Jak. Frid. Malers weil. Hochfürstl. Markgräfl. Bad. Kirchenraths und Rectors des Gymnasii Jllustris Algebra zum Gebrauch hoher und niederer Schulen

Maler, Jakob Friedrich

Carlsruhe, 1821

Aufgabe 85

urn:nbn:de:bsz:31-266447

. . . . Oktag. Z. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{8p-0}{8}\right)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{p}$

. . . . Enneag. Z. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{8p+1}{9}\right)}$

. . . . Dekag. Z. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{8p+2}{10}\right)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{4p+1}{5}\right)}$

Es seye die Dekag. Z. $p = 451$; so ist x oder die Seitenzahl $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{4\,.\,451 + 1}{5}\right)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1805}{5}\right)} =$
$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{361} = \frac{1}{2} + \frac{19}{2} = 10.$

Zusatz 5.

§. 275.

Will man also von einer Zahl wissen, ob sie eine von den vollen Polygonal-Zahlen sey; so darf man sie nur nach und nach in diesen Formeln in die Stelle von p setzen, und sehen, ob sich die Wurzel ohne Rest ausziehen lasse. Kann's geschehen, so gehört sie darunter; wo nicht, so ist sie auch keine volle Polygonal-Zahl. Man setze z. B. 61, in die Trigonal-Formel, wo unter dem Wurzelzeichen steht $\frac{8p-5}{3}$, so käme $\frac{8 \times 61 - 5}{3} = \frac{483}{3} = 161$, welche Zahl kein vollkommenes Quadrat ist. Wird aber 61 in die Hexagonal-Formel gesetzt, so ist $\frac{4 \times 61 - 1}{3} = \frac{243}{3} = 81$, und hiervon ist die $\sqrt{\ }$ rational. Daher ist 61 zwar keine Trigonal- wohl aber eine Hexagonal-Zahl.

Aufgabe 85.

§. 276.

Die Summe von Quadrat-, Kubik-Zahlen rc. zu finden, deren Wurzeln in natürlicher Ordnung der Zahlen fortgehen.

Auflösung.

Es seye diejenige Zahl, wie weit von 1 an die Summirung geschehen soll $= n$.

Die verlangte Summe von diesen Zahlen werde angezeigt durch Voraussetzung des Buchstabens S; so ist Sn^0 die Summe von so viel Einheiten als n anzeigt, weil $n^0 = 1$ (§. 60.) Sn^1 ist die Summe von den natürlichen Zahlen, in ihrer Ordnung fortgezählt, bis auf n. Sn^2 ist die Summe von den Quadraten, deren Wurzeln in natürlicher Ordnung fortgehen. Sn^3 die Summe von Kubik-Zahlen, deren Wurzeln auch in natürlicher Ordnung bis auf n fortgehen. Und so weiter Sn^4; Sn^5; Sn^6 ꝛc. Es seye z. B. $n = 5$; so wäre:

$$\begin{aligned} Sn^0 &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5 \\ Sn^1 &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 \\ Sn^2 &= 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55 \\ Sn^3 &= 1 + 8 + 27 + 64 + 125 = 225 \end{aligned}$$

Man nehme eine Zahl weiter als n, so ist sie $n + 1$, und die Summen werden seyn wie vorhin $S(n + 1)^0$; $S(n + 1)^1$; $S(n + 1)^2$; $S(n + 1)^3$; $S(n + 1)^4$ ꝛc. Wenn man daher die ersten Summen abzieht, so bleiben jederzeit die letzten Glieder von den letzten Reihen übrig. Z. B. $S(n + 1)^0 - Sn^0 = n^0$; $S(n + 1)^1 - Sn^1 = (n + 1)^1$; $S(n + 1)^2 - Sn^2 = (n + 1)^2$; $S(n + 1)^3 - Sn^3 = (n + 1)^3$ ꝛc. Z. B. wenn $n = 5$; so ist $(n + 1) = 6$; und wenn

$$\begin{aligned} S(n + 1)^2 &= 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 \\ Sn^2 &= 1 + 4 + 9 + 16 + 25 \end{aligned}$$

So ist $S(n + 1)^2 - Sn^2 = (n + 1)^2 \;.\;.\;. = 36$

Nun findet man im (§. 187.) wenn $a = 1$ und $d = 1$ gesetzt wird, die Summe der ersten n natürlichen Zahlen oder $Sn = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$ (indem $s = \frac{(a+u)n}{2} = \frac{(a + a + dn - d)n}{2}$, also im vorliegenden Fall $= \frac{(1 + 1 + n - 1)n}{2} = \frac{(1 + n)n}{2}$ $= \frac{n + n^2}{2}$). Diese Summe ist durch die 1ste und 2te Potenz von n gegeben, auch jede mit einem Coefficienten multiplicirt, der einerley bleibt, n mag sich ändern wie es will. Daher ist auf eben die Art $S(n + 1) = \frac{1}{2} \times (n + 1)^2 + \frac{1}{2} \times (n + 1)$.

