Jak. Frid. Malers weil. Hochfürstl. Markgräfl. Bad. Kirchenraths und Rectors des Gymnasii Jllustris Algebra zum Gebrauch hoher und niederer Schulen

Maler, Jakob Friedrich

Carlsruhe, 1821

Aufgabe 79

urn:nbn:de:bsz:31-266447

Es seye alles, wie im vorhergehenden §., so ist

$$m = 108 - \sqrt[3]{32 \times 108^2} = 36.$$

Anmerkung.

§. 234.

Auf eben diese Art verfährt man, wenn von einem Stück Silber ein Stück etlichemale abgeschnitten, und mit Kupfer ersetzt wird.

Es sey Silber $= x$; man schneide ab $m = 4$ und zwar $n$mal $= 9$mal. Am Ende sey: Kupfer zu Silber wie $37 : 27$; so ist $x = 16$ und dabey $6\frac{3}{4}$ Silber und $9\frac{1}{4}$ Kupfer.

Prüfung.

$$37 : 27 = 9\tfrac{1}{4} : 6\tfrac{3}{4}$$

$$37 : 27 = 37 : 27$$

Aufgabe 79.

§. 235.

Wenn man ein Kapital hat, davon der Zins zum jährlichen Unterhalt nicht zureicht, sondern jährlich vom Kapital etwas zugeschossen werden muß; zu finden, wann das Kapital aufgezehrt wird.

Auflösung.

Das Kapital sey $= a$; der Zins $= \frac{n}{m}$; der Zuschuß am Ende des 1sten Jahres $= b$; die Zahl der Jahre $= x$; so ist klar, daß, da das Kapital mit Schluß des Jahres um die Größe b weniger wurde, es auch um $\frac{bn}{m}$ weniger Zins trage, folglich zu Ende des 2ten Jahres, über b noch $\frac{bn}{m}$ müsse zugeschossen werden. Daher ist der Zuschuß mit Ende des 2ten Jahres $= b + \frac{bn}{m} = \frac{b(m+n)}{m}$. Hieraus folgt dieß Verhältniß: Wer 1 Jahr b zuschießt, muß das andere $\frac{b(m+n)}{m}$ zuschießen.

$$b : \frac{b(m+n)}{m} \text{ oder } 1 : \frac{m+n}{m}$$

Nun kann durch die Regel de Tri gefunden werden, was mit Schluß des 3ten Jahres zugeschossen werden müsse. Denn, wer dieß Jahr 1 zuschießt, muß übers Jahr $\frac{m+n}{m}$ zuschießen.

$$1 : \frac{m+n}{m} = \frac{b(m+n)}{m} : \frac{b(m+n)^2}{m^2}$$

Hieraus sieht man schon, daß im 4ten Jahre $\frac{b(m+n)^3}{m^3}$ rc. zugeschossen werden müsse, und folglich im letzten Jahre $\frac{b(m+n)^{x-1}}{m^{x-1}}$. Alle Zuschüsse machen demnach zusammen genommen eine geometrische Progression aus, deren erstes Glied $= b$; das letzte $= \frac{b(m+n)^{x-1}}{m^{x-1}}$; der Exponent $= \frac{m+n}{m}$. Daher die Differenz des ersten und eines weitern als das letzte . . . $= \frac{b(m+n)^x}{m^x} - b$; welches mit $\frac{m+n}{m} - 1 = \frac{n}{m}$ dividirt, die Summe gibt $\frac{bm(m+n)^x}{nm^x} - \frac{bm}{n}$. Da nun die Summe aller Zuschüsse dem Kapital gleich seyn muß, wenns aufgehen soll, so ist:

$$\frac{bm(m+n)^x}{nm^x} - \frac{bm}{n} = a$$

$$\frac{bm(m+n)^x}{nm^x} = a + \frac{bm}{n} \quad (:m)$$

$$\frac{b(m+n)^x}{nm^x} = \frac{a}{m} + \frac{b}{n} \quad (\times n)$$

$$\frac{b(m+n)^x}{m^x} = \frac{an}{m} + b$$

$$lb + xl(m+n) - xlm = l\left(\frac{an}{m} + b\right)$$

$$xl(m+n) - xlm = l\left(\frac{an}{m} + b\right) - lb$$

$$x = \frac{l\left(\frac{an}{m} + b\right) - lb}{l(m+n) - lm}$$

Es ist $a = 5000$, der Zins 5 pro Cent, so ist der Zins $= \frac{an}{m} = 250$; b sey $= 50$; $\frac{an}{m} + b = 300$; so ist

$$\begin{aligned} l\left(\frac{an}{m} + b\right) &= l300 = 2{,}4771212 \\ lb &= l50 \;\; = 1{,}6989700 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l\left(\frac{an}{m} + b\right) - lb &= 0{,}7781512 \\ l(m + n) = l21 &= 1{,}3222193 \\ lm = l20 &= 1{,}3010300 \end{aligned}$$

$$l(m + n) - lm = 0{,}0211893$$

0,7781512	0,0211893
635679	$36\,{}^{153364}/_{211893}$
1424722	
1271358	Das ist 36 Jahre 214 Tage $= x$.
153364	

Anmerkung.

