Jak. Frid. Malers weil. Hochfürstl. Markgräfl. Bad. Kirchenraths und Rectors des Gymnasii Jllustris Algebra zum Gebrauch hoher und niederer Schulen

Maler, Jakob Friedrich

Carlsruhe, 1821

Aufgabe 83

urn:nbn:de:bsz:31-266447

So viel es Progressionen gab, so vielmal ist auch — 1 in dieser Gleichung, außer daß die letzte m^v nicht mit summirt wurde. Daher ist das — 1 so vielmal zu nehmen als n — 1; daher ist

$$\frac{m^n x}{a} = \frac{m^n + m^{n-1} + m^{n-2}\ \text{rc.} + m^2 - n + 1}{m - 1} + 1 \qquad (\times m-1)$$

$$\frac{(m-1)m^n x}{a} = m^n + m^{n-1} + m^{n-2}\ \text{rc.} + m^2 - n + 1 + m - 1$$

$$\frac{(m-1)m^n x}{a} = m^n + m^{n-1} + m^{n-2}\ \text{rc.} + m^2 + m - n$$

$$\frac{(m-1)m^n x}{a} + n = m^n + m^{n-1} + {}^{n-2}\ \text{rc.} + m^2 + m$$

Wird auch diese Progression summirt (§. 193.) so ist

$$\frac{(m-1)m^n x}{a} + n = \frac{m^{n+1} - m}{m - 1} \qquad (: m - 1)$$

$$\frac{m^n x}{a} = \frac{m^{n+1} - m}{(m-1)^2} - \frac{n}{m-1}$$

$$= \frac{m^{n+1}}{(m-1)^2} - \frac{m}{(m-1)^2} - \frac{n}{m-1} \qquad (: m^n)$$

$$\frac{x}{a} = \frac{m}{(m-1)^2} - \frac{m}{m^n(m-1)^2} - \frac{n}{m^n(m-1)} \qquad (\times a)$$

$$x = \frac{a}{(m-1)^2} \times \left(m - \frac{m + n(m-1)}{m}\right)$$

Es seye $a = 8$; $m = 2$; $n = 3$, so ist $x = \frac{8}{(2-1)^2} \times \left(2 - \frac{(2 + 3 \times (2-1))}{2^3}\right) = 8 \times \left(2 - \frac{2+3}{8}\right) = 8\,(2 - \frac{5}{8}) = 16 - 5 = 11.$

Aufgabe 83.

§. 250.

Es legt einer verschiedene Jahre nach einander ein Kapital an, und schlägt immer die Zinse zum Kapital. Wie viel wird er nach gewissen Jahren haben?

Auflösung.

Das Kapital seye = a; der Zins = $\frac{n}{m}$, die Jahre = r; so wird er haben nach §. 243. $\frac{a(m+n)^r}{m^r} + \frac{a(m+n)^{r-1}}{m^{r-1}} + \frac{a(m+n)^{r-2}}{m^{r-2}}$ ꝛc. + a; und die Summe dieser Progression ist (§. 193.) $\left(\frac{a(m+n)^{r+1}}{m^{r+1}} - a\right) : \frac{n}{m} = \frac{a(m+n)^{r+1}}{nm^r} - \frac{am}{n}$.

Es seye $a = 1000$

$\frac{n}{m} = \frac{1}{20}$

$r = 3$

so ist $\frac{a(m+n)^{r+1}}{nm^r} - \frac{am}{n} = \frac{1000 \cdot 194481}{8000} - 20000$

$= \frac{194481}{8} - 20000 = 24310\frac{1}{8} - 20000$

$= 4310\frac{1}{8}$.

Anmerkung.

§. 251.

Formeln, in welchen Dignitäten vorkommen, sind, besonders wenn sie auf einen hohen Grad steigen, wegen dem vielen Multiplieiren in Zahlen sehr beschwerlich zu rechnen. Nun kommen uns zwar die Logarithmen zu statten; allein sie lassen sich in Formeln, worinnen addirte und subtrahirte Größen vorkommen, nicht wohl anwenden. Z. B. (§. 237.) in der Formel $\frac{v(m+n)^r}{(m+n)^r - m^r}$ kann man wohl den Logarithmen von $v(m+n)^r = l\,v + r\,l\,(m+n)$ haben, aber nicht von $(m+n)^r - m^r$; denn er kann nicht $r\,l\,(m+n) - r\,l\,m$ seyn, weil Subtraktion der Logarithmen eine vorhergegangene Division anzeigt. (§. 209.) Wir wollen uns aber so helfen, daß wir die Sache mit Zusetzung des Buchstabens N erleichtern; dieser soll anzeigen, daß die Zahl verstanden werde, deren Logarithme da ist. (§. 212) So gibt die vorige Formel $\frac{v(m+n)^r}{(m+n)^r - m^r}$

folgende: $\frac{N(lv + rl(m + n))}{Nrl(m + n) - Nrlm}$; welche so viel heißt: 1) Man soll zum Logarithmen von v den Logarithmen von m + n mit r multiplicirt addiren, und die dazu gehörige Zahl nehmen; 2) eben so von der Zahl, die zum Logarithmen rl (m + n) gehört, die Zahl, welche zum Logarithmen r l m gehört, abziehen, und 3) die letzte Differenz in die erste Summe dividiren. Nun wird es leicht seyn, die Formeln §. 221. 222. 226. 227. 230. 240. 241. mit N und l zu erleichtern.

Anmerkung. 2.

§. 252.

