Jak. Frid. Malers weil. Hochfürstl. Markgräfl. Bad. Kirchenraths und Rectors des Gymnasii Jllustris Algebra zum Gebrauch hoher und niederer Schulen

Maler, Jakob Friedrich

Carlsruhe, 1821

Aufgabe 75

urn:nbn:de:bsz:31-266447

Es seye $a = 2522$: so ist $x = \frac{400 \times 2522}{1261} = \frac{1008800}{1261}$ $= 800$; und weil $y = \frac{21x}{20}$, so ist $y = \frac{21 \times 800}{20} = \frac{16800}{20}$ $= 840$; folglich im dritten Jahre $= 2522 - (800 + 840)$ $= 882$.

Prüfung.

1 Jahr 800 + Zins vom Ganzen 126 fl. 6 kr. = 926 fl. 6 kr.
2 „ „ 840 + „ „ „ „ „ 1722; 86 fl. 6 kr. = 926 fl. 6 kr.
3 „ „ 882 + „ „ „ „ „ 882; 44 fl. 6 kr. = 926 fl. 6 kr.

Aufgabe 75.

§. 220.

Vorhergehende Aufgabe allgemein aufzulösen.

Auflösung.

Das Kapital sey $= a$; der Zins vom Kapital $= \frac{n}{m}$

Das 1ste Jahr werde bezahlt „ „ $= x$
2te „ „ „ „ „ „ „ „ „ „ $= y$
3te „ „ „ „ „ „ „ „ „ „ $= z$
4te „ „ „ „ „ „ „ „ „ „ $= v$
5te „ „ „ „ „ „ „ „ „ „ $= q$ ꝛc.

Es wird demnach bezahlt

Im 1sten Jahre $x + \frac{an}{m} = \frac{mx + an}{m}$

2ten „ „ $y + \frac{(a-x)n}{m} = \frac{my + an - nx}{m}$

3ten „ „ $z + \frac{(a-x-y)n}{m} = \frac{mz + an - nx - ny}{m}$

4ten „ „ $v + \frac{(a-x-y-z)n}{m} = \frac{mv + an - nx - ny - nz}{m}$

5ten „ „ $q + \frac{(a-x-y-z-v)n}{m} = \frac{mq + an - nx - ny - nz - nv}{m}$

Daher ist

$$\frac{mx + an}{m} = \frac{my + an - nx}{m}$$

$$mx + an = my + an - nx$$

$$mx + nx = my$$

$$\frac{(m + n)x}{m} = y$$

Ferner ist $my + an - nx = mz + an - nx - ny$.

$$my + ny = mz$$

$$\frac{(m + n)y}{m} = z$$

Deßgleichen $mz + an - nx - ny = mv + an - nx - ny - nz$

$$mz + nz = mv$$

$$\frac{[m + n]z}{m} = v$$

Eben so

$$mv + an - nx - ny - nz = mq + an - nx - ny - nz - nv$$

$$mv + nv = mq$$

$$\frac{(m + n)v}{m} = q$$

Hieraus ist klar, daß in sämmtlichen Jahren nach einander am Kapital abgetragen werde:

1) $x = x$ . . . . $= x \times 1$

2) $y = x \times \frac{[m + n]}{m}$ . . $= x \times \frac{(m + n)}{m}$

3) $z = y \times \frac{m + n}{m}$ . . $= x \times \frac{(m + n)^2}{m^2}$

4) $v = z \times \frac{m + n}{m}$ . . $= x \times \frac{(m + n)^3}{m^3}$

5) $q = v \times \frac{m + n}{m}$ . . $= x \times \frac{(m + n)^4}{m^4}$

Denn $y = x \times \frac{m + n}{m}$, folglich $z = x \times \left(\frac{m + n}{m}\right) \times \left(\frac{(m + n)}{m}\right) = x \times \frac{[m + n]^2}{m^2}$ rc. Und da eine jede Zahlung $\frac{m + n}{m}$ von der vorjährigen Zahlung ist, das ist $1 + \frac{n}{m}$; so kann, wenn die erste Zahlungs-Summe gefunden worden ist, die folgende gefunden werden, wenn nur der Zins der vorigen, $\frac{n}{m}$, zu ihr addirt wird.

Nicht weniger zeigt sich, daß alle Zahlungs-Termine zusammen genommen eine geometrische Progreßion ausmachen, deren erstes Glied = 1, deren Exponent = $\frac{m + n}{m}$, und die Zahl der Glieder so groß als die Zahl der Termine ist, wenn vorhin die Progreßion mit x multiplicirt wurde. Man nenne einstweilen die Summe dieser Progreßion p; so sind alle Zahlungen zusammen genommen = px; da aber dieß die ganze zu bezahlende Summe ausmacht, so ist px = a; und $x = \frac{a}{p}$. Woraus sich folgende Regeln ergeben:

1) Das Interesse ist ein Bruch vom Kapital, z. B. $\frac{1}{20}$, wenn man 5 pro Cent gibt; $\frac{3}{50}$ bei 6 pro Cent ꝛc. Addirt dieses Bruchs Nenner und Zähler, und setzt den Nenner bruchsweise darunter, z. B. $\frac{21}{20}$; $\frac{53}{50}$ ꝛc. so habt ihr den Exponenten zur folgenden Progreßion.

