Jak. Frid. Malers weil. Hochfürstl. Markgräfl. Bad. Kirchenraths und Rectors des Gymnasii Jllustris Algebra zum Gebrauch hoher und niederer Schulen

Maler, Jakob Friedrich

Carlsruhe, 1821

Aufgabe 61

urn:nbn:de:bsz:31-266447

in den andern: 3) das 3fache Produkt aus dem ersten Theil ins Quadrat des 2ten; 4) die Kubik-Zahl des zweyten Theils. Oder kurz: Die Kubik-Zahlen eines jeden Theils, und das dreyfache Produkt eines jeden Theils in das Quadrat des andern.

Zusatz 1.
§. 177.

Hätte die Wurzel 3 Theile: Z. B. $a + c + d$; so würde statt b stehen $c + d$. Daher bestände die Kubik-Zahl von $a + c + d$. 1) Aus der Kubik-Zahl von $a = a^3$; 2) aus dem 3fachen Produkt von a^2 in $c + d = 3a^2 c + 3a^2 d$; 3) aus dem 3fachen Produkte vom Quadrate $c + d = c^2 + 2cd + d_2$ in $a = 3ac^2 + 6acd + 3ad^2$; 4) aus der Kubik-Zahl von $c + d = c^3 + 3c^2 d + 3cd^2 + d^3$. Folglich besteht die Kubik-Zahl einer dreytheiligen Wurzel: Aus den Kubik-Zahlen eines jeden Theiles; dem 3fachen Produkt eines jeden Theiles ins Quadrat eines jeden andern Theiles; und überdieß aus dem 6fachen Produkte aller Theile.

Zusatz 2.
§. 178.

Auf eine ähnliche Art findet man, daß bey 4 und mehrtheiligen Wurzeln die Kubik-Zahl bestehe: 1) Aus den Kubis eines jeden Theils; 2) aus dem 3fachen Produkt eines jeden Theils ins Quadrat eines jeden andern Theils; 3) aus dem 6fachen Produkt eines jeden Theiles in jede zwey von den übrigen. Und so können auch alle Formeln für die höhere Potenzen, wenn's nöthig ist, mit Worten ausgedrückt werden.

Aufgabe 61.
§. 179.

Den Unterschied zweyer Kubik-Zahlen zu finden, deren Wurzeln um Eins verschieden sind.

Auflösung.

Die Wurzeln seyen . . . $= n$ und $n + 1$
So ist die größere Kubik-Zahl $= n^3 + 3n^2 + 3n + 1$ (§. 176.)
Und die kleinere . . . $= n^3$

Ihr Unterschied . . . $= 3n^2 + 3n + 1$
Das ist . . . . $= (n + 1)^2 + 2n^2 + n$

Folglich ist der Unterschied = 1) der Quadrat-Zahl der größern Wurzel; 2) der doppelten Quadrat-Zahl der kleinern; 3) der kleinern Wurzel selbst, zusammen genommen.

Zusatz 1.

§. 180.

Wenn man also die Quadrat-Zahlen schon gemacht hat, (§. 175.) so kann man auch die Kubik-Zahlen durch bloßes Addiren finden, wenn zu jeder vorhergehenden das im §. 179. Gefundene addirt wird. Man kann aber auch, ohne die Quadrate zu haben, die Kubik-Zahlen bloß durch addiren finden. Diese Methode steht unter andern in Kästners Analysis endlicher Größen, (§. 48.) Ludolphs Tetragonometria Tabularia, Jena 1712, enthält die Quadrate aller ganzen Zahlen von 1 — 100000; Büchners Tabula Radicum Quadratorum et Cuborum, Nürnberg 1705 in länglicht 8vo, die Quadrat- und Kubik-Zahlen aller ganzen Zahlen von 1 — 12000. Das vollständige mathematische Lexicon, Leipzig 1734 und 1742 gr. 8vo, die Quadrat- und Kubik-Zahlen aller ganzen Zahlen von 1 — 10000. Die Büchnerischen Tafeln aber sind voller Fehler, ohne deren Verbesserung man sie nicht sicher brauchen kann.

Zusatz 2.

§. 180. a.

Diese Verbesserung zu erleichtern, folgt hier die (Zus. 1.) berührte Kästnerische Methode.

1) Der Unterschied der Kubik-Zahlen von n und $n + 1$; ist $= 3n^2 + 3n + 1$.
2) Man setze in diesem allgemeinen Gliede der ersten Unterschiede, statt n, $n + 1$; so hat man das nächstfolgende $= 3\,(n + 1)^2 + 3\,(n + 1) + 1 = 3n^2 + 9n + 7$; ziehe hievon $3n^2 + 3n + 1$ ab, so bleibt $6n + 6$ für ein allgemeines Glied der Reihe der zweyten Unterschiede.
3) In diesem setze man wieder $n + 1$ statt n, so ist das nächstfolgende $= 6\,(n + 1) + 6 = 6n + 12$; wovon

$6n + 6$ abgezogen das allgemeine Glied der 3ten Reihe der Unterschiede gibt, welches folglich durchgängig 6 ist.

4) Vier nacheinander folgende Kubi geben 3 erste Differenzen (No. 1.) daraus findet man zwey zweyte (No. 2.) und aus diesen beyden Eine dritte, welche immer 6 ist (No. 3.) Wenn man daher 6 zur letzten 2ten Differenz addirt, so erhält man eine neue zweyte, diese zur letzten 1sten Differenz addirt, gibt eine neue erste, und diese zum letzten Kubus addirt, gibt den nächstfolgenden neuen Kubus. So findet man in folgender Tabelle die 4 ersten Kubos: 1; 8; 27; 64; und die 3 ersten Unterschiede: 7; 19; 37; die beyden zweyten: 12 und 18; den 3ten unveränderlichen = 6. Hieraus aber $18 + 6 = 24$; dann $37 + 24 = 61$; endlich $64 + 61 = 125$ oder den 5ten Kubus. Man nehme ferner die 4 Kubos 8; 27; 64; 125 an; so sind die ersten Unterschiede 19; 37; 61; die 2ten 18 und 24, und nun ist $24 + 6 = 30$; $61 + 30 = 91$; $125 + 91 = 216$ oder = dem 6ten Kubus. Folglich kann man auf diese Art alle Kubos der Reihe nach durch bloße Addition finden.

III. Untersch.	II. Untersch.	I. Untersch.	Kubi.	Wurzeln.
			1	1
		7	8	2
	12	19	27	3
6	18	37	64	4
6	24	61	125	5
6	30	91	216	6
6	36	127	343	7
6	42	169	512	8

Aufgabe 62.

§. 181.

Eine Regel zu finden, nach welcher eine jede zweytheilige Wurzel leicht zu einer jeden Dignität erhoben werden kann.