Jak. Frid. Malers weil. Hochfürstl. Markgräfl. Bad. Kirchenraths und Rectors des Gymnasii Jllustris Algebra zum Gebrauch hoher und niederer Schulen

Maler, Jakob Friedrich

Carlsruhe, 1821

Aufgabe 64

urn:nbn:de:bsz:31-266447

Zusatz 1.
§. 184.

Ist also die Zahl der Glieder nebst der Differenz gegeben, so findet sich das **letzte Glied**, wenn man von der Zahl der Glieder 1 abzieht, die Differenz mit diesem Rest multiplicirt, und zum ersten Glied addirt, wenn die Progression wachsend; hingegen subtrahirt, wenn sie abnehmend ist. Folglich ist nach der (182. a.) gewählten Benennung das letzte Glied oder $u = a + (n - 1)d$ für die **steigende**, und $u = a - (n - 1)d$ für die **fallende Progression**. Oder für die 1ste $u = a + dn - d$, und für die letzte $u = a - dn + d$.

Zusatz 2.
§. 185.

In der Gleichung $u = a + dn - d$ sind 4 Größen, deren jede unbekannt seyn kann und die übrigen bekannt, woraus noch 3 Aufgaben entspringen:

$$\text{I)}\ a = u - dn + d.\quad \text{II)}\ n = \frac{u-a}{d} + 1\quad \text{III)}\ d = \frac{u-a}{n-1}$$

Aufgabe 64.
§. 186.

Die Summe des ersten und letzten Gliedes in einer arithmetischen Progression zu finden.

Auflösung.

Es seye alles wie im §. 183, so ist:

$$\begin{array}{llllll}
a & a+d & a+2d & a+3d & a+4d & a+5d \\
 & & & a+2d & a+d & a \\
\hline
 & & & 2a+5d & 2a+5d & 2a+5d
\end{array}$$

$$\begin{array}{lllllll}
\text{Und} & a & a-d & a-2d & a-3d & a-4d & a-5d \\
 & & & & a-2d & a-d & a \\
\hline
 & & & & 2a-5d & 2a-5d & 2a-5d
\end{array}$$

Es ist nämlich jede arithmetische Progression ja eine **fortgesetzte stätige** arithmetische Proportion, folglich:

I. II. III. IV.

$a - (a + d) = (a + 4d) - (a + 5d)$; daher I + IV =

II + III oder $2a + 5d = 2a + 5d$. Also ist die Summe des ersten und letzten Gliedes in einer arithmetischen Progression gleich der Summe jeder zwey Glieder, die von den beyden äußersten gleichweit abstehen.

Zusatz 1.

§. 187.

Wird daher die Summe des ersten und letzten Gliedes mit der halben Zahl der Glieder multiplicirt, so hat man die Summe aller Glieder. Diese Summe seye $= s$; so ist (§. 184.)

$$(a + a + (n - 1)\,d) \times \frac{n}{2} = an + \frac{dn^2}{2} - \frac{dn}{2} = s$$

oder auch: $s = \frac{(a + u)n}{2} = (a + u)\,\frac{n}{2} = \frac{a + u}{2} \times n.$

Wie diese Gleichung sich mit Worten ausdrücken und eine Regel daraus machen lasse, werden diejenigen leicht fassen, die das bisher gesagte verstanden haben.

Zusatz 2.

§. 188.

Auch in dieser Gleichung sind 4 Größen, deren jede, wenn die übrigen drey bekannt sind, gefunden werden kann.

I) $a = \frac{s}{n} - \frac{dn}{2} + \frac{d}{2}$.

II) $d = \frac{2s - 2an}{n^2 - n} = \frac{2\,(s - an)}{n\,(n - 1)}$ und endlich

III) $n = \pm\sqrt{\left(\frac{2s}{d} + \frac{a^2}{d^2} - \frac{a}{d} + \frac{1}{4}\right)} - \frac{a}{d} + \frac{1}{2}$ (§. 151.)

oder kürzer:

$$n = \pm\sqrt{\left[\frac{2s}{d} + \left(\frac{a}{d} - \frac{1}{2}\right)^2\right]} - \frac{a}{d} + \frac{1}{2}.$$

Zusatz 3.

§. 189.

Nennt man das letzte Glied $= u$, so wird, wenn es bekannt ist $s = (a + u)\,\frac{n}{2}$; daher ist:

I) $a = \frac{2s}{n} - u$; II) $u = \frac{2s}{n} - a$; III) $n = \frac{2s}{a + u}$.

§. 189. a.

Es seyen d, u und s gegeben, man finde a und n.

Auflösung.

I) $\frac{(a+u)\,n}{2} = s$ (§. 187.) II) $a + dn - d = u$ (§. 184.)

