Jak. Frid. Malers weil. Hochfürstl. Markgräfl. Bad. Kirchenraths und Rectors des Gymnasii Jllustris Algebra zum Gebrauch hoher und niederer Schulen

Maler, Jakob Friedrich

Carlsruhe, 1821

Aufgabe 77

urn:nbn:de:bsz:31-266447

den mittlern noch gleich seye (§. 127.); oder auch, ob der Exponent der beyden ersten dem Exponenten der beyden letzten noch gleich seye. Ist's so, so habt ihr noch eine Proportion; wo nicht, so ist's auch keine Proportion mehr.

1) Durch *Versetzung*, und zwar:

a) der mittlern Glieder.

$$\begin{array}{c} a : am = b : bm \\ \hline a : b = am : bm \end{array} \qquad \begin{array}{c} 2 : 4 = 3 : 6 \\ \hline 2 : 3 = 4 : 6 \end{array}$$

b) der äußern Glieder.

$$\begin{array}{c} a : am = b : bm \\ \hline bm : am = b : a \end{array} \qquad \begin{array}{c} 2 : 4 = 3 : 6 \\ \hline 6 : 4 = 3 : 2 \end{array}$$

2) Durch *Umkehrung* beyder Verhältnisse.

$$\begin{array}{c} a : am = b : bm \\ \hline am : a = bm : b \end{array} \qquad \begin{array}{c} 2 : 4 = 3 : 6 \\ \hline 4 : 2 = 6 : 3 \end{array}$$

3) Durch *Zusammensetzung* eines äußern und mittlern Glieds.

$$\begin{array}{c} a : am = b : bm \\ \hline a + am : a = b + bm : b \\ a + am : am = b + bm : bm \\ a + b : a = am + bm : am \\ a + b : b = am + bm : bm \end{array} \qquad \begin{array}{c} 2 : 4 = 3 : 6 \\ \hline 6 : 2 = 9 : 3 \\ 6 : 4 = 9 : 6 \\ 5 : 2 = 10 : 4 \\ 5 : 3 = 10 : 6 \end{array}$$

4) Durch *Trennung* eines äußern und mittlern Glieds.

$$\begin{array}{c} a : am = b : bm \\ \hline am - a : a = bm - b : b \\ am - a : am = bm - b : bm \\ b - a : a = bm - am : am \\ b - a : b = bm - am : bm \end{array} \qquad \begin{array}{c} 2 : 4 = 3 : 6 \\ \hline 2 : 2 = 3 : 3 \\ 2 : 4 = 3 : 6 \\ 1 : 2 = 2 : 4 \\ 1 : 3 = 2 : 6 \end{array}$$

5) Durch *Erhebung* aller Glieder zu *einerley Dignität*

$$\begin{array}{c} a : am = b : bm \\ \hline a^n : (am)^n = b^n : (bm)^n \end{array} \qquad \begin{array}{c} 2 : 4 = 3 : 6 \\ \hline 8 : 64 = 27 : 216 \end{array}$$

6) Durch *Ausziehung einerley Wurzel* aus allen Gliedern.

$$\begin{array}{c} a : am = b : bm \\ \hline \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{am} = \sqrt[n]{b} : \sqrt[n]{bm} \end{array} \qquad \begin{array}{c} 2 : 4 = 3 : 6 \\ \hline \sqrt{2} : \sqrt{4} = \sqrt{3} : \sqrt{6} \end{array}$$

7) Durch Multiplikation eines äußern und mittlern Glieds mit einerley Größe.

$$\begin{array}{llll} a : am = b : bm & & & 2 : 4 = 3 : 6 \\ \hline ac : amc = b : bm & & & 4 : 8 = 3 : 6 \\ ac : am = bc : bm & & & 4 : 4 = 6 : 6 \\ a : amc = b : bmc & & & 2 : 8 = 3 : 12 \\ a : am = bc : bmc & & & 2 : 4 = 6 : 12 \end{array}$$

8) Durch Division eines äußern und mittlern Glieds mit einerley Größe.

