Jak. Frid. Malers weil. Hochfürstl. Markgräfl. Bad. Kirchenraths und Rectors des Gymnasii Jllustris Algebra zum Gebrauch hoher und niederer Schulen

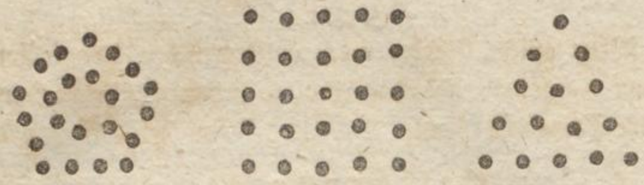
Maler, Jakob Friedrich

Carlsruhe, 1821

Aufgabe 83

urn:nbn:de:bsz:31-266447

auf Eine Seite so viele Punkte, als Glieder in einer Progression summirt wurden. Z. B.



Zusatz 1.

§. 256.

Hieraus ist klar, daß die Differenz der zu summirenden Progression, immer um 2 weniger seye, als die daher entstehende Figur Winkel hat; wenn also die Winkel-Zahl = n, so ist die Differenz = n — 2.

Zusatz 2.

§. 257.

Eben so ist auch klar, warum so viele Punkte auf eine Seite der Figur kommen, als Glieder summirt wurden.

Zusatz 3.

§. 258.

Die Seite einer Polygonal-Zahl ist also die Zahl der Glieder einer arithmetischen Progression, welche summirt werden, und heißt daher auch füglich Seiten-Zahl. Winkel-Zahl hingegen heißt diejenige Zahl, welche bestimmt, wie viel Winkel eine Polygonal-Zahl habe, wenn man aus ihren Einheiten eine regulare Figur bildet. (§. 255.) Diese wird daher immer der um 2 vermehrten Differenz der Glieder gleich seyn. (§. 256.)

Aufgabe 83.

§. 259.

Aus der gegebenen Seiten- und Winkel-Zahl die Polygonal-Zahl selbst zu finden.

Auflösung.

Es sey die Seitenzahl = a (= der Zahl der Glieder, §. 258) und die Winkelzahl sey = n, so ist (§. 258) die Differenz = n — 2. Folglich das letzte Glied, nach §. 184, =

$$= a + \underbrace{(n - 1)\, d}$$
$$\overline{\;\|\qquad\qquad\|\qquad\|\;}$$
$$1 + (a - 1) \cdot (n - 2);$$

Nun ist also das erste Glied $= 1$; die Summe des ersten und letzten Gliedes $= (a - 1) \times (n - 2) + 2$; die halbe Zahl der Glieder $= \frac{a}{2}$; daher die Polygonal-Zahl x (nach der Formel $s = \frac{(u + a)\, n}{2}) = \frac{a}{2}\left((a-1) \times (n-2) + 2\right)$.

$$\text{Oder } x = \frac{a^2n}{2} - \frac{an}{2} - a^2 + 2a$$

$$x = \frac{a^2n}{2} - a^2 - \frac{an}{2} + 2a$$

$$x = \frac{a^2n - 2a^2}{2} - \frac{an + 4a}{2}$$

$$x = \frac{a^2(n - 2) - a\,(n - 4)}{2}$$

Es sey: $a = 8$; $n = 5$; so ist $x =$

$$\frac{(5 - 2)\, 64 - (5 - 4)\, 8}{2} = \frac{(3 \times 64) - (1 \times 8)}{2}$$

$$= \frac{192 - 8}{2} = \frac{184}{2} = 92.$$

Ist hingegen $a = 9$, $n = 4$; so ist $x = 81$.

Zusatz 1.

§. 260.

Es ist demnach die

Trigonal-Zahl $= \frac{a^2 + a}{2}$

Quadrat-Zahl $= \frac{2a^2 + 0}{2} = a^2$

Pentagon. Zahl $= \frac{3a^2 - a}{2}$

Hexagon. Zahl $= \frac{4a^2 - 2a}{2} = 2a^2 - a = a\,(2a - 1)$

Heptagon. Zahl $= \frac{5a^2 - 3a}{2}$

Oktagon. Zahl $= a\,(3a - 2)$

Enneagon. Zahl $= \frac{7a^2 - 5a}{2}$

Dekagon. Zahl $= a\,(4a - 3)$ rc.
woraus die Regeln, nach welcher die Formeln für die Polygonal-Zahlen gefunden werden können, von selbst in die Augen fallen.

Zusatz 2.

§. 261.

