# Jak. Frid. Malers weil. Hochfürstl. Markgräfl. Bad. Kirchenraths und Rectors des Gymnasii Jllustris Algebra zum Gebrauch hoher und niederer Schulen

Maler, Jakob Friedrich

Carlsruhe, 1821

Aufgabe 69

urn:nbn:de:bsz:31-266447

reimtheiten zu vermeiden, muß man sich die Sache auf die angezeigte Art deutlich vorstellen; und wenn man von einem letzten Gliede, das als Nichts angesehen wird, redet, dergleichen Ausdrücke nur als Abkürzungen der vorigen Schlüsse ansehen. Diese Erinnerung ist deßwegen wichtig, weil gegenwärtige Aufgabe schon als etwas, das zur Rechnung des Unendlichen gehört, betrachtet werden kann, und gehörige Begriffe von ihr bey dieser Rechnung Dienste leisten können.

## Aufgabe 69.

### §. 197.

**Eine unendliche geometrische Reihe, deren Exponent ein Bruch ist, zu summiren.**

### Auflösung.

Das erste Glied sey $\frac{a}{b}$, wo a und b ganze Zahlen bedeuten, und also das erste Glied eine ganze Zahl ist, wenn $b=1$. Es sollen ferner c und d ganze Zahlen bedeuten, und der Exponent $\frac{c}{d}$ seyn. Dann ist die Progression: $\frac{a}{b} + \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \times \frac{c^2}{d^2} + \frac{a}{b} \times \frac{c^3}{d^3}$ rc. Jedes Glied enthält nämlich $\frac{a}{b}$ in eine Potenz von $\frac{c}{d}$ multiplicirt, deren Exponent um 1 weniger ist, als die Zahl des Gliedes; das $n+1$ste Glied ist also $\frac{a}{b} \times \frac{c^n}{d^n}$. Z. B. das 101te Glied wäre $\frac{a}{b} \times \frac{c^{100}}{d^{100}}$. Eben so ist das nte Glied: $\frac{a}{b} \times \frac{c^{n-1}}{d^{n-1}}$. Wenn man nun die Summe von n Gliedern finden wollte, so würde man nach §. 193. folgender Gestalt verfahren. Das nte Glied wäre, was im §. 193. das letzte, und das $n+1$ste, was dorten Eins weiter als das letzte heißt. Also hieße

a oder das erste Glied im §. 193. hier $\frac{a}{b}$

m oder der Exponent im §. 193. hier $\frac{c}{d}$

n aber wäre dorten und hier einerley.

Wenn man nun die dorten gefundene Summe nach dem Ausdrucke braucht, der im §. 195. zuletzt gegeben wurde, so wird sie hier

$$\frac{\frac{a}{b} \times \left[1 - \left(\frac{c}{d}\right)^n\right]}{1 - \frac{c}{d}}$$

Es sey z. B. a = 1; b = 10; c = 1; d = 10; n = 5. Oder man suche die Summe folgender fünf Brüche: $\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + \frac{1}{100000}$; so findet sie sich

$$\frac{\frac{1}{10} \times \left(1 - \frac{1}{100000}\right)}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{1}{10} \times \frac{99999}{100000}}{\frac{9}{10}} = \frac{\frac{99999}{1000000}}{\frac{9}{10}} =$$

$$\frac{999990}{9000000} = \frac{11111}{100000}.$$

Da nun die Reihe, so weit man will, ohne Ende fortgesetzt werden kann, so wird $\left(\frac{c}{d}\right)^n$ immer kleiner und kleiner, je größer n wird, und kann so klein werden, als man will, wenn man nur n groß genug annimmt. Also läßt sich wieder die Reihe immer so weit fortsetzen, daß $1 - \left(\frac{c}{d}\right)^n$ so wenig als man will, von der 1 unterschieden ist, und man kann daher in der Bedeutung, die im vorigen §. weitläuftig erklärt wurde, auch hier sagen: Die so weit als möglich fortgesetzte oder unendliche Reihe habe zur Summe $\frac{\frac{a}{b} \times 1}{1 - \frac{c}{d}}$.

Dieser Ausdruck verwandelt sich nach den gewöhnlichen Ausdrücken, Brüche zu ändern, in folgende: Man multiplicire, was oben und unten steht, mit d, so wird er $\frac{\frac{a}{b} \times d}{d - c}$; und nun multiplicire man, was oben und unten steht, mit b; so wird er $\frac{ad}{b \times (d - c)} = \frac{ad}{bd - bc}$.

