Jak. Frid. Malers weil. Hochfürstl. Markgräfl. Bad. Kirchenraths und Rectors des Gymnasii Jllustris Algebra zum Gebrauch hoher und niederer Schulen

Maler, Jakob Friedrich

Carlsruhe, 1821

Aufgabe 58

Auflösung und Beweis.

Das Quadrat von $\sqrt[n]{b}$ ist $= \sqrt[n]{b} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{b^2}$; Der Kubus $= \sqrt{b^2} \times \sqrt{b} = \sqrt{b^3}$ (§. 166). Also überhaupt die Potenz m von $\sqrt{b} = \sqrt{b^m}$; folglich die allgemeine Regel: Erhebt die unter dem Wurzelzeichen befindliche Größe zur verlangten Potenz. Z. B. Kubus von $\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{125}$.

§. 169. b.

Aus einer Wurzelgröße die Wurzel einer verlangten Potenz zu ziehen. Z. B. $\sqrt{(\sqrt[3]{b})}$

Auflösung und Beweis.

Da $\sqrt[3]{b} = b^{1/3}$ $\sqrt{b} = b^{1/2}$ (§. 66.) folglich auch $\sqrt{b^{1/3}} = b^{1/6}$ und $b^{1/6} = \sqrt[6]{b}$; so ist auch $\sqrt{(\sqrt[3]{b})} = \sqrt[6]{b}$; oder allgemein: $\sqrt[m]{(\sqrt[n]{b})} = \sqrt[mn]{b}$. Daher die Regel:

1) Multiplicirt beyde Wurzel-Exponenten in einander.
2) Setzt ihr Produkt als neuen Wurzel-Exponenten in das einfache Wurzelzeichen der vorigen, unter dem doppelten, dreyfachen rc. Wurzelzeichen stehenden Größe.

Zusatz.

So kann man einer Wurzelgröße, welche mehrere Wurzelzeichen hat, leicht nur Eines verschaffen. Z. B. $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{4}}} = \sqrt[24]{4}$.

Aufgabe 58.

§. 170.

Man sucht drey Zahlen, die eine zusammenhängende Proportion (proportio geometrica continua) ausmachen, aus der Summe dieser Zahlen $= a$; und der Summe ihrer Quadrate $= b$.

Auflösung.

Wenn die erste der drey gesuchten Zahlen $= x$; die 2te y heißt; so ist die 3te $= \frac{y^2}{x}$, und man erhält folgende Gleichungen.

$$\text{I)}\ x + y + \frac{y^2}{x} = a \qquad \text{II)}\ x^2 + y^2 + \frac{y^4}{x^2} = b.$$

Hätte man aber die letzte der drey gesuchten Zahlen z, die mittlere wieder y genannt; so wäre die 1ste, die jetzo x heißt, $\frac{y^2}{z}$ geworden, und man hätte für y und z eben die Gleichungen, wie für x und y erhalten.

Man wird daher nach der Erinnerung (§. 157.) versuchen, ob es angeht, statt x und z, die man zugleich finden müßte, etwas zu suchen, das nicht doppelt ist. So etwas wird wohl die Summe der äußersten Zahlen seyn. Man nenne sie also u und setze

$$\text{III)}\ x + \frac{y^2}{x} = u,$$

wo man nun x aus der Rechnung wegzuschaffen, und u zu gebrauchen sucht.

Wenn man in III. jedes Glied mit x multiplicirt, so erhält man

$$\text{IV.}\ x^2 + y^2 = ux; \text{ und}$$

aus I. und III. wird $\text{V.}\ u + y = a$

Aus IV aber, wenn auf beyden Seiten y^2 abgezogen wird, entsteht $x^2 = ux - y^2$ oder

$$x^2 - ux = - y^2 \ (\text{wo } \frac{p}{2} = \frac{u}{2})$$

$$x^2 - ux + \frac{u^2}{4} = \frac{u^2}{4} - y^2 \qquad \sqrt{}$$

$$x - \frac{u}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{u^2}{4} - y^2\right)}$$

VI.) $x = \frac{u}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{u^2}{4} - y^2\right)}$, wo es in die Augen fällt, daß es für einerley mittlere Zahl y zwey x gibt, nämlich die dazu gehörigen beyden äußeren Zahlen.

Weil nun $y = a - u$ (V.) so ist (§. 147.) $y^2 = a^2 - 2au + u^2$ und $\frac{u^2}{4} - y^2 = \frac{u^2}{4} - a^2 + 2au - u^2$ (§. 45.)

