Jak. Frid. Malers weil. Hochfürstl. Markgräfl. Bad. Kirchenraths und Rectors des Gymnasii Jllustris Algebra zum Gebrauch hoher und niederer Schulen

Maler, Jakob Friedrich

Carlsruhe, 1821

Aufgabe 82

urn:nbn:de:bsz:31-266447

$$\frac{c[((m+n)^r - m^r) . (m+n)]}{n((m+n)_r - om_r)} = x$$

$$\frac{c[((m+n)^r - m)^r . (m+n)]}{n(m+n)^r} = x$$

$$(: (m+n)$$

$$\frac{c((m+n)^r - m^r)}{n(m+n)^{r-1}} = x$$

Mithin nach §. 70. und 71.

$$x = \frac{1000\,[64 - 37]}{1 . 16} = \frac{1000 . 37}{16} = \frac{37000}{16} =$$

$$= 2312\,{}^1\!/_2 \text{ fl.}$$

Zusatz 3.

§. 247.

Oben (§. 240.) wurde auch eine Formel gefunden, wie groß das Kapital seyn müsse, so in gewisser Zeit bey gewissen Ausgaben aufgeht. Allein sie setzt voraus, daß die Ausgabe erst mit Ende jedes Jahres bestritten werde; diese aber gleich im Anfange des Jahres.

Zusatz 4.

§. 248.

Die Formel §. 240. war: $\frac{cm((m+n)^r - m^r)}{n(m+n)^r}$; diese ist: $\frac{c((m+n)^r - m^r)}{n(m+n)^{r-1}}$; also verhalten sie sich zu einander wie $\frac{m}{m+n} : 1$ oder wie $m : m+n$. Also wird das Kapital, davon man die Ausgabe erst mit Ende des Jahres bestreitet, kleiner seyn als das, wovon man gleich im Anfange ausgibt.

Aufgabe 82.

§. 249.

Es hat einer ein Kapital, womit er jährlich so viel erwirbt, daß er allezeit mit Schluß des Jahres etlichemal, z. B. 2mal, 3mal ꝛc. so viel hat, als er im Anfange desselben hatte; gibt aber mit Schluß des 1sten Jahres eine gewisse Summe aus; im 2ten Jahre 2mal, im 3ten 3mal so viel ꝛc. Nach gewissen Jahren zehrt er sich auf, wie groß war sein anfängliches Kapital?

Auflösung.

Das Kapital seye $= x$; wie vielmal er sein Geld vermehrt $= m$; die Zahl der Jahre $= n$; er gibt das erste Jahr aus $= a$, so hat er mit Schluß des

1sten Jahrs $= mx - a$

2ten „ „ $= m^2x - ma - 2a$

3ten „ „ $= m^3x - m^2a - 2ma - 3a$

4ten „ „ $= m^4x - m^3a - 2m^2a - 3ma - 4a$

5ten „ „ $= m^5x - m^4a - 2m^3a - 3m^2a - 4ma - 5a$ ꝛc.

Hieraus erhellt, daß der Exponent von m, wo es mit x multiplicirt ist, sey $= n$; und wo eben dieß m mit a multiplicirt ist, seye dessen Exponent im ersten Gliede $= n - 1$, und werde in den folgenden Gliedern immer um 1 weniger; das letzte Glied aber sey $= na = nam^0$.

Es ist also $m^n x - am^{n-1} - 2am^{n-2} - 3am^{n-3}$ ꝛc. $- nam^0 = 0$

$$\frac{m^n x}{a} = m^{n-1} + 2m^{n-2} + 3m^{n-3} \text{ ꝛc. } + nm^0$$

Hier ist eine aus andern Progressionen zusammengesetzte geometrische Progression. Wir wollen sie zerlegen, und der Deutlichkeit wegen indessen $n = 5$ setzen, so ist

$$\begin{aligned}\frac{m^5x}{a} = + m^4 &+ m^3 + m^2 + m^1 + m^0\\ &+ m^3 + m^2 + m^1 + m^0\\ &\qquad + m^2 + m^1 + m^0\\ &\qquad\qquad + m^1 + m^0\\ &\qquad\qquad\qquad + m^0\end{aligned}$$

Hieraus ist klar, daß eben so viel Progressionen heraus kommen, als Jahre gegeben sind, bey deren jeden das letzte Glied $m^0 = 1$ ist (§. 60.) und immer eine ein Glied weniger hat, als die vorhergehende, bis die letzte nur das einige Glied $m^0 = 1$ hat. Wir wollen sie summiren (§. 193.)

$\frac{m^n - 1}{m - 1} + \frac{m^{n-1} - 1}{m - 1} + \frac{m^{n-2} - 1}{m - 1}$ ꝛc. $+ \frac{m^2 - 1}{m - 1} + 1$ folglich ist

$$\frac{m^n x}{a} = \frac{m^n - 1 + m^{n-1} - 1 + m^{n-2} - 1 \text{ ꝛc. } + m^2 - 1}{m - 1} + 1$$

So viel es Progressionen gab, so vielmal ist auch — 1 in dieser Gleichung, außer daß die letzte m^v nicht mit summirt wurde. Daher ist das — 1 so vielmal zu nehmen als n — 1; daher ist

$$\frac{m^n x}{a} = \frac{m^n + m^{n-1} + m^{n-2} \text{ 2c.} + m^2 - n + 1}{m - 1} + 1 \qquad (\times m-1)$$

$$\frac{(m-1)m^n x}{a} = m^n + m^{n-1} + m^{n-2} \text{ 2c.} + m^2 - n + 1 + m - 1$$

$$\frac{(m-1)m^n x}{a} = m^n + m^{n-1} + m^{n-2} \text{ 2c.} + m^2 + m - n$$

$$\frac{(m-1)m^n x}{a} + n = m^n + m^{n-1} + {}^{n-2} \text{ 2c.} + m^2 + m$$

Wird auch diese Progression summirt (§. 193.) so ist

$$\frac{(m-1)m^n x}{a} + n = \frac{m^{n+1} - m}{m - 1} \qquad (: m - 1)$$

$$\frac{m^n x}{a} = \frac{m^{n+1} - m}{(m-1)^2} - \frac{n}{m-1}$$

$$= \frac{m^{n+1}}{(m-1)^2} - \frac{m}{(m-1)^2} - \frac{n}{m-1} \qquad (: m^n)$$

$$\frac{x}{a} = \frac{m}{(m-1)^2} - \frac{m}{m^n(m-1)^2} - \frac{n}{m^n(m-1)} \qquad (\times a)$$

$$x = \frac{a}{(m-1)^2} \times \left(m - \frac{m + n(m-1)}{m}\right)$$

Es seye $a = 8$; $m = 2$; $n = 3$, so ist $x = \frac{8}{(2-1)^2} \times \left(2 - \frac{(2 + 3 \times (2-1)}{2^3}\right) = 8 \times \left(2 - \frac{2+3}{8}\right) = 8\,(2 - \tfrac{5}{8}) = 16 - 5 = 11.$

Aufgabe 83.

§. 250.

Es legt einer verschiedene Jahre nach einander ein Kapital an, und schlägt immer die Zinse zum Kapital. Wie viel wird er nach gewissen Jahren haben?