Man setze die Seiten-Zahl $= x$; die Polygonal-Zahl $= p$, so ist (§. 258. und 259.)

$$p = \frac{(n-2)\,x^2 - (n-4)\,x}{2}$$

$$2p = x^2\,(n-2) - (n-4)\,x$$

$$\frac{2p}{n-2} = x^2 - \frac{(n-4)\,x}{n-2}$$

Es seye $\frac{n-4}{n-2} = m$; so ist (§. 151.) $\frac{n-4}{2n-4} = \frac{m}{2}$ und $\frac{n^2 - 8n + 16}{4n^2 - 16n + 16} = \frac{m^2}{4}$; daher

$$\frac{2p}{n-2} + \frac{n^2}{4n^2} - \frac{8n}{16n} + \frac{16}{16} = x^2 - mx + \frac{m^2}{4}$$

$$\pm\sqrt{\left(\frac{2p}{n-2} + \frac{n^2}{4n^2} - \frac{8n}{16n} + \frac{16}{16}\right)} = x - \frac{m}{2}$$

$$\frac{n-4}{2n-4} \pm \sqrt{\left(\frac{2p}{n-2} + \frac{n^2}{4n^2} - \frac{8n}{16n} + \frac{16}{16}\right)} = x$$

Werden die Brüche unter dem Wurzelzeichen zu einerley Benennung gebracht, wenn nämlich $\frac{2p}{n-2}$ mit $4n - 8$ multitiplicirt wird, so erhält man

$$\frac{n-4}{2n-4} \pm \sqrt{\left(\frac{8np - 16p + n^2 - 8n + 16}{4n^2 - 16n + 16}\right)} = x \text{ oder}$$

$$\frac{n-4}{2n-4} \pm \sqrt{\left(\frac{8p\,(n-2) + (n-4)\,2}{(2n-4)\,2}\right)} = x \text{ folglich}$$

$$\frac{n - 4 + \sqrt{8p\,(n-2) + (n-4)^2}}{2n-4} = x$$

Es seye z. B.

$p = 92$

$n = 5$ so ist

$$x = \frac{1 + \sqrt{736 \cdot 3 + 1}}{6} = \frac{1 + \sqrt{2209}}{6} =$$

$$= \frac{1 + 47}{6} = 8.$$

Zusatz 3.

§. 262.

Daher ist die Seite der Trigonal-Zahl $= \frac{-1+\sqrt{8p+1}}{2}$

. . . . . . Quadrat-Zahl $= \frac{0+\sqrt{16p+0}}{4} = \sqrt{p}$

. . . . . . Pentag. Zahl $= \frac{1+\sqrt{24p+1}}{6}$

. . . . . . Hexag. Zahl $= \frac{2+\sqrt{32p+4}}{8}$

. . . . . . Heptag. Zahl $= \frac{3+\sqrt{40p+9}}{10}$

. . . . . . Oktog. Zahl $= \frac{4+\sqrt{48p+16}}{12}$

. . . . . . Enneag. Zahl $= \frac{5+\sqrt{56p+25}}{14}$

. . . . . . Dekag. Zahl $= \frac{6+\sqrt{64p+36}}{16}$ ꝛc.

Diese Formel bestimmt nicht nur die Erfindung der Seite; sie lehrt auch, wie man untersuchen kann, ob eine gegebene Zahl unter die Polygonal-Zahlen gehöre, oder nicht? Sie gehört dahin, wenn sie nach und nach in die Stelle von p gesetzt wird, und sodann die Quadratwurzel rein ausgezogen werden kann.

Zusatz 4.

§. 263.

Es sey die Winkelzahl = x; so ist:

$$p = \frac{a}{2}\,((a-1) \times (x-2) + 2) \text{ (§. 259.)}$$

$$\frac{2p}{a} = (a-1) \times (x-2) + 2 \quad \left(: \frac{a}{2} \right.$$

$$\frac{2p}{a} - 2 = (a-1) \times (x-2)$$

$$\frac{2p}{a(a-1)} - \frac{2}{a-1} = x - 2$$

$$\frac{2p}{a(a-1)} - \frac{2}{a-1} + 2 = x \text{ oder}$$

$$\frac{(a-1)\,2p - 2a\,(a-1)}{a\,(a-1) \times (a-1)} + 2 = x$$

$$\frac{2\,(p-a)}{a\,(a-1)} + 2 = x$$

Es seye $p = 148$ und $a = 8$; so ist: $x = \frac{2\,(148-8)}{8\,(8-1)}$ $+ 2 = \frac{2 \,.\, 140}{56} + 2 = \frac{140}{28} + 2 = 5 + 2 = 7.$

Erklärung 13.

