiedenen Dinge, so nennt man es Versetzungen.

§. 5.

Will man wissen, wie oft bey einer bestimmten Anzahl Dinge, je 2 und 2; 3 und 3; 4 und 4 ꝛc. zusammen gestellt werden können, so sind's Combinationen im strengen Verstande.

§. 6.

Endlich verlangt man unter andern bisweilen alle mögliche Combinationen und Versetzungen, bisweilen Combinationen, Versetzungen und Verdoppelungen mehrerer Dinge zugleich.

§. 7.

Nun seye die Zahl der einzelnen verschiedenen Dinge = n, die Dinge selbst a, b, c, d, e, m, r ꝛc. so ist die mögliche Zahl ihrer Versetzungen, wenn

n = I. bey a . . . . . . . . . . . . . = o

n = II. . . ab . . . . . . . . . . . . . = ab, ba
das ist 1 × 2 = 2 = n − 1 . n

n = III. . . abc . . . . . . . . . . . . = abc, cab, acb, bac, cba, bca
das ist 1. 2. 3 = 6 oder
n − 2 . n − 1 . n

n = IV bey abcd . . . . . . . . . . = abcd, dabc, adbc, abdc 2c.
das ist 1 . 2 . 3 . 4 = 24 oder
n — 3 . n — 2 . n — 1 . n

n = V. . . abcde . . . . . . . . . . = abcde, eabcd, aebcd, abecd, abced 2c.
das ist 1 . 2 . 3 . 4 . 5 = 120
oder
n — 4 . n — 3 . n — 2 . n — 1 . n

n = VI. . . abcdem . . . . . . . . . = abcdem, mabcde, ambcde, abmcde, abcmde, abcdme 2c.
das ist
1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 = 720
oder
n — 5 . n — 4 . n — 3 . n — 2 . n — 1 . n

n = VII. . . abcdemr . . . . . . . . = abcdemr, rabcdem, arbcdem, abrcdem, abcrdem, abcdrem, abcdermr2c.
das ist
1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 = 5040
oder
n—6 . n—5 . n—4 . n—3 . n—2 . n—1 . n

n = VIII. . . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . . . = 40320
oder n — 7 . n — 6 . n — 5 . . . n
n = IX. . . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 . . = 362880
oder n — 8 . n — 7 . n — 6 . . . n
n = X. . . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 . 10 . = 3628800
oder n — 9 . n — 8 . n — 7 . . . n

Hieraus erhellt, daß
im Isten Fall gar keine Veränderung möglich ist;
IIten . . zwey, nämlich 1 . 2;
IIIten . . 6 Veränderungen Statt finden: denn das 3te Ding c kann bey jeder der beyden unmittelbar vorhergehenden Versetzungen ab und ba vornen, hin-

ten, oder in der Mitte stehen. Folglich sind sie 1 . 2 . 3 = 6.

IVten Fall es 24 Versetzungen gebe; denn das 4te Ding d kann bey jeder der in III. vorkommenden 6 Versetzungen vornen, hinten, nach dem 1sten, oder nach dem 2ten stehen. Folglich sind's 1 . 2 . 3 . 4 = 24.

Vten -- man 120 Versetzungen erhalte; denn das 5te Ding steht in jeder der in IV. vorgekommenen 24 Versetzungen vornen, hinten, oder nach dem 1sten, 2ten, 3ten. Also wären's 1 . 2 . 3 . 4 . 5 = 120.

Wenn man nun die immer um 1 vermehrte Zahl der Dinge in eine Reihe

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9 ꝛc. und |
| 0. | 2. | 6. | 24. | 120. | 720. | 5040. | 40320 ꝛc | |

als die möglichen Versetzungen darunter schreibt; so zeigt sich, daß diese entstehen, wenn man, so bald nur zwey gefunden sind, die letzte mit dem folgenden Gliede der ersten Reihe multiplicirt. So gibt z. B. 2 × 3 = 6 und 6 × 4 = 24 ꝛc. Daher können n Dinge . . . . . . . n — 3 . n — 2 . n — 1 . n mal versetzt werden.

