Jak. Frid. Malers weil. Hochfürstl. Markgräfl. Bad. Kirchenraths und Rectors des Gymnasii Jllustris Algebra zum Gebrauch hoher und niederer Schulen

Maler, Jakob Friedrich

Carlsruhe, 1821

Aufgabe 68

urn:nbn:de:bsz:31-266447

rigkeiten ausgewichen. Man drücke nämlich die Summe (§. 193.) so aus: $\frac{a - am^n}{1 - m} = s$; oder auch: $\frac{a(1 - m^n)}{1 - m} = s$. (§. 20.) Auf diese Art wird die Dividende hier bejaht, da sie im §. 193. verneint wurde, weil das erste Glied größer als das letzte ist. Eben so wird hier der Divisor bejaht, da er nach §. 193 verneint werden würde, indem der Exponent m kleiner als 1 ist. Da nun zwey bejahte Größen eben den Quotienten geben, wie die ihnen entgegengesetzten beyden verneinten (§. 42.) so kommt einerley s heraus, man mag's auf diese Art, oder wie im §. 193. ausdrücken.

§. 195. a.

Man addire bey einer Reihe immer abnehmender Brüche mehrere Glieder, so wird sich diese Summe einer gewissen Zahl immer mehr nähern, je mehr man Glieder addirt, die Zahl selbst aber nie im schärfsten Verstande erreichen. In diesem Falle sieht man die Reihe als unendlich weit fortgesetzt an; und es heißt die erwähnte Zahl die Summe dieser unendlichen Reihe.

Aufgabe 68.

§. 196.

Eine Reihe von Brüchen zu summiren, die sich mit $1/2$ anfängt, und in welcher der folgende Bruch immer des nächst vorhergehenden Hälfte ist. Z. B. $1/2$; $1/4$; $1/8$; $1/16$; $1/32$; $1/64$ ꝛc.

Auflösung.

Man setze im §. 195. im 2ten Ausdruck der Summe $a = 1/2$ und $m = 1/2$ und verlange die Summe von n Gliedern der Reihe; so ist solche $\frac{1/2 \times (1 - (1/2)^n)}{1/2} = 1 - (1/2)^n$ $= 1 - \frac{1}{2^n}$ (§. 67.) oder n Glieder der Progression geben eine Summe, der zu 1 das nte Glied fehlt. Die Progression seye: $1/2$; $1/4$; $1/8$; $1/16$; $1/32$; $1/64$; $1/128$; $1/256$. Hier sind 8 Glieder und das 8te ist $= \frac{1}{2^8}$. Addirt man diese Glieder nach der gewöhnlichen Bruch-Rechnung, so daß man sie alle auf 256 Theile bringt, so muß man jedes Bruchs Zähler mit der Zahl multiplicieren, mit der sein Nenner multiplicirt werden muß, um ihn in 256 Theile zu verwandeln; also beträgt dergleichen 256 Theile

$$\begin{aligned} 1/256 &= 1 \\ 1/128 &= 2 \\ 1/64 &= 4 \\ 1/32 &= 8 \\ 1/16 &= 16 \\ 1/8 &= 32 \\ 1/4 &= 64 \\ 1/2 &= 128 \\ \hline \text{Ihre Summe} &= 255 \end{aligned}$$

oder die Brüche zusammen machen $255/256 = 1 - 1/256$. Je größer nun n wird, desto kleiner wird $\frac{1}{2^n}$, und man kann immer n so groß annehmen, daß $\frac{1}{2^n}$ kleiner wird, als jeder kleine Bruch, so gering man auch solchen annähme. Wollte man z. B. haben, daß $\frac{1}{2^n}$ kleiner als ein Millionstel werden sollte, so müßte man n so groß annehmen, daß 2^n größer als eine Million würde; und dieß ist möglich, weil die Potenzen von n immerfort ohne Ende wachsen.

Da also $\frac{1}{2^n}$ so klein als man nur will, werden kann, so kann sich die wirkliche Summe dieser Reihe, nämlich $1 - \frac{1}{2^n}$, der Einheit, so weit man will, nähern; das ist: Man kann die Reihe immer so weit fortsetzen, daß ihre Summe zwar nicht völlig 1 wird, aber doch der 1 so nahe kommt, als man nur will.