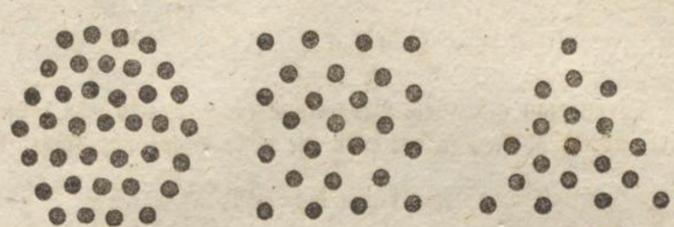
§. 264.

Wenn ein Punkt von 3, 4, 5, 6 ꝛc. Punkten in Gestalt eines regulären Viel-Ecks umgeben wird und dieß Viel-Eck wieder von einem andern ꝛc., daß immer des äußern Seite einen Punkt mehr hat, als des innern; so wird die Zahl dieser Punkte eine volle Polygonal-Zahl, oder eine Polygonal-Zahl mit dem Centrum genannt. Und zwar insbesondere eine Trigonal-Zahl, wenn 3; eine Quadrat-Zahl wenn 4 ꝛc. Punkte das Centrum umgeben.

Anmerkung. 1.

§. 265.

Die Ursache dieser Benennung ist aus nachstehenden Figuren begreiflich.



Anmerkung 2.

§. 266.

Wenn diese Punkte sowohl bey vollen als gemeinen Polygonal-Zahlen Kugeln von gleichen Diametern sind, die einander berühren; so werden sie nirgends auf einander passen, als: Bey den gemeinen Polygonal-Zahlen in der Trigonal- und Quadrat-Zahl; bey den vollen aber nur in den Hexagonal- und Quadrat-Zahlen, weil die Diameter der zusammenstoßenden Kugeln sonst nirgend gleichzeitige Triangel, Quadrate, oder reguläre Sechs-Ecke ausmachen; welche Figuren allein in einer ebenen Fläche auf einander passen, wie in der Geometrie erwiesen wird.

Zusatz 1.

§. 267.

Wenn in der vollen Polygonal-Zahl das Centrum nicht mit gezählt wird, so enthält die erste Einfassung so viel Punkte, als diejenige Figur Seiten hat, davon die Zahl den Namen erhält; die 2te Reihe doppelt, die 3te dreymal so viel ꝛc. Daher ist diese Polygonal-Zahl eine arithmetische Progression, deren 1stes Glied sowohl als die Differenz der Winkel-Zahl gleich ist.

Zusatz 2.

§. 268.

Auf der Seite des 1sten Viel-Ecks dieser Polygonal-Zahlen sind zwey Punkte; auf der zweyten drey; rc. daher ist die Seiten-Zahl jederzeit um 1 mehr, als die Zahl der Glieder. Wenn daher die Seiten-Zahl = n, so ist die Zahl der Glieder von der Progression = n — 1.

Zusatz 3.

§. 269.

Wenn man also diese Progression (§. 267. und 268.) summirt, und 1 addirt, so hat man die volle Polygonal-Zahl.

Aufgabe 84.

§. 270.

Aus der gegebenen Winkel- und Seiten-Zahl die Polygonal-Zahl mit dem Centrum zu finden.

Auflösung.

Es seye die Polygonal-Zahl $= x$
Die Zahl der Winkel $= a$
Die Zahl der Seite . $= n$
So ist das erste Glied . $= a$
Die Differenz . . . $= a$ (§. 267.)
Die Zahl der Glieder $= n - 1$ (§. 268.)
Das letzte Glied . . $= a + a(n - 1) - a = a(n - 1) = an - a.$
Summe des ersten und letzten $= an$
Summe der Progression . $= \frac{an(n-1)}{2}$ (§. 187.)
Folglich die Polygonal-Zahl $= x = \frac{a(n^2 - n)}{2} + 1$ (§. 269.)

Es seye
$a = 3$
$n = 5$; so ist $x = 31$.

Oder $a = 8$
$n = 6$; so ist $x = 121$.

Zusatz 1.

§. 271.

Hieraus folgt die Formel für die volle

Tr. Z. (wenn $n = 3$) $= \frac{3(n-1)n}{2} + 1 = \frac{3(3-1)3}{2} + 1 = 10.$