Weil nun hier die Summe der ersten Potenzen das Quadrat von n und ferner n enthält, so kann man wenigstens als eine Muthmaßung ansehen: die Summe der Quadrate werde den Würfel von n, das Quadrat von n, und n enthalten, und etwa folgende Gestalt haben: $Sn^2 = An^3 + Bn^2 + Cn$; wo A, B, C Coefficienten bedeuten, die, wie die vorigen $\frac{1}{2}$, einerley bleiben müssen, wenn sich gleich n änderte. Es wäre nämlich auf eben diese Art: $S(n+1)^2 = A(n+1)^3 + B(n+1)^2 + C(n+1)$.

Ob nun diese Muthmaßung richtig ist oder nicht, ließe sich prüfen, wenn man etwa die Coefficienten bestimmen könnte. Das möchte folgendergestalt angehen: Wenn man $(n+1)^3$; $(n+1)^2$; $(n+1)$ wirklich berechnet, und einzeln mit den Coefficienten multiplicirt; so ist

$$\begin{array}{lllll} A(n+1)^3 = & An^3 & + 3An^2 & + 3An & + A \\ B(n+1)^2 = & & + Bn & + 2Bn & + B \\ C(n+1) = & & & + Cn & + C \end{array}$$

Dieses zusammen ist vermöge der Voraussetzung $= S(n+1)^2$. Man ziehe davon ab

$$\begin{array}{l} Sn^2 = An^3 + Bn^2 + Cn^2, \text{ so bleibt} \\ S(n+1)^2 - Sn^2 = 3An^2 + 3An + A \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad + 2Bn + B \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + C \end{array}$$

Nun ist aber (nach oben) $S(n+1)^2 - Sn^2 = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$; folglich

$$n^2 + 2n + 1 = 3An^2 + \left.\begin{array}{r} 3A \\ + 2B \end{array}\right\} n \begin{array}{l} + A \\ + B \\ + C \end{array}$$

Hier muß das einerley seyn, was auf beyden Seiten in einerley Potenz von n multiplicirt ist, folglich ist I) $1 = 3A$ und $A = \frac{1}{3}$; II) $2 = 3A + 2B = 1 + 2B$, oder $1 = 2B = \frac{1}{2}$; III) $1 = A + B + C = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + C = \frac{5}{6} + C$, oder $\frac{1}{6} = C$; daher $Sn^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$.

Ist nun $n = 5$, so ist $Sn^2 = {}^{125}/_3 + {}^{25}/_2 + {}^5/_6 = 41\,{}^2/_3 + 12\tfrac{1}{2} + {}^5/_6 = 53 + {}^4/_6 + {}^3/_6 + {}^5/_6 = 53\,{}^{12}/_6 = 55$.

Nach diesen beyden Beyspielen der Summen der ersten und zweyten Potenzen, wird man also wohl für die Summe der Würfel folgende Formel muthmaßen:

$$Sn^3 = An^4 + Bn^3 + Cn^2 + Dn \text{ daher}$$
$$S(n+1)^3 = A(n+1)^4 + B(n+1)^3 + C(n+1)^2 + D(n+1)$$
$$\begin{aligned} S(n+1)^3 = An^4 + 4An^3 &+ 6An^2 + 4An + A \\ + Bn^3 &+ 3Bn^2 + 3Bn + B \\ &+ Cn^2 + 2Cn + C \\ &\qquad + Dn + D \end{aligned}$$

Weil nun $S(n+1)^3 - Sn^3$ (nach oben) $= (n+1)^3$; so ist dieser Würfel wirklich berechnet

$$n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = 4An^3 + \left.\begin{array}{r} 6A \\ +\,3B \end{array}\right\} n^2 \left.\begin{array}{r} +\,4A \\ +\,3B \\ +\,2C \end{array}\right\} n \begin{array}{r} +\,A \\ +\,B \\ +\,C \\ +\,D \end{array}$$

Daher nach eben der Art zu schließen, wie bey den Quadraten:

I) $1 = 4A$, folglich $A = {}^1/_4$; II) $3 = 6A + 3B = {}^6/_4 + 3B = {}^3/_2 + 3B$, oder $1 = {}^1/_2 + B$, folglich $B = {}^1/_2$. III) $3 = 4A + 3B + 2C = 1 + {}^3/_2 + 2C$, oder ${}^1/_2 = 2C$, folglich $C = {}^1/_4$. IV) $1 = A + B + C + D = {}^1/_4 + {}^1/_2 + {}^1/_4 + D = 1 + D$, also $D = 0$, und $Sn^3 = {}^1/_4 n^4 + {}^1/_2 n^3 + {}^1/_4 n^2$. Für $n = 5$ ist diese Summe

$$\frac{625}{4} + \frac{125}{2} + \frac{25}{4} = \frac{650}{4} + \frac{125}{2} = 162\tfrac{1}{2} + 62\tfrac{1}{2} = 225.$$

Zusatz 1.