§. 236.

Es ist zwar an dem, daß man diese Aufgabe auch nach der gemeinen Rechenkunst hätte auflösen können. Wenn man beym Schluß des 1sten Jahres 50 von 5000 subtrahirt, so bleiben 4950, wovon das Interesse 247 fl. 30 kr. Es würde demnach als Zuschuß im 2ten Jahre erfordert 52 fl. 30 kr. Diese müssen wieder von 4950 subtrahirt werden ꝛc. bis endlich das ganze Kapital aufgeht. Wer sieht aber nicht die große Beschwerlichkeit im Rechnen? Es dient also die Algebra nicht nur dazu, solche Aufgaben aufzulösen, welche der gemeinen Rechenkunst unmöglich fallen, sondern auch die möglichen ungemein zu erleichtern.

Zusatz 1.

§. 237.

Nennt man den jährlichen Aufwand $= c$; so ist $c = \frac{an}{m} + b$; und $b = c - \frac{an}{m}$; setzt man dieß in obige Gleichung $\frac{b(m + n)^x}{m^x} = \frac{an}{m} + b$; so kommt

$$c \times \frac{(m+n)^x}{m^x} - \frac{an}{m} \times \frac{(m+n)^x}{m^x} = c.$$

Will man daher wissen, wie viel man jährlich verzehren dürfe, daß ein Kapital in gewisser Zeit aufgehe, welches bey Leib-Renten-Rechnungen gebraucht werden kann; so darf man nur statt c setzen x, und statt x die gegebene Zeit r; so entsteht folgende Gleichung:

$$\frac{x(m+n)^r}{m^r} - \frac{an}{m} \times \frac{(m+n)^r}{m^r} = x \; (\times m^r)$$

$$x(m+n)^r - \frac{an}{m} \times (m+n)^r = m^r x$$

$$x(m+n)^r - m^r x = \frac{an}{m} \times (m+n)^r$$

$$x = \frac{\frac{an}{m} \times (m+n)^r}{(m+n)^r - m^r}$$

Oder, wenn man $\frac{an}{m}$, den Zins vom gegebenen Kapital, v nennt, so ist $x = \frac{v(m+n)^r}{(m+n)^r - m^r}$

Oder $lx = lv + rl(m+n) - l[(m+n)^r - m^r]$

Es seye $v = 259$

$\frac{n}{m} = 1/20$

$r = 4$; so ist

$lx = 3,1492373$ und

$x = 1410$ fl. +

Zusatz 2.

§. 238.

Wenn bey einer Fabrik Instrumente in gewissen Jahren unbrauchbar werden, und folglich das darin gesteckte Kapital aufgezehrt wird; so gilt auch die Formel $\frac{v(m+n)^r}{(m+n)^r - m^r}$, um zu finden, wie viel davon auf 1 Jahr zu rechnen seye. Eben so läßt sich hieraus berechnen, welches vortheilhafter sey, ein gewisses Kapital in etwas zu stecken, das nach gewissen Jahren unbrauchbar wird, oder solches zu miethen, und einen jährlichen Zins daraus zu geben. Beträgt die Formel im §. 237. mehr, als der zu gebende Zins, so ist das Miethen besser, und so auch umgewandt.

Zusatz 3.

§. 239.

Nimmt einer ein Kapital auf, und gibt statt des Zinses ein Gut zu benutzen, (pactum antichreticum) welches mehr als der Zins erträgt; so wird das Kapital auch jährlich um so viel geringer, als der Ertrag des Guts den Zins übersteigt, folglich muß es auch jährlich weniger Zins tragen. Wird nun der Ueberfluß des Ertrags über den Zins b genannt, so kann nach obiger Formel (§. 235.) $x = \frac{l\left(\frac{an}{m} + b\right) - lb}{l\,(m + n) - lm}$, die Zeit gefunden werden, wann das Kapital durch Benutzung des Gutes abbezahlt wird.

Zusatz 4.

§. 240.