Wer z. B. 9 Personen so oft speisen wollte, als sie ihre Plätze verwechseln können, der müßte sie 362880 mal zu Gaste haben, und würde, wenn er sie auch täglich Mittags und Abends bewirthete, 495 Jahre 270 Tage zu seiner Freygebigkeit nöthig haben, wenn auch jedes Jahr 366 Tage hätte.

Das Alphabet hat 24 Buchstaben, diese können also 1. 2. 3 . . .
tr. b. m.
24mal versetzt werden, das ist 620,448,401,733,239,439,360,000mal. Jeder Buchstabe soll eine Quadratlinie einnehmen, so giengen 144 auf einen Quadrat-Zoll, 144 × 144 = 20736 auf einen Quadrat-Fuß, 36 mal so viel, oder 746496 Buchstaben auf eine Quadrat-Toise. Es seye die Französische Längen-Meile = 2000 Toisen, so enthält die Quadrat-Meile 4000000

Quadrat-Toisen, und auf ihr hätten 746496 × 4000000 =
b. m.
2,985,984,000,000 Buchstaben Platz. Man setze ferner die Oberfläche unserer Erde beynahe 34,000,000 der obigen Quadrat-Meilen, so würde die ganze Erdfläche nur
tr. b. m.
101,523,456,000,000,000,000 Buchstaben fassen. Folglich ist die Zahl der möglichen Versetzungen der 24 Buchstaben über 6018 mal größer, als die Zahl aller Buchstaben, welche auf der ganzen Erdfläche stehen könnten. Und da noch über dieß jede Versetzung aus 24 Buchstaben besteht, so würde ein mehr als 144432mal so großer Raum für sie erfordert werden.

Gesetzt nun, Ein Schreiber schriebe täglich 40 Seiten und auf jede 40 Versetzungen, also in einem Tage 1600; so würde er in Einem Jahre, dem wir 366 Tage geben wollen, 585600 Versetzungen, und in 1000 Millionen Jahren
b. m.
585,600,000,000,000 liefern. Tausend Millionen Schreiber lieferten
tr. b. m.
daher in der nämlichen Zeit nur 585,600,000,000,000,000,000,000, und würden, da sich die oben gefundene Zahl der Versetzungen über 620448 Trilionen beläuft, nicht einmal in 1000 Millionen Jahren damit fertig werden.

Hierinnen liegt ein auffallender Beweis für folgende Sätze:

1) Man darf sich weder über die Mannigfaltigkeit der Sprachen, noch die Menge der aus den 24 Zeichen des Alphabets zusammengesetzten Worte, Begriffe, Sätze etc. verwundern.

2) In der Natur ist die Zahl der einzelnen verschiedenen Dinge ungeheuer mal größer als 24. Welch eine unendliche Mannigfaltigkeit muß daraus entspringen! Welch ein Schöpfer, der sie alle kennt, schuf, zweckmäßig ordnete, erhält!!!

3) Nur Thoren können auf den Gedanken fallen: Durch Auffuchen aller möglichen Versetzungen des Alphabets alle

möglichen Sprachen, und dadurch eine allgemeine zu erfinden.

§. 8.

Vielleicht sind noch einige Anwendungen der gefundenen Formel nicht unangenehm.

1) Im Schachspiel hat jeder der beyden Spieler 16, folglich beyde zusammen 32 Steine. Jeder Stein kann, an sich, alle 64 Fächer des Schachbretts durchlaufen. Wer daher alle mögliche Züge in diesem Spiele berechnen wollte, der müßte, nur vorläufig, alle möglichen Versetzungen von 64 finden, und diese mit 32 multipliciren. Da aber dieß eine ungeheure, über 1124 Quatourdecillionen steigende, das ist über 1124 von 84 Zahl-Stellen begleitete Zahl ausmacht, so wollen wir nur untersuchen, wie viel es Versetzungen gibt, wenn jeder Stein einen Schritt vorrückt, das ist die Versetzungen von 32; andere unzählige, aus der Natur dieses Spiels folgende Veränderungen nicht zu berühren. Ihrer wären schon
q. qtr. tr. b. m.
263,130,836,933,693,530,167,218,012,160,000,000 und doch noch unzählig weniger als alle möglichen. Man vergleiche damit die im §. 7. gefundene Versetzungen von 24; man schließe, welch eine fast unaussprechliche Menge von Menschen und Jahren erfodert würde, sie nur niederzuschreiben, geschweige die brauchbare von den unbrauchbaren abzusondern, und alle miteinander zu vergleichen! Dann wird sich jeder selbst die Frage beantworten: Was dachten diejenigen, welche im Ernst behaupteten: Der Kempelische Schachspieler wurde durch Berechnung aller möglichen Fälle und daraus hergeleiteten Mechanismus der Maschine verfertigt?

