Jak. Frid. Malers weil. Hochfürstl. Markgräfl. Bad. Kirchenraths und Rectors des Gymnasii Jllustris Algebra zum Gebrauch hoher und niederer Schulen

Maler, Jakob Friedrich

Carlsruhe, 1821

Aufgabe 62

urn:nbn:de:bsz:31-266447

6n + 6 abgezogen das allgemeine Glied der 3ten Reihe der Unterschiede gibt, welches folglich durchgängig 6 ist.

4) Vier nacheinander folgende Kubi geben 3 erste Differenzen (No. 1.) daraus findet man zwey zweyte (No. 2.) und aus diesen beyden Eine dritte, welche immer 6 ist (No. 3.) Wenn man daher 6 zur letzten 2ten Differenz addirt, so erhält man eine neue zweyte, diese zur letzten 1sten Differenz addirt, gibt eine neue erste, und diese zum letzten Kubus addirt, gibt den nächstfolgenden neuen Kubus. So findet man in folgender Tabelle die 4 ersten Kubos: 1; 8; 27; 64; und die 3 ersten Unterschiede: 7; 19; 37; die beyden zweyten: 12 und 18; den 3ten unveränderlichen = 6. Hieraus aber 18 + 6 = 24; dann 37 + 24 = 61; endlich 64 + 61 = 125 oder den 5ten Kubus. Man nehme ferner die 4 Kubos 8; 27; 64; 125 an; so sind die ersten Unterschiede 19; 37; 61; die 2ten 18 und 24, und nun ist 24 + 6 = 30; 61 + 30 = 91; 125 + 91 = 216 oder = dem 6ten Kubus. Folglich kann man auf diese Art alle Kubos der Reihe nach durch bloße Addition finden.

III. Untersch.	II. Untersch.	I. Untersch.	Kubi.	Wurzeln.
			1	1
		7	8	2
	12	19	27	3
6	18	37	64	4
6	24	61	125	5
6	30	91	216	6
6	36	127	343	7
6	42	169	512	8

Aufgabe 62.

§. 181.

Eine Regel zu finden, nach welcher eine jede zweytheilige Wurzel leicht zu einer jeden Dignität erhoben werden kann.

Auflösung.

Man erhebe durch gewöhnliches Multipliciren die Wurzel $a + b$ zu etlichen Dignitäten, (§. 176.) so wird sich die Regel von selbst geben, wenn man beobachtet, woraus die Theile jeder Dignität bestehen.

$a + b$
$a^2 + 2ab + b^2$
$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
$a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$
$a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$

Man ersieht hieraus:

1) Die Glieder bestehen aus Produkten von a und b, oder ihren Dignitäten.

2) Diese Produkte haben Zahlen bey sich, die man sonst Coefficienten, hier aber auch Unzen nennt.

3) Daß der Exponent der Dignität des ersten Theils a in jedem Gliede um 1 weniger, der Exponent der Dignität von b hingegen immer um 1 mehr ist. Daher sind diese Produkte leicht zu finden, wenn man folgende zwey Reihen unter einander schreibt, und jedes untere Glied in das darüber stehende multiplicirt. Z. B. für die 5te Dignität:

$$\begin{array}{cccccc} a^5 & a^4 & a^3 & a^2 & a & 1 \\ 1 & b & b^2 & b^3 & b^4 & b^5 \\ \hline a^5 & a^4b & a^3b^2 & a^2b^3 & ab^4 & b^5 \end{array}$$

4) Jede Dignität hat ein Glied mehr, als ihr Exponent Einheiten enthält. Z. B. die 4te hat 5; die 5te Dignität 6 Glieder.

5) Die Unzen entstehen aus zwey arithmetischen Progressionen der natürlichen Zahlen, nämlich einer abnehmenden und einer zunehmenden, die so viel Glieder haben, als der