$= 2au - \frac{3u^2}{4} - a^2$; daher wird aus VI. der Werth von x $= \frac{u}{2} \pm \sqrt{(2au - \frac{3u^2}{4} - a^2)}$; statt dessen ich, der Kürze wegen, $x = \frac{u}{2} \pm p$ schreiben will, wo p die positive oder negative Wurzelgröße folglich $p^2 = 2au - \frac{3u^2}{4} - a^2$ bedeutet, welches einerley bleibt, man mag p mit + oder mit — zu $\frac{u}{2}$ gesetzt haben. (§. 41.) Folglich ist $ux = \frac{u^2}{2} \pm up$, welches vermöge (IV.) der Werth von $x^2 + y^2$ ist.

Nach (III.) ist $\frac{y^2}{x} = u - x$; folglich, wenn der (VI.) gefundene Werth von x substituirt wird, $= u - (\frac{u}{2} \pm p)$ $= u - \frac{u}{2} \mp p = \frac{u}{2} \mp p$. Das Quadrat hievon ist: $\frac{y^4}{x^2}$ $= (\frac{u}{2} \mp p)^2$. Dieß Quadrat also und der Werth von $x^2 +$ y^2 geben zusammen b, vermöge (II.) also ist $\frac{u^2}{2} \pm up +$ $(\frac{u}{2} \mp p)^2 = b$. Macht man das Quadrat von $\frac{u}{2} \mp p$ wirklich, so ergibt sich:

$\frac{u^2}{2} \pm up + \frac{u^2}{4} \mp up + p^2 = b$; und, wenn hier nach Möglichkeit reducirt wird, $\frac{3u^2}{4} + p^2 = b$. Weil aber in p noch u enthalten ist, so setze man statt p^2, seinen Werth, so kommt

$$\frac{3u^2}{4} + 2au - \frac{3u^2}{4} - a^2 = b \text{ oder}$$

$$2au - a^2 = b$$

$$2au = b + a^2 \text{ folglich}$$

VII. $u = \frac{b}{2a} + \frac{a}{2}$ und nach V.

VIII. $a - u$ oder $y = a - \frac{b}{2a} - \frac{a}{2}$

d. i. $y = \frac{a}{2} - \frac{b}{2a}$

oder $y = \frac{a^2 - b}{2a}$

Nun substituire man in der VIten Gleichung die Werthe

von $\frac{u}{2} = \frac{b}{4a} + \frac{a}{4}$.

von $\frac{u^2}{4} = \frac{b^2}{16a^2} + \frac{b}{8} + \frac{a^2}{16}$ und

von $y^2 = \frac{a^2}{4} - \frac{b}{2} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{4a^2}{16} - \frac{4b}{8} + \frac{4b^2}{16a^2}$, wornach

also $\frac{u^2}{4} - y^2 = -\frac{3a^2}{16} + \frac{5b}{8} - \frac{3b^2}{16a^2}$ ist.

Die VIte Gleichung war:

$$x = \frac{u}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{u^2}{4} - y^2\right)}; \text{ daher}$$

$$x = \frac{b}{4a} + \frac{a}{4} \pm \sqrt{\left(-\frac{3a^2}{16} + \frac{5b}{8} - \frac{3b^2}{16a^2}\right)}$$

Nennt man hier die Größe unter dem Wurzelzeichen c^2, so ist die Wurzel davon $= \pm c$, und wir erhalten:

$$\text{IX.)} \quad x = \frac{b}{4a} + \frac{a}{4} \pm c.$$

Hier gibt der eine Werth die erste der drey gesuchten Zahlen, der andere die letzte. Weil nämlich die drey Zahlen nach einander wachsen oder abnehmen müssen, so gibt in (IX.) das obere Zeichen die 1ste Zahl, wenn sie abnehmen; das untere aber gibt die erste Zahl, wenn sie wachsen. Denn da man die Progression, von welchem Ende man will, anfangen kann, so kann jede der beyden äußersten Zahlen die erste heißen. In den beyden Werthen VIII. und IX. ist also die Auflösung der Aufgabe enthalten.

Beispiel.

§. 171.

Die drey Zahlen sollen zusammen $a = 21$, und ihre Quadrate zusammen $b = 189$ ausmachen. Weil in den Werthen der gesuchten Größen $\frac{b}{a}$ häufig vorkommt, so berechnet man dieß zuerst, und findet es $= \frac{189}{21} = 9$; daher $\frac{b}{2a} = \frac{9}{2}$ und $\frac{b}{4a} = \frac{9}{4}$.