2) Eine gewöhnliche Menuette besteht aus zwey Theilen und eben so das dazu gehörige Trio. Jeder Theil hat gewöhnlich 8 Tackte. Wie oft können diese 8 Tackte, in

jedem Theil verändert werden? R. 40320mal. (§. 7. VIII.) Man sieht hieraus:

a) Die Möglichkeii der Verfertigung der bekannten musikalischen Tabelle, eine Menuette und Trio durch Würfel zu componiren.

b) Die mögliche Anwendung auf andere musikalische Piecen.

c) Man hört auf, sich über die unendliche Mannigfaltigkeit der musikalischen Compositionen zu verwundern.

d) Die unendlichen Veränderungen beym vortreflichen von Dünewaldischen Instrument, und eben so bey Orgeln von vielen Registern werden begreiflich.

3) Fünf Dinge lassen sich schon 120mal versetzen (§. 7. V.) Hieraus fließt die Möglichkeit eines telegraphischen Alphabets mit sehr wenigen primitiven Zeichen. Siehe Bergsträssers Synthematographik und Böckmanns Versuch über Telegraphik und Telegraphen. Carlsruhe 1794.

## §. 9.

Wären nach (§. 1. N. 3.) unter denen zu versetzenden Dingen einige doppelt, 3, 4fach vorhanden, so ändert sich diese Regel. Z. B. in aa gibts nur eine mögliche Stellung, folglich nur halb so viel als in ab. In aac sind nur 3 Versetzungen möglich: aac: caa: aca. Also wieder nur halb so viel als in abc. (§. 7. No. III.) Daher muß die dort gefundene Formel, wenn ein Ding doppelt vorkommt, mit 2; wenn's 3mal vorkommt, mit 6; wenn's 4mal da ist, mit 24 dividirt werden. Sie würde

bey aabc $= \frac{n-3\,.\,n-2\,.\,n-1\,.\,n}{1.\,2.} = 12$

„ aaabc $= \frac{n-4\,.\,n-3\,.\,n-2\,.\,n\,1\,.\,n}{1.\,2.\,3.} = 24$

„ aaaabc $= \frac{n-5\,.\,n-4\,.\,n-3\,.\,n-2\,.\,n-1\,.\,n}{1.\,2.\,3.\,4.} = 30$

Käme ein Ding 2, das andere 3 mal vor, z. B. aabbbc, so müßte die ganze Formel, für aa mit 2, für bbb mit 6 dividirt werden. Sie wäre $\frac{n-5 \,.\, n-4 \,.\, n-3 \,.\, n-2 \,.\, n-1 \,.\, n}{1 \,.\, 2.\, 1.\, 2.\, 3.}$

$= \frac{720}{12} = 60$ Versetzungen.

Und für aaaaabbbcc $= \frac{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.\ 9.\ 10.}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 1.\ 2.\ 3.\ 1.\ 2}$

$= \frac{3628800}{120.6.2}$ oder $\frac{3628800}{1440} = 2520$ Versetzungen. Oder auch abgekürzt, weil $\frac{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.\ 9.\ 10}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 1.\ 2.\ 3.\ 1.\ 2} = \frac{6.\ 7.\ 8.\ 9.\ 10}{1.\ 2.\ 3.\ 1.\ 2} =$ $\frac{3.\ 7.\ 4.\ 3.\ 10}{1.\ 1.\ 1.\ 1.\ 1} = 2520.$

§. 10.

Man soll die Combinationen mehrerer gegebenen Dinge im engern Verstand (§. 5.) finden.

