Jak. Frid. Malers weil. Hochfürstl. Markgräfl. Bad. Kirchenraths und Rectors des Gymnasii Jllustris Algebra zum Gebrauch hoher und niederer Schulen

Maler, Jakob Friedrich

Carlsruhe, 1821

Tabelle

urn:nbn:de:bsz:31-266447

Folglich $= a\ 10;\ b = 5;\ m = 5;\ P = 10;\ \frac{a}{b} = Q = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$. Daher

$$P^m = 10^5 \text{ - - - - - - - - - - - - - - } = 100000 = A$$

$$mAQ = 5 \times 100000 \times \frac{1}{2} \text{ - - - - - - - } = 250000 = B$$

$$\frac{m-1}{2}BQ = 2 \times 250000 \times \frac{1}{2} \text{ - - - - - - - } = 250000 = C$$

$$\frac{m-2}{3}CQ = 1 \times 250000 \times \frac{1}{2} \text{ - - - - - - - } = 125000 = D$$

$$\frac{m-3}{4}DQ = \frac{1}{2} \times 125000 \times \frac{1}{2} \text{ - - - - - - - } = 31250 = E$$

$$\frac{m-4}{5}EQ = \frac{1}{5} \times 31250 \times \frac{1}{2} \text{ - - - - - - - } = 3125 = F$$

$$\frac{m-5}{6}FQ = 0 \times 3125 \times \frac{1}{2} \text{ - - - - - - - } = 0 = G \quad \text{Folglich}$$

$$(P + PQ)^m = (a + b)^m = (10 + 5)^5 = 15^5 \text{ - - - } = 759375 = A + B \text{ ꝛc. } + F.$$

9. Sollte aber, z. B. aus 5, die Quadrat-Wurzel gezogen werden, so bedient man sich der No. 7. gefundenen Formel, theilt 5 in 2 Glieder, so daß das 1ste oder a ein vollkommenes Quadrat wird, hier 4+1. Nun ist $a + b = 4 + 1$ und $(a + b)^{\frac{m}{n}} = (P + PQ)^{\frac{m}{n}} = (4 + 1)^{1/2}$. Folglich $a = 4;\ b = 1;\ \frac{b}{a} = Q = \frac{1}{4};\ \frac{m}{n} = \frac{1}{2};\ P = 4$. Daher

$$P^{\frac{m}{n}} = 4^{1/2} \text{ - - - - - - - - - - - - - - } = 2 = A$$

$$\frac{m}{n}AQ = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{4} \text{ - - - } = + \frac{1}{4} = B$$

$$\frac{m-2}{2n}BQ = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \text{ - - - } = -\frac{1}{64} = C$$

$$\frac{m-2n}{3n}CQ = -\frac{1}{2} \times -\frac{1}{64} \times \frac{1}{4} \text{ - - - } = + \frac{1}{512} = D$$

$$\frac{m-3n}{4n}DQ = -\frac{5}{8} \times \frac{1}{512} \times \frac{1}{4} \text{ - - - } = -\frac{5}{16384} = E$$

$$\frac{m-4n}{5n}EQ = -\frac{7}{10} \times -\frac{5}{16384} \times \frac{1}{4} \text{ - - - } = + \frac{7}{131072} = F \text{ ꝛc. Folglich ist}$$

$$\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{64} + \frac{1}{512} - \frac{5}{16384} + \frac{7}{131072} \text{ ꝛc. } = 2{,}237. \text{ Das ist:}$$

wenn die bis auf 10 Millionstel nach der gewöhnlichen Art ausgezogene $\sqrt{5} = 2{,}2360680$ ist, so ist die hier gefundene nur um [illegible] zu groß: welchen Fehler man aber durch immer fortgesetztes Anwenden der Formel in's Unendliche vermindern kann.

