Jak. Frid. Malers weil. Hochfürstl. Markgräfl. Bad. Kirchenraths und Rectors des Gymnasii Jllustris Algebra zum Gebrauch hoher und niederer Schulen

Maler, Jakob Friedrich

Carlsruhe, 1821

Aufgabe 88

urn:nbn:de:bsz:31-266447

Anmerkung.

§. 294.

Was wegen Findung der Seiten-Zahl (§. 289.) bemerkt wurde, gilt auch hier.

Aufgabe 88.

§. 295.

Wenn Kugeln in Gestalt eines Recktangels nebeneinander gelegt werden, und über diese wieder eine Schicht, wo aber jede Seite des Recktangels eine Kugel weniger hat, bis sich dieser Haufe mit einer einigen Reihe von Kugeln endigt; die Summe dieser Kugeln zu finden.

Auflösung.

Es seye die oberste Reihe Kugeln $= a$; so ist des nächst darunter liegenden Recktangels

eine Seite . . . . $= 2$ die andere $= a + 1$
des zweyten eine Seite $= 3$ . . . $= a + 2$
des dritten . . . . $= 4$ . . . . $= a + 3$
des vierten . . . . $= 5$ . . . . $= a + 4$ ꝛc.

Daher sind

im obersten Reihen . . . $= a$
im 1sten Recktangel (von oben) $= 2a + 1 + 1$
im 2ten . . . . $= 3a + 4 + 2$
im 3ten . . . . $= 4a + 9 + 3$
im 4ten . . . . $= 5a + 16 + 4$
im 5ten . . . . $= 6a + 25 + 5$ (§. 278.)

Hieraus ist klar, daß die Summe aus drey Progressionen bestehe. Die erste ist eine arithmetische, wo das erste Glied $+ a$, die Differenz $= a$, die Zahl der Glieder so viel, als Schichten von Kugeln auf einander liegen, $= n$; die andere besteht aus den Quadrat-Zahlen von 1 bis auf $n - 1$; die dritte aus den einfachen Zahlen, auch bis auf $n - 1$. Folglich

Die Summe der 1sten $= \frac{1}{2}(a + an)n$ (§. 187.)

$$\begin{array}{rl} \text{- - der andern} & = S(n-1)^2 = Sn^2 - 2Sn^1 + S(n-1)^0 \\ \text{- - der dritten} & = S(n-1)^1 = \qquad Sn^1 - S(n-1)^0 \end{array} \text{(§.276.)}$$

Summe $= \qquad Sn^2 - Sn^1$, welche daher

$$= \begin{cases} \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \text{ (§. 277.)} \\ \qquad - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n \end{cases}$$

$$= \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{3}n$$

Daher ist die ganze Summe: $\frac{1}{2}\,an + \frac{1}{2}\,an^2 + \frac{1}{3}\,n^3 - \frac{1}{3}\,n = \frac{1}{2}\,an\,(n + 1) + \frac{1}{3}\,n\,(n^2 - 1)$. Es seye die obere Reihe $= 30$ und 10 Schichten; so ist

der Haufen $= \frac{30 \times 10}{2} \times (10 + 1) + \frac{10}{3}\,(100 - 1)$ das ist

$$150 \times 11 + \frac{10}{3} \times 99 = 1650 + 330 = 1980.$$

Zusatz 1.

§. 296.

Wenn $a = 1$; so bekommt man die Formel für eine Quadrat-Pyramidal-Zahl. $\frac{1}{2}\,n + \frac{1}{2}\,n^2 + \frac{1}{3}\,n^3 - \frac{1}{3}\,n = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{2n^3 + n\,(3n + 1)}{6}$ wie im §. 286 auf auf eine andere Art erwiesen wurde.

Zusatz 2.

§. 297.

Es seye die Summe der Kugeln $= p$ und die oberste Reihe $= x$; so ist

$$p = \frac{1}{2}\,xn\,(n + 1) + \frac{1}{3}\,n\,(n^2 - 1) \text{ (§. 295.)}$$

$$p - \frac{1}{3}\,n\,(n^2 - 1) = \frac{1}{2}\,xn\,(n + 1)$$

$$\frac{p - \frac{1}{3}\,n\,(n^2 - 1)}{\frac{1}{2}\,n\,(n + 1)} = x.$$

Es seye $p = 112$ und $n = 6$; so ist die oberste Reihe $x = \frac{42}{21} = 2$.

Erklärung 15.

§. 298.

Eine Pronik-Zahl entsteht, wenn zum Quadrat die Wurzel addirt wird; und eine solche Wurzel wird Pronik-Wurzel genennt. Z. B. $9 + 3 = 12$ ist eine Pronik-Zahl, und 3 die Pronik-Wurzel von 12.

Zusatz 1.

§. 299.

Wenn 1 mit 2; 2 mit 3; 3 mit 4 ꝛc. multiplicirt wird, so entstehen lauter Pronik-Zahlen, und ihre Glieder geben eine Pronik-Progression der natürlichen Zahlen. (§. 278.)

2. 6. 12. 20. 30. 42. 56. 72. 90. ꝛc. ꝛc.

Zusatz 2.

§. 300.

Die Formel $\frac{1}{3} n (n + 2) \times (n + 1)$ (§. 278.) lehrt die natürliche Pronik-Progression summiren; z. B. die angeführte Pronik-Progression 2. 6. 12. 20. 30. 42. 56. 72. 90. hat 9 Glieder, also ist die Summe $\frac{9}{3} (9 + 2) \times (9 + 1) = 3 \times 11 \times 10 = 330$.

Aufgabe 89.

§. 301.

Aus einer Zahl die Pronik-Wurzel zu ziehen.

Auflösung.

Die Pronik-Zahl sey $= a$; die Wurzel $= x$ so ist

$$x^2 + x = a$$

$$x + \frac{1}{2} = \pm\sqrt{a + \frac{1}{4}} \quad (\text{§. } 151.)$$

$$x = \pm\sqrt{a + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$$

Es seye $a = 20$; so ist $x = \pm\sqrt{20 + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} = \mp\sqrt{\frac{81}{4}} - \frac{1}{2} = \pm \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$ und $= -5$, da $16 + 4 = 20$, aber auch $25 + (-5) = 20$.