2) Summirt eine geometrische Progreßion, deren erstes Glied 1; der Exponent der in No. 1. gefundene Bruch und die Zahl der Glieder = der gegebenen Anzahl von Jahren.

3) Diese Summe dividirt in's gegebene Kapital, so habt ihr, was im 1sten Jahre zu bezahlen ist.

4) Addirt den Zins des 1sten Termins zum ersten, so habt ihr den 2ten; deßgleichen den Zins des 2ten zum zweyten, so habt ihr den 3ten ꝛc.

5) Rechnet immer den Zins vom noch stehen gebliebenen Kapital dazu.

Z. B. 68962 fl. sollen auf 4 Jahre sammt dem Zins zu 5 pro Cent bezahlt werden, so ist die Progreßion: $1 + \frac{21}{20} + \frac{441}{400} + \frac{9261}{8000} = \frac{34481}{8000}$. Diese Summe in 68962 dividirt gibt 16000, hiezu addirt den Zins 800 gibt 16800 für's 2te Jahr. Hiezu den Zins 840 = 17640 für's 3te Jahr. Hiezu den Zins 882 = 18522 für's 4te Jahr. Also

1) 16000 + Zs. vom Ganzen 3448 fl. 6 kr. = 19448 fl. 6 kr.
2) 16800 + Zs. von 52962; 2648 fl. 6 kr. = 19448 fl. 6 kr.
3) 17640 + Zs. von 36162; 1808 fl. 6 kr. = 19448 fl. 6 kr.
4) 18522 + Zs. von 18522; 926 fl. 6 kr. = 19448 fl. 6 kr.

68962

Zusatz 1.

§. 221.

Setzt die Zahl der Jahre = v; so ist das letzte Glied = $\frac{(m+n)^{v-1}}{m^{v-1}}$ und der Exponent weniger 1 = $\frac{m+n}{m} - 1 =$ $\frac{n}{m}$; daher die Summe der Progreßion $= \left(\frac{(m+n)^v}{m^v} - 1\right) :$ $\frac{n}{m} = \frac{m(m+n)^v}{nm^v} - \frac{m}{n}$.

Folglich ist:

$$\frac{xm(m+n)^v}{nm^v} - \frac{xm}{n} = a, \text{ indem } px = a$$

$$xm(m+n)^v - xm^{v+1} = anm^v$$

$$x = \frac{anm^v}{m(m+n)^v - m^{v+1}} \quad (: m$$

$$x = \frac{anm^{v-1}}{(m+n)^v - m^v}$$

In dieser Formel wäre also nach der in §. 220. vorgetragenen Aufgabe: $v = 4$; $\frac{n}{m} = \frac{1}{20}$; $a = 68962$ und

$$\frac{anm^{v-1}}{(m+n)^v - m^v} = \frac{68962 \times 8000}{34481} = 16000 = x.$$

Zusatz 2.

§. 222.

Wenn man den Zins des 1sten Jahres = $\frac{an}{m}$ dazu addirt, so erhält man, was jedes Jahr überhaupt zu bezahlen ist, nämlich $\frac{anm^{v-1}}{(m+n)^v - m^v} + \frac{an}{m} = \frac{anm^v + an(m+n)^v - anm^v}{m(m+n)^v - m^{v+1}}$ $= \frac{an(m+n)^v}{m(m+n)^v - m^{v+1}}$. Das ist: Das Interesse vom ganzen Kapital wird mit $(m+n)^v$ multiplicirt, und mit $(m+n)^v - m^{v+1}$ dividirt.

Nun seye wie vor

$a = 68962$

$\frac{n}{m} = \frac{1}{20}$.

$v = 4$, so wäre die jährliche Zahlung $= \frac{194481 \,.\, 68962}{689620} =$

$$= \frac{194481 \,.\, 1}{10} = 19448 \tfrac{1}{10} \text{ fl.}$$

$$= 19448 \text{ fl. } 6 \text{ kr.}$$

Zusatz 3.

§. 223.

Müßte einer ein Kapital baar bezahlen, und es wäre sowohl dem Gläubiger als Schuldner bequem, wenn es in etlichen Terminen geschähe, und zwar jedesmal mit gleicher Summe sammt dem Zins; so würde die Formel (§. 222.) die Summe bestimmen.

Aufgabe 76.

§. 224.

Eine Regel zur Rabbat-Rechnung zu finden, das ist: Wenn ein Kapital erst nach einigen Jahren ohne Zins zu bezahlen wäre, wie viel jetzt baar bezahlt werden müßte.

Auflösung.

Das Kapital sey $= a$; der Zins ein Bruch vom Kapital $= \frac{n}{m}$; die Zahl der Jahre $= r$; die baar zu bezahlende Summe $= x$; so würde, weil $\frac{n}{m}$ ein Bruch vom ganzen Kapital ist, das Kapital nach Verlauf Eines Jahres, wenn es 1 wäre, seyn $= 1 + \frac{n}{m} = \frac{m+n}{m}$. Ist aber das Kapital $= x$; so wird man, nach der Regel de Tri, mit Verfluß des Jahres davon haben $x \times \frac{m+n}{m}$; denn man würde sprechen müssen: 1 gibt $\frac{m+n}{m}$, was gibt x?