Folglich $= a\ 10;\ b = 5;\ m = 5;\ P = 10;\ \frac{a}{b} = Q = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$. Daher

$$P^m = 10^5 \;\text{- - - - - - - - - - - - - - -}\; = 100000 = A$$

$$mAQ = 5 \times 100000 \times \frac{1}{2} \;\text{- - - - - - -}\; = 250000 = B$$

$$\frac{m-1}{2}BQ = 2 \times 250000 \times \frac{1}{2} \;\text{- - - - - - -}\; = 250000 = C$$

$$\frac{m-2}{3}CQ = 1 \times 250000 \times \frac{1}{2} \;\text{- - - - - - -}\; = 125000 = D$$

$$\frac{m-3}{4}DQ = \frac{1}{2} \times 125000 \times \frac{1}{2} \;\text{- - - - - - -}\; = 31250 = E$$

$$\frac{m-4}{5}EQ = \frac{1}{5} \times 31250 \times \frac{1}{2} \;\text{- - - - - - -}\; = 3125 = F$$

$$\frac{m-5}{6}FQ = 0 \times 3125 \times \frac{1}{2} \;\text{- - - - - - -}\; = 0 = G$$ Folglich

$$(P + PQ)^m = (a + b)^m = (10 + 5)^5 = 15^5 \;\text{- - -}\; = 759375 = A + B \text{ ꝛc. } + F.$$

9. Sollte aber, z. B. aus 5, die Quadrat-Wurzel gezogen werden, so bedient man sich der No. 7. gefundenen Formel, theilt 5 in 2 Glieder, so daß das 1ste oder a ein vollkommenes Quadrat wird, hier 4+1. Nun ist $a + b = 4 + 1$ und $(a + b)^{\frac{m}{n}} = (P + PQ)^{\frac{m}{n}} = (4 + 1)^{1/2}$. Folglich $a = 4;\ b = 1;\ \frac{b}{a} = Q = \frac{1}{4};\ \frac{m}{n} = \frac{1}{2};\ P = 4$. Daher

$$P^{\frac{m}{n}} = 4^{\frac{1}{2}} \;\text{- - - - - - - - - - - - - -}\; = 2 = A$$

$$\frac{m}{n}AQ = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{4} \;\text{- - -}\; = + \frac{1}{4} = B$$

$$\frac{m-2}{2n}BQ = - \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \;\text{- - -}\; = - \frac{1}{64} = C$$

$$\frac{m-2n}{3n}CQ = - \frac{1}{2} \times - \frac{1}{64} \times \frac{1}{4} \;\text{- - -}\; = + \frac{1}{512} = D$$

$$\frac{m-3n}{4n}DQ = - \frac{5}{8} \times \frac{1}{512} \times \frac{1}{4} \;\text{- - -}\; = - \frac{5}{16384} = E$$

$$\frac{m-4n}{5n}EQ = - \frac{7}{10} \times - \frac{5}{16384} \times \frac{1}{4} \;\text{- - -}\; = + \frac{7}{131072} = F \text{ ꝛc.}$$ Folglich ist

$$\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{64} + \frac{1}{512} - \frac{5}{16384} + \frac{7}{131072} \text{ ꝛc.} = 2{,}237.$$ Das ist:

wenn die bis auf 10 Millionstel nach der gewöhnlichen Art ausgezogene $\sqrt{5} = 2{,}2360680$ ist, so ist die hier gefundene nur um $\frac{23}{20000}$ zu groß: welchen Fehler man aber durch immer fortgesetztes Anwenden der Formel in's Unendliche vermindern kann.

10. Vorzüglich aber bedient man sich dieser Formel, allgemeine Größen zu Dignitäten zu erheben, oder auch Wurzeln aus ihnen zu ziehen. Z. B. $(a + b)^5$ Hier ist $(a + b)^5 = (P + PQ)^m$; folglich $a = P;\ \frac{b}{a} = Q;\ m = 5$. Daher nach No. 6.

$$P^m = a^5 \;\text{- - - - - - - - - - - - -}\; = a^5 = A$$

$$\frac{m}{1}AQ = \frac{5 \times a^5 b}{a} \;\text{- - - - - - - - - - -}\; = 5a^4b = B$$

$$\frac{m-1}{2}BQ = \frac{2 \times 5a^4b \times b}{a} \;\text{- - - - - - - - -}\; = 10a^3b^2 = C$$

$$\frac{m-2}{3}CQ = \frac{1 \times 10a^3b^2 \times b}{a} \;\text{- - - - - - - - -}\; = 10a^2b^3 = D$$

$$\frac{m-3}{4}DQ = \frac{1}{2} \times \frac{10a^2b^3 \times b}{a} \;\text{- - - - - - - - -}\; = 5ab^4 = E$$

$$\frac{m-4}{5}EQ = \frac{1}{5} \times \frac{5ab^4 \times b}{a} \;\text{- - - - - - - - -}\; = b^5 = F$$

$$\frac{m-5}{6}FQ = 0 \times \frac{b^5 \times b}{a} \;\text{- - - - - - - - - - -}\; = 0$$ Folglich ist

$$(P + PQ)^m = (a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

11. Wollte man hingegen aus $a^2 - b^2$ die Quadrat-Wurzel oder $\sqrt{a^2 - b^2}$ haben, so wäre hier: $P = a^2$; $Q = \frac{b^2}{a^2};\ \frac{m}{n} = \frac{1}{2}$; daher $m = 1;\ n = 2$, und die Wurzel durch Annäherung, nach No. 7.

