Jak. Frid. Malers weil. Hochfürstl. Markgräfl. Bad. Kirchenraths und Rectors des Gymnasii Jllustris Algebra zum Gebrauch hoher und niederer Schulen

Maler, Jakob Friedrich

Carlsruhe, 1821

Aufgabe 86

urn:nbn:de:bsz:31-266447

Aufgabe 86.

§. 285.

Aus der gegebenen Seiten- und Winkel-Zahl die gemeine Pyramidal-Zahl zu finden.

Auflösung.

Es seye die Zahl der Winkel $= a$; die Seitenzahl $= n$; so ist die Polygonalzahl $= \frac{(a-2)\,n^2 - (a-4)\,n}{2}$ (§. 259.) Man darf also nur diese Zahl summiren (§. 276. und 277.) Weil aber a, als die Winkel-Zahl, unveränderlich ist, folglich nicht summirt werden kann, so wird nur n summirt.

$$\frac{(a-2)\,Sn^2 - (a-4)\,Sn^1}{2} = \tfrac{1}{2}(a-2)\,Sn^2 - \tfrac{1}{2}(a-4)\,Sn^1$$

$$= \tfrac{1}{2}(a-2) \times \left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right) - \tfrac{1}{2}(a-4) \times \tfrac{1}{2}(n^2+n) \text{ (§.277.)}$$

$$= \tfrac{1}{6}an^3 + an^2 + \tfrac{1}{12}an - \tfrac{1}{3}n^3 - \tfrac{1}{2}n^2 - \tfrac{1}{6}n - \tfrac{1}{4}an^2 - \tfrac{1}{4}an + n^2 + n$$

$$= \tfrac{1}{6}an^3 - \tfrac{1}{3}n^3 - \tfrac{1}{6}an + \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{5}{6}n \text{ (oder zu gl. Benenn. gebracht)}$$

$$= \frac{an^3 - 2n^3 - an + 5n + 3n^2}{6}$$

$$= \frac{(a-2)n^3 - (a-5)\,n + 3n^2}{6} \text{ (und nun reducirt)}$$

$$= \frac{(a-2)\,n^3 + n\,(3n - a + 5)}{6} = \text{der gemeinen Pyramidal-Zahl.}$$

Es seye $a = 3$, $n = 4$; so ist die g. P. Z. $= \frac{1.64 + 4.14}{6}$

$$= \frac{64 + 56}{6} = \frac{120}{6} = 20.$$

Zusatz 1.

§. 286.

Daher sind Pyramidal-Zahlen, und zwar:

Trigonal-P. Z. $= \frac{n^3 + n\,(3n+2)}{6} = \tfrac{1}{6}n^3 + \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{3}n.$

Quadrat-P. Z. $= \frac{2n^3 + n\,(3n+1)}{6} = \tfrac{1}{3}n^3 + \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{6}n.$

Pentagon.-P.Z. $= \frac{3n^3 + n(3n + 0}{6} = \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{2}n^2.$

Hexagon.-P.Z. $= \frac{4n^3 + n(3n - 1)}{6} = \frac{2}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{6}n.$

Heptagon.-P.Z. $= \frac{5n^3 + n(3n - 2)}{6} = \frac{5}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{3}n.$

Oktagon.-P.Z. $= \frac{6n^3 + n(3n - 3)}{6} = n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n.$

Enneag.-P.Z. $= \frac{7n^3 + n(3n - 4)}{6} = \frac{7}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{2}{3}n.$

Dekagon.-P.Z. $= \frac{8n^3 + n(3n - 5)}{6} = \frac{4}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{6}n.$

ꝛc. ꝛc.

Zusatz. 2.

§. 287.

Hieraus lassen sich nun General-Regeln für alle Pyramidal-Zahlen bilden.

1) Die Kubik-Zahl der Seiten wird mit der Winkel-Zahl weniger 2 multiplicirt.

2) Die Differenz zwischen der Winkel-Zahl und 5 wird, wenn's unter 5 Seiten sind, zur dreyfachen Seiten-Zahl addirt; sonst von ihr subtrahirt, und dieß mit der Seitenzahl multiplicirt.

3) Diese beyden Produkte addirt und mit 6 dividirt, z. B. die unterste Seite eines vierecktigt auf einander gesetzten, zugespitzten Haufen Stückkugeln seye = 10 Kugeln, so ist

1) $1000 \times 2 = 2000.$

2) $5 - 4 = 1$ addirt zu $30 = 31$

$$\begin{array}{r} 10 \\ \hline 310 \end{array}$$

3) $2000 + 310 = 2310$, und dieß dividirt durch $6 = \frac{2310}{6}$

$= 385$ Kugeln im ganzen Haufen.

Es sey die unterste Seite eines 6eckigten, zugespitzten Kugelhaufens = 7; so ist die Anzahl sämmtlicher Kugeln = 252.

Zusatz 3.

§. 288.

Man setze die Pyramidal-Zahl = p; die Winkelzahl = x; so ist (§. 285.)

$$p = \frac{xn^3 - 2n^3 - xn + 5n + 3n^2}{6}$$

$$6p = xn^3 - 2n^3 - xn + 5n + 3n^2$$

$$6p + 2n^3 - 3n^2 - 5n = xn^3 - xn$$

$$\frac{6p + 2n^3 - 3n^2 - 5n}{n^3 - n} = x$$

$$\frac{\frac{6p}{n} + 2n^2 - 3n - 5}{n^2 - 1} = x.$$

Wäre p = 288 und n = 8; so ist

$$x = \frac{216 + 128 - 24 - 5}{63} = \frac{315}{63} = 5.$$

Zusatz 4.

§. 289.

Will man, wenn sonst alles bekannt ist, di' Seiten-Zahl finden, so setze man x = n; und es ist (§. 285.)

$$6p = (a - 2)\,x^3 + 3x^2 - (a - 5)\,x$$

$$\frac{6p}{a - 2} = x^3 + \frac{3x^2}{a - 2} - \frac{(a - 5)\,x}{a - 2}$$

$$x^3 + \frac{3x^2}{a - 2} - \frac{(a - 5)\,x}{a - 2} - \frac{6p}{a - 2} = 0$$

Da aber dieß eine unreine kubische Gleichung ist, welche aufzulösen die nöthigen Gründe noch nicht gelegt sind, so müssen wir die Auflösung noch aufschieben. Es wurde aber deßwegen angeführt, um bey Anfängern eine Begierde zu den höhern Gleichungen zu erregen.