$$\begin{array}{llll} a : am = b : bm & & & 2 : 4 = 3 : 6 \\ \hline \frac{a}{c} : \frac{am}{c} = b : bm & & & 1 : 2 = 3 : 6 \\ \frac{a}{c} : am = \frac{b}{c} : bm & & & 1 : 4 = 3/2 : 6 \\ a : \frac{am}{c} = b : \frac{bm}{c} & & & 2 : 2 = 3 : 3 \\ a : am = \frac{b}{c} : \frac{bm}{c} & & & 2 : 4 = 3/2 : 3 \end{array}$$

9) Durch Multiplikation zweyer (oder auch mehrerer) Proportionen in einander.

$$\begin{array}{llll} a : am = b : bm & & & 2 : 4 = 3 : 6 \\ c : cn = d : dn & & & 5 : 15 = 4 : 12 \\ \hline ac : amcn = bd : bmdn & & & 10 : 60 = 12 : 72 \end{array}$$

Anmerk. 1. Ist hierbey ein äußeres und ein inneres Glied der einen Proportion einem äußern und einem innern Glied der andern Proportion gleich, so kann man die neue Proportion sogleich geschmeidiger erhalten, wenn man jene gleichen Glieder wegläßt, und die 4 übrigen Glieder ordentlich genommen in Proportion setzt.

$$\begin{array}{llll} a : b = c : d & & & 2 : 4 = 3 : 6 \\ b : v = d : r & & & 4 : 16 = 6 : 24 \\ \hline a : v = c : r & & & 2 : 16 = 3 : 24 \end{array}$$

Anmerk. 2. Sind dagegen die beyden äußern Glieder der einen Proportion den beyden äußern Gliedern der andern, oder die beyden innern Glieder der einen den beyden innern Gliedern der andern, oder auch die beyden äußern Glieder der einen den beyden innern Gliedern der andern gleich; so kann man zwar auch jene gleichen Glieder weglassen, muß aber die übrigen 4 Glieder verkehrt genommen in Proportion setzen.

$$\begin{array}{c} a : b = c : d \\ a : m = n : d \\ \hline b : m = n : c \end{array} \qquad \begin{array}{c} 3 : 6 = 4 : 8 \\ 3 : 12 = 2 : 8 \\ \hline 6 : 12 = 2 : 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} a : b = c : d \\ r : b = c : q \\ \hline a : r = q : d \end{array} \qquad \begin{array}{c} 7 : 14 = 2 : 4 \\ 1 : 14 = 2 : 28 \\ \hline 7 : 1 = 28 : 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} a : b = c : d \\ b : u = v : c \\ \hline a : u = v : d \end{array} \qquad \begin{array}{c} 3 : 15 = 2 : 10 \\ 15 : 5 = 6 : 2 \\ \hline 3 : 5 = 6 : 10 \end{array}$$

Anmerk. 3. Die Richtigkeit des Verfahrens in Anmerk. 1. erhellt daraus, weil man ja bey der neuen Proportion je ein äußeres und ein mittleres Glied mit einerley Größe dividiren, diese Division aber auch zum Voraus verrichten darf. — Dieselbe Bewandtniß hat es beym 3ten Fall in Anmerk. 2, und der 1ste und 2te Fall daselbst lassen sich durch Umkehrung der Verhältnisse leicht auf jenen 3ten Fall reduciren, nämlich:

$$\left.\begin{array}{c} a : b = c : d \\ a : m = n : c \\ \hline b : m = n : c \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} b : a = d : c \\ a : m = n : c \\ \hline b : m = n : c \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{c} a : b = c : d \\ r : b = c : q \\ \hline a : r = q : d \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} a : b = c : d \\ b : r = q : c \\ \hline a : r = q : d \end{array}\right.$$

10) Durch Division zweyer Proportionen in einander.

$$\begin{array}{c} a : am = b : bm \\ c : cn = d : dn \\ \hline \frac{a}{c} : \frac{am}{cn} = \frac{b}{d} : \frac{bm}{dn} \end{array} \qquad \begin{array}{c} 2 : 4 = 3 : 6 \\ 5 : 15 = 4 : 12 \\ \hline \frac{2}{5} : \frac{4}{15} = \frac{3}{4} : \frac{6}{12} \end{array}$$

Anmerkung.