Mehrentheils kommen Logarithmen heraus, die eine so große Kennziffer oder Charakteristik haben, dergleichen in den Tafeln nicht zu finden ist. Z. B. §. 240. soll der Logarithme von 21 mit 9 multiplicirt werden, gibt 11,8999737. Nun könnten wir wohl als bekannt voraus setzen, wie die zu diesem Logarithmen gehörige Zahl zu finden sey. Weil es aber Anfängern nicht so geläufig seyn möchte, so wollen wir kurz zeigen, wie damit zu verfahren. Wäre der Logarithme 3,8999737; denn so hoch, oder bis auf die Kennziffer 3, findet man ihn in den gemeinen Tafeln, und man addirte den Logarithmen 8,0000000; so käme der Logarithme 11,8999737 heraus. Nun ist aber die zum Logarithmen 8,0000000 gehörige Zahl = 100000000. Darum wäre die Zahl, welche zum Logarithmen 3,8999737 gehört, mit 100000000 zu multipliciren. Allein man findet diesen Logarithmen nicht genau, sondern 3,8999299 und 3,8999846. Zu jenem gehört 7942, und zu diesem 7943. Wird zu jedem Logarithmen die Charakteristik 8 addirt, so werden die Zahlen mit 100000000 multiplicirt; jene wird = 794200000000, diese aber wird 794300000000. Zieht man daher 11,8999299 von 11,8999846 ab, so beträgt der Unterschied dieser Logarithmen 547, was in der Zahl 100000000 ausmacht, der Unterschied aber von 11,8999737 und 11,8999299 ist = 438; daher spricht man nach der Regel de Tri: 547 gibt 100000000, was gibt 438? das ist = 80073126; welches zur Zahl 794200000000 addirt, die zum Logarithmen 11,8999737 gehörige Zahl gibt. Und auf diese Art werden alle dergleichen Logarithmen behandelt.

Lehre von den figurirten Zahlen.

Erklärung 11.

§. 253.

Wenn etliche Glieder einer arithmetischen Progression, die von 1 anfängt, addirt werden, so nennt man solche Summe eine Polygonal-Zahl.

Erklärung 12.

§. 254.

Ist die Differenz der Glieder einer solchen Progression 1, so heißt es eine Trigonal-Zahl, ist sie 2, eine Quadrat-Zahl ist sie 3, eine Pentagonal-Zahl ꝛc.

Anmerkung.

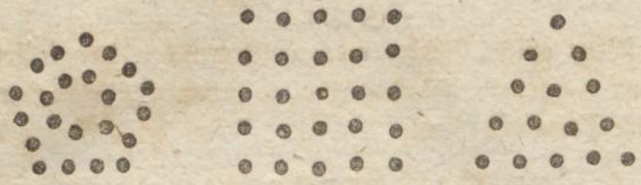
§. 255.

Es sind demnach

Arithmet. Progression	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
Trigonal-Zahlen	1.	3.	6.	10.	15.	21.	28.	36.	45.
Arithmet. Progression	1.	3.	5.	7.	9.	11.	13.	15.	17.
Quadrat-Zahlen	1.	4.	9.	16.	25.	36.	49.	64.	81.
Arithmet. Progression	1.	4.	7.	10.	13.	16.	19.	22.	25.
Pentagonal-Zahlen	1.	5.	12.	22.	35.	51.	70.	92.	117.
Arithmet. Progression	1.	5.	9.	13.	17.	21.	25.	29.	33.
Hexag. Zahlen	1.	6.	15.	28.	45.	66.	91.	120.	153.
Arithmet. Progression	1.	6.	11.	16.	21.	26.	31.	36.	41.
Heptag. Zahlen	1.	7.	18.	34.	55.	81.	112.	148.	189.
Arithmet. Progression	1.	7.	13.	19.	25.	31.	37.	43.	49.
Oktog. Zahlen	1.	8.	21.	40.	65.	96.	133.	176.	225.
Arithmet. Progression	1.	8.	15.	22.	29.	36.	43.	50.	57.
Enneag. Zahlen	1.	9.	24.	46.	75.	111.	154.	204.	261.
Arithmet. Progression	1.	9.	17.	25.	33.	41.	49.	57.	65.
Dekagon. Zahlen	1.	10.	27.	52.	85.	126.	175.	232.	297.

ꝛc. ꝛc.

Sie haben aber den Namen von den regularen Vielecken, in welche sich die Zahlen, wenn ihre Einheiten als Punkte oder Kugeln angesehen werden, versetzen lassen: Es kommen nämlich auf Eine Seite so viele Punkte, als Glieder in einer Progression summirt wurden. Z. B.



Zusatz 1.

§. 256.

Hieraus ist klar, daß die Differenz der zu summirenden Progression, immer um 2 weniger seye, als die daher entstehende Figur Winkel hat; wenn also die Winkel-Zahl = n, so ist die Differenz = n — 2.

Zusatz 2.

§. 257.

Eben so ist auch klar, warum so viele Punkte auf eine Seite der Figur kommen, als Glieder summirt wurden.

Zusatz 3.

§. 258.

Die Seite einer Polygonal-Zahl ist also die Zahl der Glieder einer arithmetischen Progression, welche summirt werden, und heißt daher auch füglich Seiten-Zahl. Winkel-Zahl hingegen heißt diejenige Zahl, welche bestimmt, wie viel Winkel eine Polygonal-Zahl habe, wenn man aus ihren Einheiten eine regulare Figur bildet. (§. 255.) Diese wird daher immer der um 2 vermehrten Differenz der Glieder gleich seyn. (§. 256.)

Aufgabe 83.

§. 259.

Aus der gegebenen Seiten- und Winkel-Zahl die Polygonal-Zahl selbst zu finden.

Auflösung.

Es sey die Seitenzahl = a (= der Zahl der Glieder, §. 258) und die Winkelzahl sey = n, so ist (§. 258) die Differenz = n — 2. Folglich das letzte Glied, nach §. 184, =