Jak. Frid. Malers weil. Hochfürstl. Markgräfl. Bad. Kirchenraths und Rectors des Gymnasii Jllustris Algebra zum Gebrauch hoher und niederer Schulen

Maler, Jakob Friedrich

Carlsruhe, 1821

Aufgabe 70

urn:nbn:de:bsz:31-266447

kurzen Zeit kleiner als jede angebliche Größe wird, so muß man wohl zugeben, daß er sie erreiche.

Man setze die erste Entfernung A S z. B. eine Meile und nenne sie $= 1$; weil S T, T V, V W ꝛc. immer die folgende Entfernung 100mal kleiner wird, als die vorhergehende; so machen diese Entfernungen nachstehende Reihe aus: $1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{10000} + \frac{1}{1000000} \ldots$ in welcher nach §. 197. $a = 1$, $b = c = 1$; und $d = 100$. Man stelle sich also diese Reihe unendlich fortgesetzt vor, so ist ihre Summe nach dem Ausdruck am Ende des §. 197. $= \frac{1 \times 100}{1 \times (100-1)} = \frac{100}{99} = 1 + \frac{1}{99}$. Die Summe der Entfernungen also zwischen Achill und der Schildkröte, so viel ihrer auch seyn mögen, das ist der Weg, den Achill zurückzulegen hat, um die Schildkröte zu erreichen, beträgt nicht mehr als $1 + \frac{1}{99}$ Meilen, und wenn er also z. B. 1 Meile in 1 Stunde zurücklegt, so erreicht er in $1 + \frac{1}{99}$ Stunden die Schildkröte, die Eine Meile vor ihm voraus hatte.

So läßt sich dieser Einwurf gegen die Möglichkeit der Bewegung auflösen, den man sowohl wegen des zum Beyspiel gebrauchten Helden, als wegen der Stärke, die man darinnen zu finden glaubte, Zeno's Achilles genannt hat.

Aufgabe 70.

§. 202.

Eine Größe, die durch Einen Buchstaben ausgedruckt ist, mit einer Größe zu dividiren, die durch zwey Buchstaben ausgedrückt ist.

Auflösung.

Die Dividende sey $= a$; der Divisor $= b + c$

$$
\begin{array}{l|l}
a & b + c \\
\hline
a + \frac{ac}{b} & \frac{a}{b} - \frac{ac}{b^2} + \frac{ac^2}{b^3} - \frac{ac^3}{b^4} + \frac{ac^4}{b^5} \text{ rc.} \\
\hline
\quad - \frac{ac}{b} & \\
\quad - \frac{ac}{b} - \frac{ac^2}{b^2} & \\
\hline
\qquad + \frac{ac^2}{b^2} & \\
\qquad + \frac{ac^2}{b^2} + \frac{ac^3}{b^3} & \\
\hline
\qquad\qquad - \frac{ac^3}{b^3} & \\
\qquad\qquad - \frac{ac^3}{b^3} - \frac{ac}{b^4} & \\
\hline
\qquad\qquad\qquad + \frac{ac^4}{b^4} \text{ rc.} &
\end{array}
$$

Denn b in a dividirt gibt. $\frac{a}{b}$; diesen Quotienten mit dem Divisor $b + c$ multiplicirt, gibt $a + \frac{ac}{b}$; von der Dividende abgezogen bleibt $-\frac{ac}{b}$. Wird dieser Rest wieder mit b dividirt, so gibts $-\frac{ac}{b^2}$ und so weiter unendlich fort. Hieraus können ohne weiteres Dividiren alle Glieder des Quotienten nach einander gefunden werden; denn ein jeder Zähler ist ein Produkt aus der Dividende in die Dignität des 2ten Theils des Divisors, deren Exponent um 1 weniger ist, als Glieder sind; der Nenner aber die Dignität des 2ten Theils, deren Exponent der Zahl der Glieder gleich ist. Und die ungeraden Glieder haben + die geraden aber —.

Zusatz 1.

§. 203.

