Jak. Frid. Malers weil. Hochfürstl. Markgräfl. Bad. Kirchenraths und Rectors des Gymnasii Jllustris Algebra zum Gebrauch hoher und niederer Schulen

Maler, Jakob Friedrich

Carlsruhe, 1821

Aufgabe 87

Aufgabe 87.

§. 290.

Aus der gegebenen Seiten- und Winkelzahl die volle Pyramidalzahl zu finden.

Auflösung.

Es seye die Seiten-Zahl $= n$; die Winkel-Zahl $= a$, so ist die volle Polygonal-Zahl $= \frac{an^2 - an}{2} + 1$ (§. 270.)

Daher ist die Pyramidal-Zahl (§. 276. und 282.)

$$= \tfrac{1}{2}\, aSn^2 - \tfrac{1}{2}\, aSn^1 + Sn^0$$

$$= \tfrac{1}{2}\, a(\tfrac{1}{3}n^3 + \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{6}n) - \tfrac{1}{2}a(\tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{2}n) + n \text{ (§. 277.)}$$

$$= \left\{\begin{array}{l} \tfrac{1}{6}\, an^3 + \tfrac{1}{4}\, an^2 + \tfrac{1}{12}\, an \\ \qquad - \tfrac{1}{4}\, an^2 - \tfrac{1}{4}\, an \\ \qquad\qquad + n \end{array}\right.$$

$$= \tfrac{1}{6}\, an^3 - \tfrac{1}{6}an + n = \tfrac{1}{6}a\,(n^3 - n) + n = \tfrac{1}{6}an\,(n^2 - 1) + n$$

Zusatz 1.

§. 291.

Wird diese General-Formel auf die besondern Fälle angewandt, so erhält man für die volle

$$\text{Trig. Pyr. Z.} = \frac{3n^3 - 3n}{6} + n = \frac{3n^3 - 3n + 6n}{6} = \frac{n^3 + n}{2}$$

$$\text{Quadr. Pyr. Z.} = \frac{4n^3 - 4n}{6} + n = \frac{4n^3 - 4n + 6n}{6} = \frac{2n^3 + n}{3}$$

$$\text{Pent. Pyr. Z.} = \frac{5n^3 - 5n}{6} + n = \frac{5n^3 - 5n + 6n}{6} = \frac{5n^3 + n}{6}$$

$$\text{Hexag. Pyr. Z.} = \frac{6n^3 - 6n}{6} + n = \frac{6n^3 - 6n + 6n}{6} = n^3$$

$$\text{Hept. Pyr. Z.} = \frac{7n^3 - 7n}{6} + n = \frac{7n^3 - 7n + 6n}{6} = \frac{7n^3 - n}{6}$$

$$\text{Octog. Pyr. Z.} = \frac{8n^3 - 8n}{6} + n = \text{------} \frac{4n^3 - n}{3}$$

$$\text{Enneag. Pyr. Z.} = \frac{9n^3 - 9n}{6} + n = \text{------} \frac{3n^3 - n}{2}$$

$$\text{Dekag. Pyr. Z.} = \frac{10n^3 - 10n}{6} + n = \text{------} \frac{5n^3 - 2n}{3}$$

ꝛc. ꝛc.

Zusatz 2.

§. 292.

Hieraus folgt dann wieder die General-Regel:

1) Die Winkel-Zahl wird mit dem Kubus der Seiten-Zahl multiplicirt.

2) Dazu addirt man das Produkt aus der Seiten-Zahl in die Differenz von der Winkel-Zahl und 6, wenn die Seite weniger als 6 ist; ist sie aber mehr, so subtrahirt man dieß Produkt.

3) Was heraus kommt, dividirt man mit 6. Z. B.

Die Seite einer vollen Pentagonal-Pyramidal-Zahl seye = 10, so ist

$$\begin{array}{lll} 1000 & 6 & 10 \\ 5 & 5 & 1 \\ \hline 5000 & 1 & 10 \\ 10 & & \\ \hline 5010 & & \end{array}$$

$$6)\frac{5010}{835}$$

Wäre $a = 10$ und n wiederum $= 10$; so ist $x = 1660$.

Zusatz. 3.

§. 293.

Man setze die Pyramidal-Zahl $= p$ und die Winkel-Zahl $= x$; so ist

$$p = \frac{x\,(n^3 - n)}{6} + n$$

$$6p = x\,(n^3 - n) + 6n$$

$$6(p - n) = x\,(n^3 - n)$$

$$\frac{6(p - n)}{n(n^2 - 1)} = x$$

Es sey $p = 125$ und $n = 5$; so ist

$$x = \frac{6\;120}{5\;.\;24} = 6.$$

Anmerkung.

§. 294.

Was wegen Findung der Seiten-Zahl (§. 289.) bemerkt wurde, gilt auch hier.

Aufgabe 88.

§. 295.

Wenn Kugeln in Gestalt eines Recktangels nebeneinander gelegt werden, und über diese wieder eine Schicht, wo aber jede Seite des Recktangels eine Kugel weniger hat, bis sich dieser Haufe mit einer einigen Reihe von Kugeln endigt; die Summe dieser Kugeln zu finden.

Auflösung.

Es seye die oberste Reihe Kugeln $= a$; so ist des nächst darunter liegenden Recktangels

eine Seite . . . . $= 2$ die andere $= a + 1$
des zweyten eine Seite $= 3$ . . . $= a + 2$
des dritten . . . . $= 4$ . . . $= a + 3$
des vierten . . . . $= 5$ . . . $= a + 4$ rc.

Daher sind
im obersten Reihen . . . $= a$
im 1sten Recktangel (von oben) $= 2a + 1 + 1$
im 2ten . . . . $= 3a + 4 + 2$
im 3ten . . . . $= 4a + 9 + 3$
im 4ten . . . . $= 5a + 16 + 4$
im 5ten . . . . $= 6a + 25 + 5$ (§. 278.)

Hieraus ist klar, daß die Summe aus drey Progressionen bestehe. Die erste ist eine arithmetische, wo das erste Glied $+ a$, die Differenz $= a$, die Zahl der Glieder so viel, als Schichten von Kugeln auf einander liegen, $= n$; die andere besteht aus den Quadrat-Zahlen von 1 bis auf $n - 1$; die dritte aus den einfachen Zahlen, auch bis auf $n - 1$. Folglich