Jak. Frid. Malers weil. Hochfürstl. Markgräfl. Bad. Kirchenraths und Rectors des Gymnasii Jllustris Algebra zum Gebrauch hoher und niederer Schulen

Maler, Jakob Friedrich

Carlsruhe, 1821

Aufgabe 67

urn:nbn:de:bsz:31-266447

Zusatz.

§. 193.

Wenn daher die Differenz des ersten und eines über das letzte weitern Gliedes mit dem um 1 verringerten Exponenten dividirt wird; so bekommt man die Summe der geometrischen Progression. Nun ist ein Glied weiter als das letzte $= am^n$. Daher wird aus obiger (§. 192.) gefundenen Formel folgende:

$$s \times (m - 1) = am^n - a$$

$$\text{oder } s = \frac{am^n - a}{m - 1}$$

Aufgabe 67.

§. 194.

Die Wahrheit des §. 193. durch Division zu finden; oder was heraus komme, wenn man die Differenz des ersten und letzten Gliedes mit dem um 1 verringerten Exponenten dividirt.

Auflösung.

$$\begin{array}{l|l}
am^{n-1} - a & m - 1 \\
\underline{am^{n-1} - am^{n-2}} & am^{n-2} + am^{n-3} + am^{n-4} + am^{n-5} \\
\quad + am^{n-2} - a & \\
\quad \underline{+ am^{n-2} - am^{n-3}} & \\
\qquad + am^{n-3} - a & \\
\qquad \underline{+ am^{n-3} - am^{n-4}} & \\
\qquad\quad + am^{n-4} - a & \\
\qquad\quad \underline{+ am^{n-4} - am^{n-5}} & \\
\qquad\qquad + am^{n-5} - a \text{ rc.} &
\end{array}$$

Wäre $n = 5$ gewesen, so würde $am^{n-5} = am^0 = a$ seyn (§. 60.) Da nun $am^{n-4} - am^{n-5} = am^{n-4} - a$ von $am^{n-4} - a$ abgezogen wurde, so würde es aufgehen, und so in jedem Fall, wenn eine eben so große Zahl von dem Exponenten n abgezogen werden soll (§. 59.) als n, oder die Zahl der Glieder ist. Man sieht also hieraus, daß durch diese Division alle Glieder herauskommen, außer das letzte am^{n-1}; und wer zum

Quotienten von $\frac{am^{n-1} - a}{m - 1}$ oder $\frac{\omega - a}{m - 1}$ das letzte Glied ω addirt, erhält daher die Summe der Progression oder s.

§. 194. a.

Da $s = \frac{\omega - a}{m - 1} + \omega$; so ist auch, (alles zur nämlichen Benennung gebracht) $\frac{\omega - a + \omega m - \omega}{m - 1} = s$; oder $\frac{\omega m - a}{m - 1} = s$; woraus sich folgender Satz erweisen läßt:

$$s - \omega : s - a = a : am$$

Beweis.

$$s = \frac{\omega m - a}{m - 1} \quad (\times m - 1)$$

$$\begin{aligned}
sm - s &= \omega m - a \\
+ s &\quad - \omega m \\
\hline
sm - \omega m &= s - a \\
\hline
sam - \omega am &= sa - a^2 \text{ oder} \\
\hline
(s - \omega)\, am &= (s - a)\, a \text{ das ist} \\
\hline
s - \omega : s - a &= a : am \text{ oder auch} \\
\hline
s - am^{n-1} : s - a &= a : am
\end{aligned}$$

Zusatz 1.

Hieraus läßt sich dann die im §. 193 gefundene Summenformel folgendermaaßen ableiten.

$$\begin{aligned}
s - am^{n-1} : s - a &= a : am \text{ oder} \\
\hline
sam - a^2m^n &= sa - a^2 \quad (: a) \\
\hline
sm - am^n &= s - a \\
\hline
sm - s &= am^n - a \text{ oder} \\
\hline
s\,(m - 1) &= am^n - a \\
\hline
s &= \frac{am^n - a}{m - 1}
\end{aligned}$$

Zusatz 2.

Da $\omega = am^{n-1}$, so ist

$$\frac{\omega}{a} = m^{n-1} \text{ und daher } \sqrt[n-1]{\frac{\omega}{a}} = m.$$

Zusatz 3.

Reducirt man in obiger Summenformel die Größe a, so erhält man die Regel, nach welcher sich das erste Glied aus s, m und n berechnen läßt.

$$s = \frac{am^n - a}{m - 1}$$

$$s\,(m - 1) = (m^n - 1)\,a \qquad (: m^n - 1)$$

$$\frac{s\,(m - 1)}{m^n - 1} = a$$

Zusatz 4.

Aus a, ω und m läßt sich zwar auch n, ingleichem aus a, m und s; so wie m aus a, n und s finden. Es wird aber leichter erst nach der Lehre von den Logarithmen erklärt. (§. 215. und 218.)

Zusatz 5.

