Jak. Frid. Malers weil. Hochfürstl. Markgräfl. Bad. Kirchenraths und Rectors des Gymnasii Jllustris Algebra zum Gebrauch hoher und niederer Schulen

Maler, Jakob Friedrich

Carlsruhe, 1821

Aufgabe 78

urn:nbn:de:bsz:31-266447

haben aber die Lehre derselben bisher verspahrt, weil wir noch wenig Gelegenheit hatten, ihren Nutzen zu zeigen; und ohne solches werden die wichtigsten Wahrheiten von Anfängern oft geringe geschätzt, und vernachläßigt.

Aufgabe 78.

§. 230.

Wenn ein Gefäß voll Wein ist, und aus demselben eine gewisse Menge herausgelassen, mit so viel Wasser wieder angefüllt, und dieß etlichemal wiederholt wird, aus dem Verhältniß des noch übrigen Weins zum Wasser, den Inhalt des Gefäßes zu finden.

Auflösung.

Das Gefäß halte . . . . $= x$
Es werde herausgelassen . . . . $= m$
Dieß sey geschehen . . . . $= n$ mal
Das Verhältniß des Wassers zum Wein seye $= a : v$

Wird das erstemal Wein $= m$ herausgelassen, und mit Wasser angefüllt, so bleibt an Wein übrig $x - m$; und das ganze Gefäß verhält sich zum übrigen Wein $= x : x - m$. Wird wieder $= m$ herausgelassen, so läuft Wasser und Wein nach Proportion heraus; nämlich um so viel jetzt weniger Wein im Gefäß ist, als von Anfang darinnen war, um so viel weniger läuft auch heraus. Also verhält sich wie das ganze Gefäß zum erstmaligen Rest des Weins, so dieser Rest zum Rest nach der 2ten Ablassung der Größe m. Oder

$$x : x - m = x - m : \frac{(x - m)^2}{x}$$

Deßgleichen beym dritten Herauslassen ist

$$x : x - m = \frac{(x - m)^2}{x} : \frac{(x - m)^3}{x^2}$$

Und so geht es weiter fort, bis endlich der letzte Wein-Rest $= \frac{(x - m)^n}{x^{n-1}}$, und das Wasser $= x - \frac{(x - m)^n}{x^{n-1}}$

Daher ist

$$a : v = x - \frac{(x-m)^n}{x^{n-1}} : \frac{(x-m)^n}{x^{n-1}}$$

$$a : v = x^n - (x-m)^n : (x-m)^n \text{ (§. 228. No. 7.)}$$

$$a + v : v = x^n : (x-m)^n \text{ (§. 228. No. 3.)}$$

$$\sqrt[n]{a+v} : \sqrt[n]{v} = x : x - m \text{ (§. 228. No. 6.)}$$

$$\sqrt[n]{a+v} - \sqrt[n]{v} : \sqrt[n]{a+v} = m : x \text{ (§. 228. No. 4.)}$$

Es seye $a = 19$; $v = 8$; $n = 3$; $m = 4$; so ist

$$\sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{8} : \sqrt[3]{27} = 4 : x \text{ oder}$$
$$3 - 2 : 3 = 4 : x \text{ das ist}$$
$$1 : 3 = 4 : 12$$

Ist $a = 65$, $v = 16$, $n = 4$, $m = 5$; so ist $x = 15$.

Zusatz 1.

§. 231.

Wenn die Größen a und v gerade so groß angenommen werden, als der Wein und das Wasser, so wird $a + v = x$; und die Proportion (§. 230.) bleibt noch.

$$a + v : v = x^n : (x-m)^n$$
$$x : v = x^n : (x-m)^n$$
$$1 : v = x^{n-1} : (x-m)^n$$

Wenn also der Inhalt des Gefäßes $= x$; das auf einmal herausgelassene $= m$; und wie vielmal solches geschah $= n$; so kann der übriggebliebene Wein leicht gefunden werden. $x^{n-1} : (x-m)^n = 1 : v$. Also nach vorigem Beyspiel:

$$12^2 : 8^3 = 1 : v$$
$$144 : 512 = 1 : v$$
$$: 16) \quad 9 : 32 = 1 : v$$

$v = {}^{32}/_9 = 3\,{}^5/_9$ Wein, folglich $12 - 3\,{}^5/_9 = 8\,{}^4/_9$ Wasser.