## Zusatz 1.

§. 198.

Wenn a = c; b = d; folglich die Reihe $\frac{a}{b} + \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^3}{b^3}$ ꝛc. ꝛc. so ist in dieser unendlichen Reihe die Summe $\frac{a \times b}{b\,(b - a)} = \frac{a}{b - a}$. Ist also noch über dieß a = 1; so ist die Summe $\frac{1}{b - 1}$. Dieser letzte Ausdruck enthält also, nachdem man, statt b, immer eine andere ganze Zahl setzt, die Summen unzähliger solcher unendlichen Reihen. Es seye

$$\begin{array}{lll} b = 2 \text{ so ist} & \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \ \ldots & = 1 \\ \ \ = 3 & \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} \ \ldots & = \frac{1}{2} \\ \ \ = 4 & \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} \ \ldots & = \frac{1}{3} \\ \ \ = 6 & \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} \ \ldots & = \frac{1}{4} \end{array}$$

woraus man die Beschaffenheit dieser Summen leicht einsehen wird. Die Punkte hinter den Reihen bedeuten, daß man nach den angegebenen drey ersten Gliedern jeder Reihe sich noch unzählig viele denken, oder daß man sich die Reihe unendlich vorstellen müsse. Wäre a = 2; b = 5; c = 3; d = 4; folglich die Reihe $\frac{2}{5} + \frac{2 \times 3}{5 \times 4} + \frac{2 \times 9}{5 \times 16} + \frac{2 \times 27}{5 \times 64} \ldots$ so fände sich aus dem allgemeinen Ausdrucke am Ende des (§. 197.) ihre Summe $= \frac{2 \times 4}{5\,(4 - 3)} = \frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}$. Je mehr Glieder dieser Reihe man wirklich berechnete, und zusammen addirte, desto näher würde man der wirklichen Summe kommen.

Ist a = 3; b = 1; c = 2; d = 7; so entsteht die Reihe: $3 + \frac{3 \times 2}{7} + \frac{3 \times 4}{49} + \frac{3 \times 8}{343} \ldots$ und deren Summe auf die eben gezeigte Art $= \frac{3 \times 7}{1\,(7 - 2)} = \frac{21}{5} = 4\frac{1}{5}$. Und so kann man dergleichen Reihen, so viel man will, erdenken, und auf diese Art summiren.

Von der Richtigkeit der gefundenen Summenformel für unendlich abnehmende Reihen kann man sich auch durch folgende Aufgabe überzeugen:

> Man will von Basel 600 fl. postfrey nach Leipzig schicken. Sie können aber in Basel nicht frankirt, sondern das Porto muß beygelegt werden. Wie viel muß man beylegen, wenn der Gulden 3 kr. kostet?

Diese Aufgabe läßt sich auf eine gedoppelte Art auflösen. Einmal als eine gewöhnliche Proportional-Aufgabe, indem man nach der Regel de Tri spricht: damit 57 kr. in Leipzig erhalten werden, muß ich 60 kr. oder 1 fl. schicken; wie viel, damit 600 fl. daselbst nach Abzug des Postgeldes übrig bleiben? Dann aber auch als eine Progressional-Aufgabe, in welcher eine unendlich abnehmende Reihe summirt werden muß, deren erstes Glied = dem Porto von 600 fl., das zweyte = dem Porto vom ersten Porto, das dritte = dem Porto vom zweyten Porto 2c. ist.

### Erste Auflösung.

57 kr. : 60 kr. = 600 fl.)

$$\begin{array}{r|l} 6\;\;0 & \\ \hline 36000 & 57 \\ \cline{2-2} 342 & 631\ \tfrac{33}{57}\ \text{fl.} \\ \hline 180 & \\ 171 & \\ \hline 90 & \\ 57 & \\ \hline \tfrac{33}{57}\ \text{fl.} & \end{array}$$

Das Porto allein beträgt mithin $31\ \tfrac{33}{57}$. fl.