$an + un = 2s$ $\quad$ $a = u - dn + d$

$an = 2s - un$ $\quad$ Folglich ist nach I. und II.

$$a = \frac{2s}{n} - u$$

$$\text{III)}\ \frac{2s}{n} - u = u - dn + d$$

$$2s - nu = nu - dn^2 + dn$$

$$dn^2 - 2nu - dn = -2s$$

$$n^2 - \frac{(2u-d)n}{d} = -\frac{2s}{d}$$

$$n^2 - mn = -\frac{2s}{d}$$

$$n = \pm\sqrt{\left(\frac{m^2}{4} - \frac{2s}{d}\right)} + \frac{m}{2}\ (\text{§. 151.})$$

$$n = \frac{2u+d}{2d} \pm \sqrt{\left(\frac{4u^2+4ud+d^2}{4d^2} - \frac{2s}{d}\right)}$$

Oder $n = \frac{2u+d \pm \sqrt{4u^2+4ud+d^2-8ds}}{2d}$

Folglich $a = u + d - u - \frac{d}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{4u^2+4ud+d^2-8ds}{2}\right)}$

Oder $a = \frac{d}{2} \mp \frac{\sqrt{4u^2+4ud+d^2-8ds}}{2}$

Beyspiele für die gefundenen 2 Formeln.

1) Es seye die Progression 1. 2. 3. 4; so ist

$u = 4$ $\quad$ $n = \frac{9 \pm 1}{2} = \begin{cases} 5 \\ 4 \end{cases}$
$d = 1$

$s = 10$ $\quad$ $a = \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$

Die letzten Werthe passen für die Progression, wie sie angegeben wurde, die erstere für die Progression: 0. 1. 2. 3. 4.

2) Es sey die Progression 7. 8. 9; so ist

$$u = 9 \qquad n = \frac{19 \pm 13}{2} = \begin{cases} 16 \\ 3 \end{cases}$$

$$d = 1$$

$$s = 24 \qquad a = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{13}{2} = \begin{cases} +7 \\ -6 \end{cases}$$

wo abermals die letzten Werthe für die Progression, wie sie gegeben ist, die erstern aber für die folgende Progression passen: — 6. — 5. — 4. — 3. — 2. — 1. 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

§. 189. b.

Es seye s, n und au gegeben; man finde a und u.

Auflösung.

Da I) $u = \frac{2s}{n} - a$ (§. 189.) Und II) $au = p$ so ist $u = \frac{p}{a}$.

Folglich (nach I. und II) $\frac{p}{a} = \frac{2s}{n} - a$

$$p = \frac{2as}{n} - a^2$$

Oder $a^2 - \frac{2as}{n} = -p$

$$a - \frac{s}{n} = \pm\sqrt{\left(\frac{s^2}{n^2} - p\right)}$$

$$a = \frac{s}{n} \pm \sqrt{\left(\frac{s^2}{n^2} - p\right)}$$

Ganz dieselbe Formel erscheint für u. In der steigenden Progression erhält man daher a, wenn man das — Zeichen und u, wenn man das + Zeichen gebraucht. In der Fallenden ist es umgekehrt. Folgendes Beyspiel soll dieß belegen.

Es sey die Progression 2. 4. 6. 8; so ist:

$s = 20$ $\quad$ $a = 5 \pm 3$, nach dem untern Zei-

$n = 4$ $\quad$ chen, da die Progression steigend,

$au = p = 16$ $\quad$ $= 2$; nach dem obern aber $u = 8$.

§. 189. c.

Es sey s, d und a gegeben; man finde n.

Auflösung.

Da $\frac{2s}{n} - a = a + (n - 1)\,d$ (§. 189. II, und §. 184.)

so ist $2s - an = an + dn^2 - dn$

$$2s = 2an + dn^2 - dn$$

$$dn^2 + \underbrace{2an - dn}_{\parallel} = 2s \text{ (und: d)}$$

$$n^2 + \frac{(2a - d)\,n}{d} = \frac{2s}{d} \quad \text{Nun setze man } \frac{2a - d}{d} = m$$

$$n^2 + mn = \frac{2s}{d} \text{ und}$$

$$n + \frac{m}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{2s}{d} + \frac{m^2}{4}\right)} \text{ (§. 151.)}$$

$$n = \pm \sqrt{\left(\frac{2s}{d} + \frac{m^2}{4}\right)} - \frac{m}{2}$$

Folglich $n = \pm \sqrt{\left(\frac{2s}{d} + \frac{4a^2 - 4ad + d^2}{4d^2}\right)} - \frac{2a-d}{2d}$

Es seye die Progression wieder 1. 2. 3. 4; so ist

$$\begin{array}{ll} s = 10 & \\ d = 1 & n = \pm\, 9/2 - 1/2 = \begin{cases} 8/2 = 4 \\ -\, 10/2 = -\,5, \end{cases} \\ a = 1 & \end{array}$$

wo abermals der Werth — 5 für die Progression 0. 1. 2. 3. 4 zu nehmen ist.

Aufgaben zur Uebung dieser bisher vorgetragenen Formeln siehe (§. 314.)

Aufgabe 65.

§. 190.

Die Eigenschaften der geometrischen Progression zu untersuchen.