Daher verhält sich das Wasser zum Wein, wie $8\,{}^4/_9 : 3\,{}^5/_9 = 76 : 32 = 19 : 8$.

Zusatz 2.

§. 232.

Aus der Proportion $1 : v = x^{n-1} : (x - m)^n$ entsteht folgende Gleichung:

$$(x - m)^n = vx^{n-1}$$

$$nl(x - m) = lv + nlx - lx$$

$$lx - lv = nlx - nl(x - m)$$

$$\frac{lx - lv}{lx - l(x - m)} = n$$

Wenn man also wissen will, wie vielmal das Herauslassen zu wiederholen seye, damit eine gewisse verlangte Menge Wein übrig bleibe, so gibt diese Formel die Regel dazu. Z. B. das Gefäß hielte 108 Maaß, man wollte 32 Maaß übrig behalten, und ließe jedesmal 36 Maaß heraus; so wäre:

$$lx = l108 = 2{,}0334238$$

$$lv = l\ 32 = 1{,}5051500$$

$$lx - lv = 0{,}5282738$$

$$lx = 2{,}0334238$$

$$l(x - m) = l(108 - 36) = l72 = 1{,}8573325$$

$$lx - l(x - m) = 0{,}1760913$$ folglich

$$\frac{0{,}5282738}{0{,}1760913} = 3\text{mal} = n.$$

Käme ein Bruch oder vermischte Zahl heraus, so müßte nicht das ganze m, sondern nur ein Theil davon nach Maaßgabe des Bruchs, herausgelassen werden.

Zusatz 3.

§. 233.

Wäre alles, wie im §. 232. und man wollte finden, wie viel auf einmal herauszulassen seye, so setze man:

$$(x - m)^n = vx^{n-1}$$

$$(\sqrt[n]{\ })$$

$$x - m = \sqrt[n]{vx^{n-1}}$$

$$x - \sqrt[n]{vx^{n-1}} = m$$

Es seye alles, wie im vorhergehenden §., so ist

$$m = 108 - \sqrt[3]{32 \times 108^2} = 36.$$

Anmerkung.

§. 234.

Auf eben diese Art verfährt man, wenn von einem Stück Silber ein Stück etlichemale abgeschnitten, und mit Kupfer ersetzt wird.

Es sey Silber $= x$; man schneide ab $m = 4$ und zwar $n$mal $= 9$mal. Am Ende sey: Kupfer zu Silber wie $37 : 27$; so ist $x = 16$ und dabey $6\,\frac{3}{4}$ Silber und $9\,\frac{1}{4}$ Kupfer.

Prüfung.

$$\frac{37 : 27 = 9\tfrac{1}{4} : 6\tfrac{3}{4}}{37 : 27 = 37 \ : 27}$$

Aufgabe 79.

§. 235.

Wenn man ein Kapital hat, davon der Zins zum jährlichen Unterhalt nicht zureicht, sondern jährlich vom Kapital etwas zugeschossen werden muß; zu finden, wann das Kapital aufgezehrt wird.

Auflösung.

Das Kapital sey $= a$; der Zins $= \frac{n}{m}$; der Zuschuß am Ende des 1sten Jahres $= b$; die Zahl der Jahre $= x$; so ist klar, daß, da das Kapital mit Schluß des Jahres um die Größe b weniger wurde, es auch um $\frac{bn}{m}$ weniger Zins trage, folglich zu Ende des 2ten Jahres, über b noch $\frac{bn}{m}$ müsse zugeschossen werden. Daher ist der Zuschuß mit Ende des 2ten Jahres $= b + \frac{bn}{m} = \frac{b\,(m + n)}{m}$. Hieraus folgt dieß Verhältniß: Wer 1 Jahr b zuschießt, muß das andere $\frac{b(m+n)}{m}$ zuschießen.

$$b : \frac{b\,(m + n)}{m} \text{ oder } 1 : \frac{m + n}{m}$$