### Zweyte Auflösung.

Es ist

$$\frac{a}{b} = \frac{600}{20} \text{ fl. (weil 3 kr.} = \frac{1}{20} \text{ fl.}$$

$$\frac{c}{d} = \frac{1}{20}$$

$$\text{folglich } s = \frac{600.20}{400 - 20} = \frac{12000}{380} \text{ fl.}$$

$$\begin{array}{r|l} 1200|0 & 38|0 \\ \cline{2-2} 114 & 31\ \tfrac{22}{38}\ \text{fl.} = 31\ \tfrac{33}{57}\ \text{fl.} \\ \hline 60 & \\ 38 & \\ \hline \tfrac{22}{38} & \end{array}$$

## Zusatz 2.

§. 199.

Wäre d = c; so hätte man folgende Reihe zu summiren: $\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{a}{b}$ ꝛc. Das heißt: Einerley Größe, es mag nun eine ganze Zahl oder ein Bruch seyn, zu wiederholtenmalen zu sich selbst zu addiren. Die Summe einer gewissen Menge solcher gleichen Größen ist ohne Zweifel so viel, als eine dieser Größen so viel mal genommen, als ihrer sind. Z. B. die Summe von 10 dergleichen ist $= 10 \times \frac{a}{b}$. Stellt man sich also diese Reihe unendlich vor, das ist, stellt man sich $\frac{a}{b}$ unzählig vielmal vor, so ist klar, daß diese Summe größer werden muß, als jede Größe, die man angeben kann, so klein man auch $\frac{a}{b}$ setzt, wenn man es nur von einer Größe annimmt, die sich angeben läßt. Denn wäre z. B. $\frac{a}{b} = 1/1000000$, und man stellt sich diesen so kleinen Bruch eine Million mal nacheinander vor, so würde die Summe einer solchen Reihe 1, und also in Vergleichung mit $1/1000000$ schon sehr groß seyn.

Wenn man sich also diese Reihe lauter gleicher Größen, so weit man will, fortgesetzt vorstellen darf, so kann immer ihre Summe jede Größe, so groß als man die letztere auch annimmt, übersteigen. Sie kann im vorigen Beyspiele nicht nur größer als 1, sondern auch größer als eine Billion, oder jede andere noch so groß angenommene Zahl werden, und dieß drückt man so aus, Die Summe unzählig vieler gleicher Größen, oder das Vielfache einer gegebenen Größe durch eine unendlich große Zahl, ist unendlich groß.

Für d = c wird der Ausdruck der Summe am Ende des §. 197. $\frac{ad}{b \times (c-c)} = \frac{ad}{b \times 0} = \frac{ad}{0}$. Ein solcher Quotient, dessen Dividende eine gegebene Größe, der Divisor aber = 0 ist, bedeutet immer eine unendlich große Größe. Dieß gründet sich darauf: Je kleiner der Divisor in Vergleichung mit der

Dividende ist, desto öfter ist jener in dieser enthalten, desto größer ist der Quotient. Wenn man sich also vorstellt, der Divisor nehme bis auf nichts ab, die Dividende aber bliebe eine endliche Größe, oder eine Größe, die sich angeben läßt; so wächst der Quotient immer mehr und mehr, und übersteigt alle Größen, die sich angeben lassen, dieß heißt: er wird unendlich groß. Freylich kann man eigentlich nicht Etwas mit Nichts dividiren. Aber man kann sich vorstellen, daß der Divisor bis er Nichts wurde, immer kleiner und kleiner geworden ist, und also einen immer größer und größern Quotienten gegeben hat, wodurch endlich der Quotient alle Gränzen endlicher Größen übersteigen mußte.

## Zusatz.

### §. 200.

Wollte man im Ausdruck am Ende des §. 197. c größer d setzen, so gäbe dieser Ausdruck etwas verneintes, und dieß wäre offenbar ungereimt; denn man nimmt alle Glieder der Reihe positiv an, und daher können sie, so viel oder so wenig ihrer sind, nie eine verneinte Summe geben. Der Fehler dieses Verfahrens besteht in folgendem. Der Ausdruck am Ende des §. 197. wurde aus der Voraussetzung gefunden, daß $\frac{c}{d}$ auf eine höhere Potenz erhoben, immer etwas kleineres gebe, oder ein eigentlicher Bruch sey; daß folglich die folgenden Glieder der Reihe immer kleiner und kleiner, ja so klein, als man will, werden. Ist aber c größer als d, so ist diese Voraussetzung falsch, und $1 - \left(\frac{c}{d}\right)^n$ ist eine verneinte Größe, die immer größer und größer wird, je mehr n wächst. Daher kann man hier nicht annehmen, daß $1 - \left(\frac{c}{d}\right)^n$ der 1 so nahe komme, als man nur will, je größer n angenommen wird. Es ist daher kein Wunder, daß diese, aus §. 197. am Ende genommene Formel etwas ungereimtes gibt, wenn man sie auf einen Fall anwendet, bey dem dasjenige nicht gilt, woraus sie hergeleitet wurde.