In dieser Bedeutung sagt man: die Summe der unendlich fortgesetzten Reihe seye = 1; oder, wenn man sich alle möglichen Glieder dieser Reihe vorstellt, so betragen sie zusammen 1. Denn wer sagte, diese Summe sey 1 weniger

Etwas, der würde dieß Etwas nicht angeben können, weil sich die Reihe immer so weit fortsetzen läßt, daß $\frac{1}{2^n}$ kleiner als dieß Etwas wird. Sagte jemand, die Summe dieser ohne Ende fortgesetzten Reihe sey von der 1 immer noch um etwas unterschieden, das wenigstens 1 Millionstel betrage; so müßte er uns verwehren können, die Reihe so weit fortzusetzen, bis $\frac{1}{2^n}$ kleiner als 1 Millionstel würde. Da er aber dieß nicht kann, so muß er auch zugestehen, daß die Summe der Reihe, der 1 näher komme, als er behaupten wollte. Und so mag jemand einen noch so geringen Unterschied zwischen 1 und der Summe der Reihe annehmen, als er will; so kann man ihm zeigen, daß dieser Unterschied noch immer vermindert werden kann, wenn nur die Reihe weit genug fortgesetzt wird.

Wenn man also die Reihe, so weit als nur möglich ist, fortsetzen darf, so läßt sich für ihre Summe nichts anders angeben als 1. Und so wird deutlich seyn, daß die Summe dieser unendlichen Reihe von Brüchen 1 heißen muß. Es fehlt nämlich der wirklichen Summe von den Gliedern, die man in der That nach einander hinsetzen kann, zur 1 immer nur das letzte dieser Glieder. Allein dieß kann so klein werden, als man nur will, welches man auch so ausdrückt: Es kann verschwinden. Man trägt daher die bisherigen Schlüsse auch so vor: Das letzte Glied wird in Vergleichung mit der 1 als nichts angesehen, und daher ist die Summe = 1.

Wäre die Meynung dieses Ausdrucks: Das letzte Glied der unendlichen Reihe sey in der That = 0; so würde man ihn schwerlich rechtfertigen können. Denn erstlich gibts kein letztes Glied dieser unendlichen Reihe, man kann niemals aufhören zu halbiren; jeder Bruch, so klein er auch ist, hat wieder eine Hälfte. Zweytens kann kein Glied dieser Reihe, so weit man sie auch fortsetzt = 0 werden. Denn käme man durch halbiren auf 0, so wäre Nichts die Hälfte von Etwas, oder das nächste Glied von dem Nichts wäre 2mal Nichts, und das zweyte davon rückwärts 4mal Nichts; und so wären alle vorhergehende Glieder nur 8, 16 ꝛc. fache des Nichts. Solche Ungereimtheiten zu vermeiden, muß man sich die Sache auf die angezeigte Art deutlich vorstellen; und wenn man von einem letzten Gliede, das als Nichts angesehen wird, redet, dergleichen Ausdrücke nur als Abkürzungen der vorigen Schlüsse ansehen. Diese Erinnerung ist deßwegen wichtig, weil gegenwärtige Aufgabe schon als etwas, das zur Rechnung des Unendlichen gehört, betrachtet werden kann, und gehörige Begriffe von ihr bey dieser Rechnung Dienste leisten können.

Aufgabe 69.

§. 197.

Eine unendliche geometrische Reihe, deren Exponent ein Bruch ist, zu summiren.

Auflösung.

Das erste Glied sey $\frac{a}{b}$, wo a und b ganze Zahlen bedeuten, und also das erste Glied eine ganze Zahl ist, wenn $b = 1$. Es sollen ferner c und d ganze Zahlen bedeuten, und der Exponent $\frac{c}{d}$ seyn. Dann ist die Progression: $\frac{a}{b} + \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \times \frac{c^2}{d^2} + \frac{a}{b} \times \frac{c^3}{d^3}$ rc. Jedes Glied enthält nämlich $\frac{a}{b}$ in eine Potenz von $\frac{c}{d}$ multiplicirt, deren Exponent um 1 weniger ist, als die Zahl des Gliedes; das $n + 1$ste Glied ist also $\frac{a}{b} \times \frac{c^n}{d^n}$. Z. B. das 101te Glied wäre $\frac{a}{b} \times \frac{c^{100}}{d^{100}}$. Eben so ist das nte Glied: $\frac{a}{b} \times \frac{c^{n-1}}{d^{n-1}}$. Wenn man nun die Summe von n Gliedern finden wollte, so würde man nach §. 193. folgender Gestalt verfahren. Das nte Glied wäre, was im §. 193. das letzte, und das $n + 1$ste, was dorten Eins weiter als das letzte heißt. Also hieße

a oder das erste Glied im §. 193. hier $\frac{a}{b}$

m oder der Exponent im §. 193. hier $\frac{c}{d}$

n aber wäre dorten und hier einerley.