$$P^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{2}{2}} \;\text{- - - - - - - - - - - - - - -}\; = a = A$$

$$\frac{m}{n}AQ = \frac{1}{2} \times a \times - \frac{b^2}{a^2} \;\text{- - -}\; = - \frac{ab^2}{2a^2} = - \frac{b^2}{2a} = B$$

$$\frac{m-n}{2n}BQ = - \frac{1}{4} \times - \frac{b^2}{2a} \times - \frac{b^2}{a^2} \;\text{- - -}\; = - \frac{b^4}{8a^3} = - \frac{b^4}{8a^3} = C$$

$$\frac{m-2n}{3n}CQ = - \frac{1}{2} \times - \frac{b^4}{8a^3} \times - \frac{b^2}{a^2} \;\text{- - -}\; = - \frac{b^6}{16a^5} = - \frac{b^6}{16a^5} = D$$

$$\frac{m-3n}{4n}DQ = - \frac{5}{8} \times - \frac{b^6}{16a^5} \times - \frac{b^2}{a^2} \;\text{- - -}\; = - \frac{5b^8}{128a^7} = - \frac{5b^8}{128a^7} = E$$

$$\frac{m-4n}{5n}EQ = - \frac{7}{10} \times - \frac{5b^8}{128a^7} \times - \frac{b^2}{a^2} \;\text{- - -}\; = - \frac{35b^{10}}{1280a^9} = - \frac{7b^{10}}{256a^9} = F$$

$$\frac{m-5n}{6n}FQ = - \frac{3}{4} \times - \frac{7b^{10}}{256a^9} \times - \frac{b^2}{a^2} \;\text{- - -}\; = - \frac{21b^{12}}{1024a^{11}} = - \frac{21b^{12}}{1024a^{11}} = G$$ folglich

$$(P + PQ)^{\frac{m}{n}} = \sqrt{a^2 - b^2} = a - \frac{b^2}{2a} - \frac{b^4}{8a^3} - \frac{b^6}{16a^5} - \frac{5b^8}{128a^7} - \frac{7b^{10}}{256a^9} - \frac{21b^{12}}{1024a^{11}} \text{ ꝛc.}$$

Tabelle zur deutlichern Darstellung des Newtonischen Binomiums.