§. 277.

Diese Summen lassen sich daher also angeben:

$$Sn^0 = n$$
$$Sn^1 = {}^1/_2 n^2 + {}^1/_2 n = {}^1/_2 n\,(n+1)$$
$$Sn^2 = {}^1/_3 n^3 + {}^1/_2 n^2 + {}^1/_6 n = {}^1/_6 n\,(n+1) \times (2n+1)$$
$$Sn^3 = {}^1/_4 n^4 + {}^1/_2 n^3 + {}^1/_4 n^2 = {}^1/_4 n^2 \times (n+1)^2$$

So kann man die Formeln für die Summen höherer Potenzen finden; jede Formel enthält die Potenzen von n auf einen Grad höher, als die zu summirende Potenzen steigen.

Zusatz 2.

§. 278.

Wenn 1 mit 2; 2 mit 3; 3 mit 4 ꝛc. multiplicirt wird; so kann eine solche Reihe Zahlen nach dieser Art summirt werden.

$1 \times 2 = 2 = 1\,(1 + 1) = 1 + 1$
$2 \times 3 = 6 = 2\,(2 + 1) = 4 + 2$
$3 \times 4 = 12 = 3\,(3 + 1) = 9 + 3$
$4 \times 5 = 20 = 4\,(4 + 1) = 16 + 4$
$5 \times 6 = 30 = 5\,(5 + 1) = 25 + 5$
$6 \times 7 = 42 = 6\,(6 + 1) = 36 + 6$
$7 \times 8 = 56 = 7\,(7 + 1) = 49 + 7$ ꝛc.

Nennt man nun die letzte $= n$; so ist, nach §. 276. die Summe $1 + 4 + 9 + 16$ ꝛc. $= Sn^2$, und die Summe $1 + 2 + 3 + 4$ ꝛc. ꝛc. $= Sn$, mithin die ganze Summe $= Sn^2 + Sn^1 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$ (§. 277.) $= \frac{1}{3}n^3 + n^2 + \frac{2}{3}n = \frac{1}{3}n\,(n + 2) \times (n + 1)$. Es seye $n = 7$; so ist die Summe $= \frac{7}{3} \times (7 + 2) \times (7 + 1) = \frac{7}{3} \times 72 = 168$. Ist $n = 5$, so wird die Summe $= 70$; ist $n = 10$, so ist die Summe $= 440$.

Erklärung 14.

§. 279.

Pyramidal-Zahlen entstehen, wenn die aufeinander folgenden Polygonal-Zahlen summirt werden.

Zusatz. 1.

§. 280.

Sie entstehen also aus den Polygonal-Zahlen, wie diese aus den arithmetischen Progressionen. Z. B.

Trigonal-Z.	1.	3.	6.	10.	15.	21.
Pyramidal-Z.	1.	4.	10.	20.	35.	56.
Quadrat-Z.	1.	4.	9.	16.	25.	36.

Pyramidal-Z	1.	5.	14.	30.	55.	91.
Pentagonal-Z.	1.	5.	12.	22.	35.	51.
Pyramidal-Z.	1.	6.	18.	40.	75.	126.
Hexagonal-Z.	1.	6.	15.	28.	45.	66.
Pyramidal-Z.	1.	7.	22.	50.	95.	161.
			ꝛc.	ꝛc.		

Zusatz 2.

§. 281.

Daher theilt man auch die Pyramidal-Zahlen in Trigonal-Quadrat- Pentagonal- ꝛc. Pyramidal-Zahlen ein.

Zusatz 3.

§. 282.

Wenn also die Polygonal-Zahlen, nach §. 255. summirt werden, so hat man die Pyramidal-Zahlen gefunden.

Anmerkung.

§. 283.

Man wird sich leicht vorstellen können, woher die Pyramidal-Zahlen ihren Namen haben. Denn, wenn über einem Viel-Eck, in welches die Polygonal-Zahlen versetzt wurden, (§. 253. und 265.) ein anderes gesetzt wird, dessen Seite um 1 weniger ist, und so weiter, bis zu oberst 1 kommt, so stellen diese Punkte eine Pyramide vor. Man pflegt die Stückkugeln in den Zeughäusern so aufeinander zu setzen. Wir werden also hieraus die Summe der in einem solchen Haufen befindlichen Kugeln berechnen lernen. Man wird aber auch leicht begreifen, daß dergleichen Kugel-Pyramiden nicht aufgesetzt werden können, wenn die Kugeln in den Polygonal-Zahlen nicht aufeinander passen. (§. 266.)

Zusatz 4.

§. 284.

Da es gemeine und volle Polygonal-Zahlen gibt, (§. 254 und 264.) so gibts auch **gemeine** und **volle** Pyramidal-Zahlen.