§. 229.

Man hat Ursache, die Eigenschaften der geometrischen Proportion sich voll bekannt zu machen, weil die Proportion wegen ihrem vielfältigen Nutzen die Seele der Mathematik ist. Wir haben aber die Lehre derselben bisher verspahrt, weil wir noch wenig Gelegenheit hatten, ihren Nutzen zu zeigen; und ohne solches werden die wichtigsten Wahrheiten von Anfängern oft geringe geschätzt, und vernachläßigt.

Aufgabe 78.

§. 230.

Wenn ein Gefäß voll Wein ist, und aus demselben eine gewisse Menge herausgelassen, mit so viel Wasser wieder angefüllt, und dieß etlichemal wiederholt wird, aus dem Verhältniß des noch übrigen Weins zum Wasser, den Inhalt des Gefäßes zu finden.

Auflösung.

Das Gefäß halte . . . . $= x$
Es werde herausgelassen . . . . $= m$
Dieß sey geschehen . . . . $= n$ mal
Das Verhältniß des Wassers zum Wein seye $= a : v$

Wird das erstemal Wein $= m$ herausgelassen, und mit Wasser angefüllt, so bleibt an Wein übrig $x - m$; und das ganze Gefäß verhält sich zum übrigen Wein $= x : x - m$. Wird wieder $= m$ herausgelassen, so läuft Wasser und Wein nach Proportion heraus; nämlich um so viel jetzt weniger Wein im Gefäß ist, als von Anfang darinnen war, um so viel weniger läuft auch heraus. Also verhält sich wie das ganze Gefäß zum erstmaligen Rest des Weins, so dieser Rest zum Rest nach der 2ten Ablassung der Größe m. Oder

$$x : x - m = x - m : \frac{(x - m)^2}{x}$$

Deßgleichen beym dritten Herauslassen ist

$$x : x - m = \frac{(x - m)^2}{x} : \frac{(x - m)^3}{x^2}$$

Und so geht es weiter fort, bis endlich der letzte Wein-Rest $= \frac{(x - m)^n}{x^{n-1}}$, und das Wasser $= x - \frac{(x - m)^n}{x^{n-1}}$

Daher ist

Werth aus, wie viel zu bezahlen wäre, wenn die Zahlung baar geschehen sollte.

Das in 5 Jahrs-Terminen zu zahlende Kapital seye 800 fl. so ist:

$a = 160$ fl.

$r = 5$

$\frac{n}{m} = 1/20$ und $\frac{a[(m+n)^r - m^r]}{n(m+n)^{r-1}} = \frac{160(884101)}{194481}$

$(m+n)^r = 21^5 = 4084101$

$m^r = 20^5 = 3200000$ $= 727$ fl. 21 kr. $32372/64827$ d.

$r - 1 = 4$

$(m+n)^{r-1} = 21^4 = 194481$

Zusatz 3.

§. 227.

Sollte erst nach Verfluß des 1sten Jahres der 1ste Termin bezahlt werden, so würde für den ersten $\frac{am}{m+n}$ und für den letzten $\frac{am^r}{(m+n)^r}$ zu bezahlen seyn. Ein Glied weiter als das größte wäre $= a$ und beyder Differenz $= a - \frac{am^r}{(m+n)^r}$ $= \frac{a[(m+n)^r - m^r]}{(m+n)^r}$ dieß mit $\frac{n}{m}$ dividirt gibt $\frac{am[(m+n)^r - m^r]}{n(m+n)^r}$, welches die Formel für diesen Fall ist.

Es seye alles wie §. 226, so ist

$am = 3200$ und $\frac{am[(m+n)^r - m^r]}{n(m+n)^r} = \frac{3200 \times 884101}{4084101} =$
$= 692$ fl. 42 kr. 3 d. +

Aufgabe 77.

§. 228.

Zu finden, auf wie vielerley Art die Glieder einer geometrischen Proportion verändert werden können, daß sie dennoch proportional bleiben.

Auflösung.

Verändert sie auf alle mögliche Weise, und untersucht, ob das Produkt der beyden äußern Glieder dem Produkt der bey-