10. Vorzüglich aber bedient man sich dieser Formel, allgemeine Größen zu Dignitäten zu erheben, oder auch Wurzeln aus ihnen zu ziehen. Z. B. $(a + b)^5$ Hier ist $(a + b)^5 = (P + PQ)^m$; folglich $a = P;\ \frac{b}{a} = Q;\ m = 5$. Daher nach No. 6.

$$P^m = a^5 \text{ - - - - - - - - - - - - - } = a^5 = A$$

$$\frac{m}{1}AQ = \frac{5 \times a^5 b}{a} \text{ - - - - - - - - - - - } = 5a^4b = B$$

$$\frac{m-1}{2}BQ = \frac{2 \times 5a^4b \times b}{a} \text{ - - - - - - - - - } = 10a^3b^2 = C$$

$$\frac{m-2}{3}CQ = \frac{1 \times 10a^3b^2 \times b}{a} \text{ - - - - - - - - - } = 10a^2b^3 = D$$

$$\frac{m-3}{4}DQ = \frac{1}{2} \times \frac{10a^2b^3 \times b}{a} \text{ - - - - - - - - - } = 5ab^4 = E$$

$$\frac{m-4}{5}EQ = \frac{1}{5} \times \frac{5ab^4 \times b}{a} \text{ - - - - - - - - - } = b^5 = F$$

$$\frac{m-5}{6}FQ = 0 \times \frac{b^5 \times b}{a} \text{ - - - - - - - - - - - } = 0 \quad \text{Folglich ist}$$

$$(P + PQ)^m = (a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

11. Wollte man hingegen aus $a^2 - b^2$ die Quadrat-Wurzel oder $\sqrt{a^2 - b^2}$ haben, so wäre hier: $P = a^2$; $Q = \frac{b^2}{a^2};\ \frac{m}{n} = \frac{1}{2}$; daher $m = 1;\ n = 2$, und die Wurzel durch Annäherung, nach No. 7.

$$P^{\frac{m}{n}} = a^{2/2} \text{ - - - - - - - - - - - - - - - } = a = A$$

$$\frac{m}{n}AQ = \frac{1}{2} \times a \times -\frac{b^2}{a^2} \text{ - - - } = -\frac{ab^2}{2a^2} = -\frac{b^2}{2a} = B$$

$$\frac{m-n}{2n}BQ = -\frac{1}{4} \times -\frac{b^2}{2a} \times -\frac{b^2}{a^2} \text{ - - - } = -\frac{b^4}{8a^3} = -\frac{b^4}{8a^3} = C$$

$$\frac{m-2n}{3n}CQ = -\frac{1}{2} \times -\frac{b^4}{8a^3} \times -\frac{b^2}{a^2} \text{ - - - } = -\frac{b^6}{16a^5} = -\frac{b^6}{16a^5} = D$$

$$\frac{m-3n}{4n}DQ = -\frac{5}{8} \times -\frac{b^6}{16a^5} \times -\frac{b^2}{a^2} \text{ - - - } = -\frac{5b^8}{128a^7} = -\frac{5b^8}{128a^7} = E$$

$$\frac{m-4n}{5n}EQ = -\frac{7}{10} \times -\frac{5b^8}{128a^7} \times -\frac{b^2}{a^2} \text{ - - - } = -\frac{35b^{10}}{1280a^9} = -\frac{7b^{10}}{256a^9} = F$$

$$\frac{m-5n}{6n}FQ = -\frac{3}{4} \times -\frac{7b^{10}}{256a^9} \times -\frac{b^2}{a^2} \text{ - - - } = -\frac{21b^{12}}{1024a^{11}} = -\frac{21b^{12}}{1024a^{11}} = G \quad \text{folglich}$$

$$(P + PQ)^{\frac{m}{n}} = \sqrt{a^2 - b^2} = a - \frac{b^2}{2a} - \frac{b^4}{8a^3} - \frac{b^6}{16a^5} - \frac{5b^8}{128a^7} - \frac{7b^{10}}{256a^9} - \frac{21b^{12}}{1024a^{11}} \text{ ꝛc.}$$