Glieder.	I.	II.	III.	IV	V.	VI.
1. Finden der Exponenten.	a^m b^0	a^{m-1} b^1	a^{m-2} b^2	a^{m-3} b^3	a^{m-4} b^4	a^{m-5} b^5
2. Finden der Unzen.	a^m + m 1	$a^{m-1}b^1$ + m − 1 2	$a^{m-2}b^2$ + m − 2 3	$a^{m-3}b^3$ + m − 3 4	$a^{m-4}b^4$ + m − 4 5	$a^{m-5}b^5$ m − 5 6
Oder X mit - - - -	a^m	$\frac{m}{1}$ $a^{m-1}b^1$	$\frac{m.m-1}{1.2}$ $a^{m-2}b^2$	$\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}$ $a^{m-3}b^3$	$\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4}$ $a^{m-4}b^4$	$\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{1.2.3.4.5}$ $a^{m-5}b^5$
3. So ist - - - - -	a^m	$+\frac{m}{1}.a^{m-1}b^1$	$+\frac{m.m-1}{1.2}.a^{m-2}b^2$	$+\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}.a^{m-3}b^3$	$+\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4}.a^{m-4}b^4$	$+\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{1.2.3.4.5}.a^{m-5}b^5$
Und da - - - - -	- - - - -	$a^{m-1}=\frac{a^m}{a}$	$a^{m-2}=\frac{a^m}{a^2}$	$a^{m-3}=\frac{a^m}{a^3}$	$a^{m-4}=\frac{a^m}{a^4}$	$a^{m-5}=\frac{a^m}{a^5}$
4. So ist - - - - -	a^m	$+\frac{m.a^m.b}{1.a}$	$+\frac{m.m-1.a^m.b^2}{1.2.a^2}$	$+\frac{m.m-1.m-2.a^m.b^3}{1.2.3.a^3}$	$+\frac{m.m-1.m-2.m-3.a^m.b^4}{1.2.3.4.a^4}$	$+\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.a^m.b^5}{1.2.3.4.5.a^5}$
Nun seye - - - -	$a=P$	$\frac{b}{a}=Q$				
So ist - - - - -	$a^m=P^m$		$\frac{b^2}{a^2}=Q^2$	$\frac{b^3}{a^3}=Q^3$	$\frac{b^4}{a^4}=Q^4$	$\frac{b^5}{a^5}=Q^5$
5. Folglich - - - - -	P^m	$+\frac{m}{1}P^mQ$	$+\frac{m.m-1}{1.2}P^mQ^2$	$+\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}P^mQ^3$	$+\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4}P^mQ^4$	$+\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{1.2.3.4.5}P^mQ^5$
Es seye ferner - - -	$P^m=A$	$\frac{m}{1}P^mQ=B$	$\frac{m-1}{2}BQ=C$	$\frac{m-2}{3}CQ=D$	$\frac{m-3}{4}DQ=E$	
6. So ist $(a+b)^m=(P+PQ)^m=$	P^m	$+\frac{m}{1}AQ$	$+\frac{m-1}{2}BQ$	$+\frac{m-2}{3}CQ$	$+\frac{m-3}{4}DQ$	$+\frac{m-4}{5}EQ$
		VII.	VIII.	IX.	X	XI.
Und so fort - - - -		$+\frac{m-5}{6}FQ$	$+\frac{m-6}{7}GQ$	$+\frac{m-7}{8}HQ$	$+\frac{m-8}{9}IQ$	$+\frac{m+9}{10}KQ$ bis ins Unendliche
7. Wäre m ein Bruch z. B. $\frac{m}{n}$, so entspringt die Formel $(P+PQ)^{\frac{m}{n}}$.	$P^{\frac{m}{n}}$	$+\frac{m}{n}AQ$	$+\frac{m-n}{2n}BQ$	$+\frac{m-2n}{3n}CQ$	$+\frac{m-3n}{4n}DQ$	$+\frac{m-4n}{5n}EQ$ $+\frac{m-5n}{6n}FQ$ 2c.

Wollte man aber durch diese letzte, in No. 7. gefundene Formel Größen zu Dignitäten erheben, so wird n = 1.

8. Nun kann durch die No. 6. gefundene Formel jede Größe zu jeder beliebigen Dignität erhoben werden. Z. B. diene 15 zur 5ten Dignität; so ist hier $15^5 = (10+5)^5 = (a+b)^m = (P+PQ)^m$;

folglich

Exponent der Dignität Einheiten enthält. Z. B. für die 5te Dignität:

$$\begin{array}{ccccc} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}$$

Diese werden aber durch die Division gefunden, nämlich für das 2te Glied $5/1 = 5$; für's 3te $= \frac{5 \times 4}{1 \times 2} = \frac{20}{2} = 10$; für's 4te $= \frac{5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3} = \frac{60}{6} = 10$; für's 5te $\frac{5 \times 4 \times 3 \times 2}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = \frac{120}{24} = 5$; für's letzte $= \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = \frac{120}{120} = 1$.

Werden nun diese gefundenen Unzen zu den vorhin gefundenen Produkten gesetzt, so erhält man die verlangte Dignität: $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$. Und eben so findet man alle übrige Dignitäten.

6) In jeder Dignität, welche eine gerade Anzahl Glieder hat, Z. B. 2, 4, 6 ꝛc. sind die Unzen der ersten Hälfte der Glieder die nämlichen, wie in den Gliedern der zweyten Hälfte. Ist aber die Zahl der Glieder ungerade, z. B. 3, 5, 7 ꝛc. so hat das mittlere Glied eine eigene nur einmal vorkommende Unze; und die Unzen aller vorhergehenden Glieder sind die nämlichen, wie in denen auf das mittlere folgenden Gliedern.

§. 182.

Wer den §. 181 wohl gefaßt hat, kann nun mit mäßiger Anstrengung die allgemeine sogenannte Newtonische Regel, (Binomium Newtoni) daraus herleiten, wenn er die beygefügte Tabelle damit vergleicht. In dieser

1) drückte man die Exponenten von a allgemein durch m; m — 1; m — 2 ꝛc. aus, so daß z. B. $a^5 = a^m$; $a^4 = a^{m-1}$; $a^3 = a^{m-2}$ ꝛc. gesetzt wurde, b aber behielt seine gewöhnliche Exponenten. Und so fand man die allgemeine Glieder der Dignität durch No. 1. der Tabelle.