### Auflösung.

Hier sieht man offenbar nicht auf die Stelle, welche jedes Ding einnimmt, sondern nur auf die möglichen Paare. Aus der hier stehenden Tabelle ist ersichtlich, wie viel Paare für 1, 2, 3 rc. Dinge an sich, also auch überhaupt, d. h. mit den vorhergehenden Paaren zusammen genommen, statt finden.

| Zahl der Dinge. | Die Dinge selbst. | Ihre möglichen Paare. | Zahl der Paare |
|---|---|---|---|
| 1. | a | 0 | = 0 |
| 2. | a und b. | ab | = 1 |
| 3. | a, b und c. | ac, bc. | = 2 |
| 4. | a, b, c und d. | ad, bd, cd. | = 3 |
| 5. | a, b, c, d und m. | am, bm, cm, dm. | = 4 |

1. Aus a entspringt kein Paar.

2. Aus a und b entsteht Ein Paar.

3. Aus a, b und c zwey Paare; nämlich a mit c und b mit c; folglich geben drey Dinge mit dem vorigen Paar zusammen 3 Paare.

4. Aus a, b, c und d ergeben sich drey Paare; nämlich a mit d, b mit d, c mit d; also geben 4 Dinge mit den drey vorigen 6 Paare.

5. Aus a, b, c, d und m entstehen 4 Paare, a mit m, b mit m, c mit m, d mit m; folglich mit den 6 vorhergehenden 10 Paare rc.

6. Daher bilden die Paare an sich von 1, 2, 3, 4, 5 rc. Dingen eine arithmetische Progression, in welcher $a = 0$; $d = 1$; $n =$ der Zahl der zu combinirenden Dinge.

7. Hieraus läßt sich, nach §. 184, immer u oder die Zahl der Paare von 2, 3, 4, 5, 6 rc. Dingen finden. Denn, nach der Formel $a + (n - 1) d = u$, ist, wenn's 5 Dinge wären: $u = 0 + 4 \times 1 = 4$, oder den Paaren, welche a mit b, c, d und m bildet.

8. Man kann also auch die Summe aller Paare dieser 5 Dinge nach §. 187. finden. Dort war die Formel $\frac{(a+u)n}{2} = S$. Hier ist nun $a = 0$; $u = 4$; $n = 5$; daher $\frac{(0 + 4)5}{2} = \frac{20}{2} = 10$, wie Nro. 5. Folglich allgemein $\frac{n(n - 1)}{2} =$ allen Combinationen von 2 und 2 Dingen. So waren im §. 118 die Summe, die Differenz, das Produkt und der Quotient zweyer Zahlen und ihrer Quadrate zusammen 8 Dinge. Es gab daselbst $6 + 22 = 28$ Combinationen; es ist aber auch $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$.

9. Diese Paare von 1, 2, 3 ꝛc. Dingen 1, 3, 6, 10, 15, 21 ꝛc. sind Trigonal-Zahlen (§. 254.)

10. Dergleichen paar-weis verbundene Dinge (oder Zahlen) heißen im berüchtigten Lotto di Genua Amben. Wie viel sind dergleichen bey 10 gewählten Nummern möglich? Auch hier ist: $a = 0$; $n = 10$; $d = 1$, folglich $u = 0 + 9 \times 1 = 9$; und $\frac{(0 + 9)\,10}{2} = 9 \times 5 =$ 45 Amben.

11. In 90 Nummern stecken also $\frac{89 \times 90}{2} = \frac{8010}{2} = 4005$ Amben; und in 5 Nummern, welche wirklich gezogen werden, $\frac{4 \times 5}{2} = 2 \times 5 = 10$ Amben. Wer also auf eine Ambe setzt, wettet, daß er unter 4005 Fällen 10 errathen werde, oder die Wahrscheinlichkeit seines Gewinnstes verhält sich zur Wahrscheinlichkeit seines Verlustes, wie 10 : 3995; das ist, wie 1 : 399,5 oder 1 : 399½. Er kann 399½ mal verliehren, ehe er einmal gewinnt.

§. 11.