## Anmerkung.

§. 201.

Wird die Summirung der unendlichen Reihen auf diese Art vorgetragen, so fallen alle Schwierigkeiten und seltsam scheinenden Sätze weg, die man sonst zuweilen darinnen zu finden glaubt. Z. B. daß eine unendliche Reihe größer als die andere seye; daß eine unendliche Reihe ein letztes Glied habe; daß dieß Nichts seyn soll. Diese und andere Sätze enthalten gar nichts, das jemand befremden könnte, wenn man die Worte in den vorhin bestimmten Bedeutungen nimmt. Alles Paradoxe entspringt bey ihnen aus unrichtig verstandenen Ausdrücken.

Als eine Anwendung dieser Rechnung läßt sich noch eine Widerlegung eines berühmten Beweises anbringen, durch den Zeno vor Alters darthun wollte, daß keine Bewegung möglich seye; oder vielmehr, daß bey der Bewegung das Unbegreifliche statt finde: Das Schnellste werde das Langsamste nicht einholen.

Man stelle sich vor in A seye Achill,

A ——————————————————— W
S T V

den Homer durch das Beywort des Schnellfüßigen bezeichnet; in S eine Schildkröte. Achill sey 100mal schneller als die Schildkröte, und in dem Augenblick, da er zu laufen anfängt, fange die Schildkröte an fort zu kriechen. In der Zeit also, da er aus A in S kommt, ist sie aus S in T gekommen, so daß $ST = 1/100$ von $AS$; und in der Zeit, da er $ST$ durchlauft, kriecht sie durch $TV = 1/100$ von $ST$; und in der Zeit, da er $TV$ durcheilt, kommt sie durch $VW = 1/100$ von $TV$. Kurz, wenn er aus einer Stelle, wo er sich in irgend einem Augenblicke befand, in die Stelle gekommen ist, wo sich die Schildkröte im nämlichen Augenblick befunden hatte, so ist sie von dieser ihrer Stelle um $1/100$ der Entfernung beyder Stellen fortgekrochen, und er wird sie also nie erreichen.

Indessen erhellt schon aus diesem Vortrag, daß Achill der Schildkröte immer näher und näher kommen wird. Wenn sich also zeigen läßt, daß beyder Entfernung in einer gewissen kurzen Zeit kleiner als jede angebliche Größe wird, so muß man wohl zugeben, daß er sie erreiche.

Man setze die erste Entfernung A S z. B. eine Meile und nenne sie = 1; weil S T, T V, V W ꝛc. immer die folgende Entfernung 100mal kleiner wird, als die vorhergehende; so machen diese Entfernungen nachstehende Reihe aus: $1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{10000} + \frac{1}{1000000} \ldots$ in welcher nach §. 197. $a = 1$, $b = c = 1$; und $d = 100$. Man stelle sich also diese Reihe unendlich fortgesetzt vor, so ist ihre Summe nach dem Ausdruck am Ende des §. 197. $= \frac{1 \times 100}{1 \times (100-1)} = \frac{100}{99} = 1 + \frac{1}{99}$. Die Summe der Entfernungen also zwischen Achill und der Schildkröte, so viel ihrer auch seyn mögen, das ist der Weg, den Achill zurückzulegen hat, um die Schildkröte zu erreichen, beträgt nicht mehr als $1 + \frac{1}{99}$ Meilen, und wenn er also z. B. 1 Meile in 1 Stunde zurücklegt, so erreicht er in $1 + \frac{1}{99}$ Stunden die Schildkröte, die Eine Meile vor ihm voraus hatte.

So läßt sich dieser Einwurf gegen die Möglichkeit der Bewegung auflösen, den man sowohl wegen des zum Beyspiel gebrauchten Helden, als wegen der Stärke, die man darinnen zu finden glaubte, Zeno's Achilles genannt hat.

## Aufgabe 70.

### §. 202.

**Eine Größe, die durch Einen Buchstaben ausgedruckt ist, mit einer Größe zu dividiren, die durch zwey Buchstaben ausgedrückt ist.**

## Auflösung.

Die Dividende sey = a; der Divisor = b + c