2) Die Unzen, welche im §. 181. No. 5. waren: $\frac{5.\ 4.\ 3.\ 2.\ 1.}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.}$ sind daher nach Nr. 2. der Tabelle:

$$\frac{m \times m-1 \times m-2 \times m-3 \times m-4 \times m-5 \text{ ꝛc.}}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6}$$

3) Werden diese, wie im §. 181. No. 5. mit denen zu ihnen gehörigen Gliedern der Dignität multiplicirt, so gibt sich, nach N. 3. der Tabelle, die ganze Formel.

4) Diese wurde in No. 4. 5. und 6. der Tabelle bloß kürzer ausgedrückt, und die Substitution der einfachen Größen für zusammengesetztere dort schon deutlich dargestellt. Man bemerke vorzüglich, daß in No. 5. A, B, C ꝛc. immer das unmittelbar vorhergehende Glied ausdrückt.

5) Da $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, so wurde in No. 7. der Tabelle durch Substitution von $\frac{m}{n}$ statt m, die Formel zum Ausziehen der Wurzel bequemer gemacht.

6) No. 8 und 9 gibt Beyspiele von der Anwendung der Binomial-Formel aufs Erheben zu Dignitäten und Ausziehen der Wurzeln in Zahlen; so wie 10 und 11 das nämliche in allgemeinen Größen zeigt.

7) Größen mit kleinen Exponenten z. B. $(a+b)^2$ oder $(a+b)^3$; noch mehr kleine Zahlen werden freylich schneller nach der gewöhnlichen Art zum Quadrate oder Kubus erhoben; aber gewiß nicht, wenn die Exponenten groß sind z. B. $(a+b)^8$, wo 7 Multiplikationen nöthig wären.

8) Auch $\sqrt[3]{}$ und $\sqrt[2]{}$ findet man in Zahlen geschwinder nach der gemeinen Art, aber gewiß nicht die Wurzeln höherer Dignitäten; und bey allgemeinen Größen bleibt, wenn sie irrational sind, sicher kein bequemeres Mittel übrig.

9) Wenn bey der Anwendung der Binomial-Formel im Erheben zu Dignitäten, ein Faktor 0 wird, wie No. 8 und 10 der Tabelle; so wird begreiflich das ganze daraus entstehende Glied = 0, das ist: Man hat alle Glieder gefunden, wie man schon aus §. 181. No. 4. schließen konnte.

Progressionen-Lehre.

§. 182. a.

Es gibt steigende (zunehmende, wachsende) und fallende (abnehmende) beyde entweder arithmetische oder geometrische Progressionen. In den arithmetischen soll das 1ste Glied = a; das letzte = u; die Zahl der Glieder = n; die Summe = s; die Differenz = d seyn. In der geometrischen die 4 ersten eben so, nur kommt bisweilen statt u, die Benennung ω vor; und weil hier keine Differenz, wohl aber ein Exponent statt findet; so heiße dieser m. Daher müssen in der arithmetischen für u; s; a; n und d; in der geometrischen für u oder ω; s; a; m; n Formeln gefunden, und ihr Gebrauch gezeigt werden, aus welchen sich alsdann noch mehrere herleiten lassen.

Aufgabe 63.

§. 183.

Die Eigenschaften der arithmetischen Progressionen zu untersuchen.

Auflösung.

Das erste Glied sey = a, die Differenz = d; so sind die Glieder

1) in der wachsenden Progression:

I.	II.	III.	IV.	V.	VI. ꝛc.
a	a + d	a + 2d	a + 3d	a + 4d	a + 5d

2) in der abnehmenden:

I.	II.	III.	IV.	V.	VI. ꝛc.
a	a — d	a — 2d	a — 3d	a — 4d	a — 5d

Diese Buchstaben zeigen deutlich, daß die Differenz in jedem Gliede um einmal weniger enthalten ist, als die Zahl, welche anzeigt, das wie vielste Glied es seye. Z. B. im 5ten ist's 4d ꝛc. doch mit dem Unterschiede, daß diese Differenz in der wachsenden Progression zum 1sten Gliede addirt, in der abnehmenden aber subtrahirt werden muß.