Wenn man je drey und drey Dinge verbindet, so heißt diese Combination in der Lotto-Sprache Terne. Für sie eine Formel zu finden, bemerke man:

1. Eins oder auch zwey Dinge geben keine Terne.

2. Drey nur Eine. Z. B. a, b, c geben a b c = 1 Terne.

3. Vier Dinge, a, b, c, d geben: abc; abd; acd; bcd = 4 Ternen.

4. Fünf Dinge, a, b, c, d, m geben: abc; abd; abm; acd; acm; adm; bcd; bcm; cdm; bdm; also 10 Ternen.

5. Hieraus erhellt, auf eine ähnliche Art wie im §. 7., wenn man die Zahl der Dinge in eine Reihe und die dazu gehörige Combinationen darunter setzt:

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10.
0. 0. 1. 4. 10. 20. 35. 56. 84. 120.

daß jede untere, oder die verlangte Combination gefunden wird, wenn man die darüber stehende ins Produkt der beyden vorhergehenden multiplicirt, und mit 6 dividirt. Z. B. die Combination von 3 Dingen ist $\frac{1.\ 2.\ 3.}{6}$ $= 1$; von 7 $= \frac{5.\ 6.\ 7.}{6.} = 35$. Oder, nach §. 7., allgemein: $\frac{n-2\ .\ n-1\ .\ n}{1.\ 2.\ 3.}$.

6. Ternen sind also Trigonal-Pyramidal-Zahlen. (§. 280.)

7. Also sind in 12 Zahlen 220 Ternen möglich. Denn $\frac{10.\ 11.\ 12}{1.\ 2.\ 3} = \frac{5.\ 11.\ 4}{1.\ 1.\ 1} = 220.$

8. Da nun in 5 Nummern 10 Ternen liegen (Nro. 4.) in 90 hingegen $\frac{88.\ 89.\ 90}{1.\ 2.\ 3.} = 117480$ Ternen (Nro. 5.) von 90 Nummern aber nur 5 gezogen werden, so verhält sich beym Besetzen einer Terne Gewinnst zum Verlust, wie 10 : 117480, oder wie 1 : 11748. Und wenn man's auch trifft, so erhält man doch seinen Einsatz bey weitem nicht 11748 mal.

## §. 12.

Je 4 und 4 verbundene Dinge nennt das Lotto **Quaternen** Hier schließt man auf eine ähnliche Art, wie im §. 11.

1. Eins, zwey, auch drey einzelne Dinge geben keine Quaterne.

2. Viere geben Eine; a, b, c, d - geben abcd = 1 Quaterne.
3. Fünfe a, b, c, d, e geben - - - - - - - - = 5 Quaternen.
4. Sechse a, b, c, d, m, r geben - - - - - - = 15 Quaternen.

Also die Reihen 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10.
0. 0. 0. 1. 5. 15. 35. 70. 126. 210.

5. Man findet jede untere, wenn die obere in's Produkt der drey vor ihr hergehenden multiplicirt, und mit 24 = 1. 2. 3. 4 dividirt wird.

So wäre die 7te $= \frac{4.5.6.7.}{1.2.3.4.} = \frac{1.5.2.7.}{1.2.1.1.} = \frac{1.5.1.7}{1.1.1.1}$ $= 35$; und allgemein: $\frac{n-3.n-2.n-1.n}{1 \;.\; 2 \;.\; 3 \;.\; 4}$.

6. Man könnte sie daher schicklich Trigonal-Pyramidal-Zahlen vom zweyten Geschlecht nennen.

7. Also liegen in 12 Zahlen 495 Quaternen. Denn $\frac{9.\,10.\,11.\,12}{1.\;2.\;3.\;4} = \frac{3.\;5.\;11.\;3}{1.\;1.\;1.\;1} = 495.$

8. In 5 Nummern werden sich 5 (Nro. 3.), in 90 hingegen 1621190 (No. 5.) Quaternen befinden. Es verhält sich demnach, wenn man auf Quaternen setzt, Vortheil zum Verlust, wie 5 : 1621190 = 1 : 324238.

## §. 13.

Je 5 und 5 verbundene Dinge heißen im Lotto Quinen.

1. Hier geben demnach 1, 2, 3, 4 verbundene Dinge keine Quine.
2. Fünfe, a, b, c, d, m hingegen Eine - - Quine.
3. Sechse a, b, c, d, m, r - - 6
4. Sieben - - - - - - - - - - 21
5. Achte - - - - - - - - - - - 56

$\left.\begin{matrix}6\\21\\56\end{matrix}\right\}$ Quinen.