So kann man aus m, n und s auch jedes Glied der Progression finden. Wenn nämlich die Formel für das erste Glied, d. i. $a = \frac{s\,(m - 1)}{m^n - 1}$, mit m^{n-1} multiplicirt wird; so erhält man $am^{n-1} = \frac{sm^n - sm^{n-1}}{m^n - 1}$, und dieß ist der Ausdruck für jedes beliebige Glied, weil man jedes als das letzte annehmen kann. Hiernach wäre z. B. das 6te Glied $= \frac{sm^6 - sm^5}{m^6 - 1}$.

Zusatz 6.

Es seye die geometrische Progression a; am; am; am^2; am^3 ꝛc. so ist

1) $a : am^2 = a^2 : a^2m^2$ und

2) $a : am^3 = a^3 : a^3m^3$

Oder es verhält sich das erste Glied zum 3ten, wie das

Quadrat des 1sten zum Quadrat des 2ten: auch das 1ste zum 4ten, wie der Kubus des ersten zum Kubus des zweyten.

Zusatz 7.

Dieß gibt den Grund zur Auflösung der Aufgabe: Zwischen zwey gegebenen Größen a und b zwey mittlere geometrische Proportional-Größen zu finden. Die letztern seyen x und y; so ist

$$a : x = y : b \text{ daher}$$

$$a : b = a^3 : x^3$$

$$ax^3 = a^3b$$

$$x^3 = a^2b$$

$$x = \sqrt[3]{a^2b} \text{ folglich}$$

$$a : \sqrt[3]{a^2b} = y : b \text{ (erhoben zur 3ten Dignität)}$$

$$a^3 : a^2b = y^3 : b^3$$

$$a^3b^3 = a^2by^3 \; (: a^2b)$$

$$ab^2 = y^3$$

$$\sqrt[3]{ab^2} = y \text{ und also}$$

$$a : \sqrt[3]{a^2b} = \sqrt[3]{ab^2} : b$$

Es seye z. B. $a = 2$, $b = 16$, so ist $x = 4$ und $y = 8$. Aber auch: $2 : 4 = 4 : 8$ und $4 : 8 = 8 : 16$.

Anmerkung.

§. 195.

Es wurden zwar die Aufgaben 66. und 67. nur auf steigende Progressionen angewandt. Allein man versuche das nämliche mit den fallenden, und man wird die nämlichen Eigenschaften finden. Da aber in diesem Falle der Exponent ein Bruch ist, und wenn man das erste als das größere Glied vom letzten als dem kleinern abzieht, es eben sowohl eine negative Größe gibt, als wenn man 1 vom Exponenten, der ein Bruch ist, abzöge, so wird dadurch die Rechnung etwas beschwerlich. Daher ists am besten: Man sehe bey der abnehmenden Progression das letzte Glied als das erste an, so wird allen Schwierigkeiten ausgewichen. Man drücke nämlich die Summe (§. 193.) so aus: $\frac{a - am^n}{1 - m} = s$; oder auch: $\frac{a(1 - m^n)}{1 - m} = s$. (§. 20.) Auf diese Art wird die Dividende hier bejaht, da sie im §. 193. verneint wurde, weil das erste Glied größer als das letzte ist. Eben so wird hier der Divisor bejaht, da er nach §. 193 verneint werden würde, indem der Exponent m kleiner als 1 ist. Da nun zwey bejahte Größen eben den Quotienten geben, wie die ihnen entgegengesetzten beyden verneinten (§. 42.) so kommt einerley s heraus, man mag's auf diese Art, oder wie im §. 193. ausdrücken.

§. 195. a.

Man addire bey einer Reihe immer abnehmender Brüche mehrere Glieder, so wird sich diese Summe einer gewissen Zahl immer mehr nähern, je mehr man Glieder addirt, die Zahl selbst aber nie im schärfsten Verstande erreichen. In diesem Falle sieht man die Reihe als unendlich weit fortgesetzt an; und es heißt die erwähnte Zahl die Summe dieser unendlichen Reihe.

Aufgabe 68.

§. 196.

Eine Reihe von Brüchen zu summiren, die sich mit $\frac{1}{2}$ anfängt, und in welcher der folgende Bruch immer des nächst vorhergehenden Hälfte ist. Z. B. $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{16}$; $\frac{1}{32}$; $\frac{1}{64}$ 2c.

Auflösung.

Man setze im §. 195. im 2ten Ausdruck der Summe $a = \frac{1}{2}$ und $m = \frac{1}{2}$ und verlange die Summe von n Gliedern der Reihe; so ist solche $\frac{\frac{1}{2} \times (1 - (\frac{1}{2})^n)}{\frac{1}{2}} = 1 - (\frac{1}{2})^n = 1 - \frac{1}{2^n}$ (§. 67.) oder n Glieder der Progression geben eine Summe, der zu 1 das nte Glied fehlt. Die Progression seye: $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{16}$; $\frac{1}{32}$; $\frac{1}{64}$; $\frac{1}{128}$; $\frac{1}{256}$. Hier sind 8 Glieder und das 8te ist $= \frac{1}{2^8}$. Addirt man diese Glieder nach