Will man wissen, wie groß das Kapital seyn müsse, daß es in gegebenen Jahren aufgezehrt werde, wenn man jährlich eine gewisse Summe damit zu bestreiten hat; so darf man nur in der Formel im §. 237. anstatt a setzen x, und statt x die gegebene Jahre r. Also, statt $c \times \frac{(m + n)^x}{m^x} - \frac{an}{m} \times \frac{(m + n)^x}{m^x} = c$;

$$c \times \frac{(m + n)^r}{m^r} - \frac{nx}{m} \times \frac{(m + n)^r}{m^r} = c \; (\times\, m^r)$$

$$c \times (m + n)^r - \frac{nx}{m} \times (m + n)^r = cm^r$$

$$c \times (m + n)^r - cm^r = \frac{nx}{m} \times (m + n)^r$$

$$\frac{c \times [(m + n^r) - m^r]}{n\,(m + n)^r} = \frac{nx}{m}$$

$$\frac{cm \times [(m + n)^r - m^r]}{n\,(m + n)^r} = x$$

Dieß kann in dem Fall gebraucht werden, wenn ich auf ein Gut Geld aufnehme, und dagegen das Gut auf etliche Jahre zu benutzen gebe, um zu wissen, wie ein großes Kapital ich nehmen dürfe, damit ich nach Verfluß dieser Jahre das Gut wieder frey bekomme. Z. B. das Gut trage 100 fl. ich will's auf 9 Jahre geben, wie viel darf ich darauf nehmen, daß ich's nach dieser Zeit wieder frey bekomme?

Es sey $c = 100$; $r = 9$; $m = 20$; $n = 1$;
folglich

$$2000 \times \frac{(21^9 - 20^9)}{21^9} = x = 710 \text{ fl. } 51 \text{ kr. } 1 \text{ Pf. etc.}$$

Wäre $c = 1000$, $r = 3$, $\frac{n}{m} = \frac{1}{20}$; so ist $x = 2723$ fl. 14 kr. 3 Pf.

Zusatz 5.

§. 241.

Soll mit dem, der ein Gut für ein geschossenes Kapital zu nutzen erhielt, liquidirt werden, wie viel ihm nach einigen Jahren noch am Kapital zu bezahlen seye, wenn der Ertrag die Zinse übertrifft, so kommt's auf gleiche Rechnung an. Der Ueberschuß sey $= b$, das Kapital $= a$, die Zahl der Jahre $= r$; und der Zins $= \frac{n}{m}$; so geht im

1sten Jahre ab . . . $= b$

2ten . . . . $= \frac{b\,(m + n)}{m}$

3ten . . . . $= \frac{b\,(m + n)^2}{m^2}$

Im letzten . . . . . $= \frac{b\,(m + n)^{r-1}}{m^{r-1}}$.

Wird diese Progression summirt, und vom Kapital abgezogen, so hat man das Verlangte. Hier $b\left(\frac{(m + n)^r}{m^r} - b\right) : \frac{n}{m} = \frac{bm}{n} \times \frac{(m + n)^r}{m^r} - \frac{bm}{n}$. Dieß von a abgezogen, wäre noch zu bezahlen, $a + \frac{bm}{n} - \frac{bm\,(m + n)^r}{nm^r}$.

Es seye $b = 50$

$a = 800$

$r = 4$

$\frac{n}{m} = \frac{1}{20}$

so ist $a + \frac{bm}{n} - \frac{bm(m+n)^r}{nm^r} = 584\ ^{79}/_{160}$ fl.

Anmerkung.

§. 242.

Vielleicht werden diejenige, die dem Buchstaben der Gesetze nachgehen, mit einigen bisher angebrachten Aufgaben nicht zufrieden seyn, weil Zins auf Zins gerechnet wurde, welches doch nach den Gesetzen nicht erlaubt ist, und also glauben, es seyen dieß unnütze Grillen, die man nirgend brauchen könne. Allein es ist ein anders, ein Kapital anlegen, und, wenn der Schuldner den Zins nicht bezahlen kann, solchen zum Kapital schlagen; und wieder ein anders, in gewissen Fällen, um niemand Unrecht zu thun, Zinsen von Zinsen zu rechnen. Wenn ich z. B. dem Cajus über 4 Jahre 1000 fl. zahlen sollte, so würden mir innerhalb dieser Zeit diese 1000 fl., im 1sten Jahre 50 fl. Zins tragen. Diesen Zins laß ich nicht müssig liegen, er muß mir im 2ten Jahre 2 fl. 30 kr. tragen ꝛc. in den folgenden Jahren. Geschähe mir da nicht groß Unrecht, wenn ich in der Rabbat-Rechnung nicht Zinse von Zinsen berechnen dürfte, da die Gesetze nicht von diesem Falle, sondern nur von ausgeliehenen Kapitalien handeln. Eben so ist's mit den übrigen Aufgaben. Man sehe hierüber Langsdorfs Fortsetzung der Erläuterungen über die Kästnerische Analysis endlicher Größen; Mannheim 1777. S. 269 — 296. ingleichem Fratrum Becmannorum tractat. mathemat. juridica de interusurio Goett. 1784.

Aufgabe 80.

§. 243.

Eine Regel zu finden, wie hoch ein Kapital in gewissen Jahren, wenn die Zinse jederzeit wieder als Kapital angelegt werden, steigt.