6. Daher für die Quinen die Formel: $\frac{n-4.n-3.n-2.n-1.n}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}$

7. Folglich liegen in 90 Nummern 43,949,268 Quinen; in 5 nur 1. Und wer auf eine Quine setzt, hofft mit 1 gegen 43,949,268 zu gewinnen.

§. 14.

Wie viel verschiedene Spiele sind bey 40 Karten, 3 Spielern, wenn immer 9 ausgegeben werden, und 13 liegen bleiben, für einen Spieler möglich, ohne die Ordnung des Ausspielens und Kaufens von den übrig bleibenden ꝛc. in Anschlag zu bringen? R. 273,438,880. Denn

$$\frac{40.\ 39.\ 38.\ 37.\ 36.\ 35.\ 34.\ 33.\ 32.}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.\ 9.}$$

sind = 37. 32. 19. 17. 13. 11. 5 = 273,438,880. Dieß wäre einer von den vielen, beym Lombre zu dreyen, möglichen Fällen, deren Kästner in seiner Analysis endlicher Größen, 1794ger Ausgabe, S. 526. mehrere berechnet, und dadurch auffallend gezeigt hat, wie sinnreich der menschliche Witz war, durch Erfindungen der Spiele die Zeit . . . anzuwenden. Wer Muße ꝛc. hat, mag das nämliche beym Tarock, Piket ꝛc. versuchen.

§. 15.

Will man alle mögliche Combinationen von n Dingen, zu 2 und 2; 3 und 3; 4 und 4; 5 und 5 ꝛc. finden, so müssen die einzelnen, (§. 10 — §. 14.) gefundenen Formeln addirt werden. Sie wären: $\frac{n-1.n}{1.2} + \frac{n-2.n-1.n}{1\,.\,2\,.\,3} +$
$\frac{n-3.n-2.n-1.n}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} + \frac{n-4.n-3.n-2.n-1n}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.5}$
ꝛc. welches sich mit mäßiger Anstrengung aufs Lotto anwenden läßt, und, unter andern, in der Schrift: Das Lotto di Genua in seiner wahren Größe. Philadelphia 1771. zur Warnung für alle, die noch zu warnen sind, gut ausgeführt ist. Schöne Vorschläge zu billigerer Einrichtung des Lotto sehe man

in Langsdorfs Erläuterungen der Kästnerischen Analysis endlicher Größen S. 324. — 356.

§. 16.

Man vergleiche mit der im vorhergehenden §. gefundenen Formel den §. 182. und den in der dazu gehörigen Tabelle entwickelten Binomischen Lehrsatz, und setze, statt des dort angenommenen Exponenten m, ein n; so ist:

$$(a + b)^n = a^n + \frac{n}{1} \cdot a^{n-1}b + \frac{n \,.\, n - 1}{1 \,.\, 2} \cdot a^{n-2}b^2 + \frac{n \,.\, n - 1 \,.\, n - 2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \cdot a^{n-3}b^3 + \frac{n \,.\, n - 1 \,.\, n - 2 \,.\, n - 3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} \cdot a^{n-4}b^4 \text{ ꝛc.}$$

Nun seye $a = b = 1$; folglich $a + b = 2$; so ist $2^n =$

$$1 + \frac{n}{1} + \frac{n \,.\, n - 1}{1 \,.\, 2} + \frac{n \,.\, n - 1 \,.\, n - 2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} + \frac{n \,.\, n - 1 \,.\, n - 2 \,.\, n - 3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} + \frac{n \,.\, n - 1 \,.\, n - 2 \,.\, n - 3 \,.\, n - 4}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5} \ldots$$

Und nun ist diese Reihe, wenn man die beyden ersten Glieder $1 + \frac{n}{1}$ weg läßt, mit der im §. 15. gefundenen einerley. Hieraus folgt:

1. Eine Bestätigung des im §. 182. gefundenen Gesetzes für die Coefficienten.

2. Eine sehr leichte Formel für alle möglichen Combinationen von n Dingen. Sie ist $2^n - 1 - n$. Also gäben 8 Dinge $2^8 - 1 - 8 = 2^8 - 9 = 256 - 9 = 247$. Daher sind im Lotto alle möglichen Combinationen für $5 = 2^5 - 6 = 32 - 6 = 26$; und $2^{90} - 91 =$ mehr als 1237 Quatrillionen. Wer also alle Amben, Ternen, Quaternen und Quinen auf einmal besetzt, dessen Wahrscheinlichkeit zu gewinnen, verhält sich, zur Wahrscheinlichkeit zu verliehren, wie 26 zu 1237 Quatrillionen, oder wie 1 : 47 Quatrillionen und darüber.