Man setze $a = 1$; $b = 2$; $c = 1$; so ist $\frac{a}{b} - \frac{ac}{b^2} + \frac{ac^2}{b^3}$ rc. rc. $= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64}$ rc. Da nun $\frac{a}{b+c} = \frac{1}{3}$, so sieht man, daß das 1ste Glied $= \frac{1}{2}$ zu viel ist, daher das folgende — $\frac{1}{4}$ abgezogen werden muß, welches $\frac{1}{4}$ gibt. Dieß ist wieder zu wenig; daher muß das folgende $= \frac{1}{8}$ addirt werden, welches $\frac{3}{8}$ gibt und wieder zu groß ist. Hieraus erhellt, daß, wenn man die Reihe bey ungeraden Gliedern endigt, immer etwas zu viel, bey den geraden aber immer etwas zu wenig heraus komme, der Fehler aber immer kleiner werde, und so klein werden kann, als man nur will; daß man folglich durch diese Reihe, wenn sie nur weit genug fortgesetzt wird, dem eigentlichen Quotienten so nahe kommen kann, als man nur will.

Zusatz 2.

§. 204.

Es gibt Fälle, wo nach diesem Ausdrucke einer unendlichen Reihe, dasjenige, was bey jedem Gliede zu viel oder zu wenig ist, immer einerley bleibt, wodurch man also der wahren Summe nicht näher kommt, folglich dieser Ausdruck unnütz wird. Es seye $a = 1$; $b = 1$; $c = 1$; so ist die Reihe: $1 - 1 + 1 - 1 + 1$ rc. Beym 1sten Glied ist $\frac{1}{2}$ zu viel, beym 2ten $\frac{1}{2}$ zu wenig rc., woraus klar, daß diejenigen falsch geurtheilt haben, welche behaupten: Eine unendliche Anzahl Nullen seyen $= \frac{1}{2}$, weil $1 - 1 = 0$ seye, und dieß $1 - 1$ unendlich fortgesetzt seye $= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$. Denn, wenn auch ihre Meynung einigen Schein haben sollte, so müßten sie zeigen können, daß die unendliche Anzahl der Glieder eine gerade Zahl seye; denn wäre sie ungerade, so würde $1 = \frac{1}{2}$ seyn. Dieser Ausdruck sagt also weiter nichts, als: Bey jedem Gliede ist einerley Mangel und wechselsweise entweder zu viel oder zu wenig.

Zusatz 3.

§. 205.

Ja, es gibt sogar Fälle, wo der Fehler nicht nur immer gleich, sondern gar größer wird, wodurch der Ausdruck noch unbrauchbarer werden muß. Z. B. es seye $a = 1$; $b = 1$; $c = 2$; so ist $1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64$ rc.

Zusatz 4.

§. 206.

Hieraus erhellt, daß, wenn b nicht größer als c angenommen wird, dieser Ausdruck durchaus unnütz werde. Denn man setze $b = c$; so werden alle Glieder $\frac{a}{c}$ und es würde eben das erfolgen, was in §. 204 erfolgt. Setzt man $b < c$ und das, um wie vielmal c größer ist, $= m$; so ist $bm = c$. Wird nun dieß in die Reihe gesetzt, so kommt $\frac{a}{b} - \frac{am}{b} + \frac{am^2}{b} - \frac{am^3}{b}$ ꝛc. welches anzeigt, daß der Fehler immer größer werde, und daher die Reihe von der wahren Zahl immer weiter abweiche, wie in §. 205.

Logarithmen-Lehre.

Zehnte Erklärung.

§. 207.

Wenn eine geometrische Progression von 1 anfängt, und eine arithmetische von 0; so werden der letztern Glieder die Logarithmen der Glieder in der ersten, mit denen sie übereinstimmen, genannt.

Anmerkung.

§. 208.

Die beyden Reihen seyen:

1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. ꝛc.
0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. ꝛc.

Hier ist 0 Logarithme von 1; 1 Logarithme von 2; 3 Logarithme von 8; 6 Logarithme von 64 ꝛc. Aus der Erklärung erhellt, daß es einerley sey, was für ein Exponent und Differenz in beyden Progressionen angenommen wird; sie sind nicht nothwendig 2 und 1.

Aufgabe 71.

§. 209.

Die Eigenschaften der Logarithmen zu untersuchen.