## §. 17.

Es können n Dinge zu je drey und drey, nach §. 11, No. 5, $\frac{n-2\,.\,n-1\,.\,n}{1\,.\,2\,.\,3}$ mal combinirt, und 3 Dinge, nach §. 7, $n-2\,.\,n-1\,.\,n$ mal versetzt werden. Multiplicirt man diese beyden Formeln in einander, so erhält man eine neue, welche die zugleich möglichen Versetzungen und Combinationen zu je 3 und 3 bestimmt.

$$\frac{n-2\,.\,n-1\,.\,n \times n-2\,.\,n-1\,.\,n}{1\,.\,2\,.\,3} =$$

$$= \frac{n-2\,.\,n-1\,.\,n \times 1\,.\,2\,.\,3}{1\,.\,2\,.\,3} = n-2\,.\,n-1\,.\,n.$$

Wäre nun $n = 5$, so ist $(5-2) \times (5-1) \times 5 = 3.\,4.\,5 = 60$.

Auf gleiche Art wird für die Combination zu je 4 und 4 die Formel $n-3\,.\,n-2\,.\,n-1\,.\,n$, und die Summe der zugleich möglichen Versetzungen und Combinationen, für $n = 5$, ist $= 2\,.\,3\,.\,4\,.\,5 = 120$.

## §. 18.

Verlangt man endlich nach §. 6. alle Verbindungen, Versetzungen und Verdoppelungen von n Dingen auf einmal, so geben

1. Zwey Dinge Eine Verbindung, ab; Eine Versetzung ba, und zwey Verdoppelungen aa und bb, folglich zusammen $4 = 2^2$.
2. Drey Dinge, zu 2 und 2 combinirt, liefern 3 Verbindungen ab; ac; bc; drey Versetzungen ba; ca; cb und drey Verdoppelungen aa; bb; cc; also zusammen $3 + 3 + 3 = 9 = 3^2$.
3. Vier Dinge, zu 2 und 2 verbunden, geben 6 Verbindungen ab; ac; ad; bc; bd; cd; ferner 6 Versetzungen ba; ca; da; cb; db; dc und 4 Verdoppelungen aa; bb; cc; dd; zusammen $6 + 6 + 4 = 16 = 4^2$.
4. Also für n Dinge, zu 2 und 2 combinirt, sinds $n^2$.

5. Sollten je 3 und 3 verbunden werden, so sucht man zuerst die durch Verdoppelung eines jeden mögliche Verbindungen und Versetzungen. Sie wären

| | | |
|---|---|---|
| Bey 3 Dingen | - - - | $21 = 3 \times 7$ |
| - - 4 | - - - - - - | $40 = 4 \times 10$ |
| - - 5 | - - - - - - | $65 = 5 \times 13$ |
| - - 6 | - - - - - - | $96 = 6 \times 16$ |
| - - 7 | - - - - - - | $133 = 7 \times 19$ |
| - - 8 | - - - - - - | $176 = 8 \times 22$ |
| - - 9 | - - - - - - | $225 = 9 \times 25$ |

Z. B. bey den 3 Dingen a b c sind durch Verdoppelung eines jeden folgende Verbindungen und Versetzungen möglich:

| | | |
|---|---|---|
| (a a) a | (b b) b | (c c) c |
| a a b | b b a | c c a |
| a a c | b b c | c c b |
| b a a | a b b | a c c |
| c a a | c b b | b c c |
| a b a | b a b | c a c |
| a c a | b c b | c b c |
| 7 | 7 | 7 |

Daher die Summe aller $3 \times 7 = 21$.

Die sonstigen zu 3 und 3 möglichen Verbindungen und Versetzungen sind aus §. 17. bekannt. Sie wären nämlich nach der Formel $n - 2 \,.\, n - 1 \,.\, n$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Für 3 Dinge | - | $= 1 \times 2 \times 3$ - | $= 6$ |
| - - 4 | - - - | $= 2 \times 3 \times 4$ - | $= 24$ |
| - - 5 | - - - | $= 3 \times 4 \times 5$ - | $= 60$ |
| - - 6 | - - - | $= 4 \times 5 \times 6$ - | $= 120$ |
| - - 7 | - - - | - - - - - - - | $= 210$ |
| - - 8 | - - - | - - - - - - - | $= 336$ |
| - - 9 | - - - | - - - - - - - | $= 504$ |

Diese letzten zu den ersten addirt gibt:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Bey 3 Dingen - | $21 + 6$ | - | $= 27$ | $= 3^3$ |
| - - 4 - - - - | $40 + 24$ | - | $= 64$ | $= 4^3$ |
| - - 5 - - - - | $65 + 60$ | - | $= 125$ | $= 5^3$ |
| - - 6 - - - - | $96 + 120$ | - | $= 216$ | $= 6^3$ |
| - - 7 - - - - | $133 + 210$ | - | $= 343$ | $= 7^3$ |
| - - 8 - - - - | $176 + 336$ | - | $= 512$ | $= 3^3$ |
| - - 9 - - - - | $225 + 504$ | - | $= 729$ | $= 9^3$ |

6. Also für n Dinge, zu 3 und 3 combinirt $= n^3$.

7. Auf eine ähnliche, doch merklich mühevollere Art, ergibt sich

bey Combinationen zu 4 und 4 - - $n^4$
- - - - - - - - 5 - - 5 - - $n^5$
- - - - - - - - m - - m - - $n_m$

8. So entspringen aus den 9 Zahlzeichen in unserm gewöhnlichen Decimal-System, zu 2 und 2 combinirt, nach (No. 4.) 81 Verbindungen, Versetzungen und Verdoppelungen zusammen; werden hiezu die 9 einfache Ziffern und die nämlichen, jede mit 0 verbunden, folglich 18 addirt, so erhält man 99, und so viel Zahlen liegen auch wirklich, zwischen 1 und 100. Würden sie aber zu 3 und 3 verbunden, so wärens, nach (No. 5.) $729 + 81 + 81 + 9 = 900$, oder der Menge von ganzen Zahlen, welche zwischen 100 und 1000 liegen.

9. Eben so lassen sich die 4 Buchstaben a, e, i, o zu 3 und 3, 64mal verändern; denn hier ist $n = 4$, folglich (No. 5. und 6) $n^3 = 64$. Die Anwendung davon auf die logikalischen Modos zeigt sehr bestimmt: Kästners Analysis endlicher Größen 1794ger Ausgabe S. 532 — 535.

10. Wer demnach von n Dingen alle möglichen Combinationen, Versetzungen und Verdoppelungen zu 5 und 5; 4 und 4; 3 und 3 wissen will, muß $n^5$; $n^4$; $n^3$ addiren. Oder es ist allgemein

$$n^n + n^{n-1} + n^{n-2} + n^{n-3} + n^{n-4} \ldots n.$$

Dieß ist eine geometrische Progreßion, deren Summe, nach

§. 194. a. gefunden wird, oder: $\frac{n^n - n}{n - 1} + n^n = \frac{n^{n+1} - n}{n - 1}$
$= \frac{n\,(n_n - 1)}{n - 1}$.

Setzet nun $n = 4$; so ist $S = \frac{4 \times (4^4 - 1)}{4 - 1} =$
$\frac{4\,(256 - 1)}{3} = \frac{4 \times 255}{3} = \frac{1020}{3} = 340$.

Oder es sey $n = 5$; so ist $S = \frac{5 \times (5^5 - 1)}{5 - 1} =$
$\frac{5\,(3125 - 1)}{4} = \frac{5 \times 3124}{4} = \frac{15620}{4} = 3905$.

S. in der deutschen Encyclopädie dem Artikel Combination im VIten Theil.