Man berechne ferner c^2; hier ist:

$$- \frac{3a^2}{16} = - \frac{3 \times 441}{16} = - \frac{1323}{16};$$

$$- \frac{3b^2}{16a^2} = - \frac{8 \times 81}{16} = - \frac{243}{16}$$

---

welches zusammen $= - \frac{1566}{16}$

Ferner ist $+ \frac{5b}{8} = + \frac{5 \times 189}{8} = + \frac{1890}{16}$; also $c^2 = \frac{324}{16}$;

und $\sqrt{\frac{324}{16}} = \frac{\sqrt{324}}{4} = {}^{18}/_{4} = c$. Daher

nach VIII.) $y = {}^{21}/_{2} - {}^{9}/_{2} = {}^{12}/_{2} = 6$

nach IX.) $x = {}^{9}/_{4} + {}^{21}/_{4} \pm {}^{18}/_{4} = \frac{30 \pm 18}{4}$

also x nach dem obern Zeichen $= {}^{48}/_{4} = 12$

x nach dem untern Zeichen $= {}^{12}/_{4} = 3$.

Die drey Zahlen sind also 3; 6; 12; indem $3 + 6 + 12 = 21$, und eben so $9 + 36 + 144 = 189$.

Nähme man a und b nach Gefallen an, so würde man für c oft einen irrationalen Werth finden, wodurch die äußersten Zahlen irrational würden. Durch Versuche a und b so anzunehmen, daß c rational wird, dürfte schwer fallen, und Regeln, nach denen man dieß erhalten könnte, lassen sich aus denen hier vorgetragenen Lehren nicht herleiten. Die Aufgabe wird also hier wohl nicht anderst gebraucht werden können, als daß man die drey Zahlen Anfangs annimmt, aus ihnen a und b berechnet, und daraus rückwärts die Zahlen sucht.

Anmerkung.

§. 172.

Man kann auf eine ähnliche Art vier Zahlen suchen, die eine zusammenhängende Proportion ausmachen, und wo ebenfalls die Summe der Zahlen selbst und die Summe der Quadrate gegeben ist. Newton gibt hievon in seiner Arithmetica universali, 15ten arithmetischen Aufgabe, folgende Auflösung.

Die Summe der Zahlen selbst seye $= a$; die Summe ihrer Quadrate $= b$.

Man setze die Summe der beyden mittleren Zahlen $= s$ und ihr Produkt $= p$; so ist die Summe der beyden äußern $= a - s$ und das Produkt derselben ebenfalls $= p$. Setzt man nun, um hieraus alle 4 Zahlen zu finden, die 1ste $= x$; die 2te $= y$; so ist die 3te $= s - y$ und die 4te $= a - s - x$; folglich das Produkt der mittlern Zahlen $= sy - y^2 = p$, und die mittlern: $y = \frac{s}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{s^2}{4} - p\right)}$; nämlich $y = \frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s^2}{4} - p\right)} =$ der größern, und $s - y = \frac{s}{2} - \sqrt{\left(\frac{s^2}{4} - p\right)} =$ der kleinern. Eben so das Produkt der äußern: $ax - sx - x^2 = p$; und die äussern selbst: $x = \frac{a - s}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{s^2 - 2as + a^2}{4} - p\right)}$; nämlich $x = \frac{a - s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s^2 - 2as + a^2}{4} - p\right)} =$ der größern, und $a - s - x = \frac{a - s}{2} - \sqrt{\left(\frac{s^2 - 2as + a^2}{4} - p\right)} =$ der kleinern:

Nun suche man die Summe der Quadrate der 4 zu findenden Zahlen. *)

$$y^2 = \frac{s^2}{4} + \left(\frac{s^2}{4} - p\right)$$

$$(s - y)^2 = \frac{s^2}{4} + \left(\frac{s^2}{4} - p\right)$$

$$x^2 = \frac{a^2}{4} - \frac{2as}{4} + \frac{s^2}{4} + \left(\frac{s^2}{4} - \frac{2as}{4} + \frac{a^2}{4} - p\right)$$

---

*) Die doppelten Produkte des 1sten Theils in den 2ten können bey allen 4 Quadraten weggelassen werden, weil sie sich in der Addition aufheben.

$$(a-s-x)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{2as}{4} + \frac{s^2}{4} + \left(\frac{s^2}{4} - \frac{2as}{4} + \frac{a^2}{4} - p\right)$$

Summe der Quadrate $= \frac{8s^2}{4} - \frac{8as}{4} + \frac{4a^2}{4} - 4p$ oder

$2s^2 - 2as + a^2 - 4p = b$, woraus

sich p ergibt, nämlich $\frac{s^2}{2} - \frac{as}{2} + \frac{a^2}{4} - \frac{b}{4} = p$

Wird dieser Werth für p substituirt, so finden sich die 4 Zahlen, als

die beyden mittlern $\begin{cases} \frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{4} - \frac{s^2}{4} + \frac{as}{2} - \frac{a^2}{4}\right)} \\ \frac{s}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{4} + \frac{s^2}{4} + \frac{as}{2} - \frac{a^2}{4}\right)} \end{cases}$

die beyden äußern $\begin{cases} \frac{a-s}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{4} - \frac{s^2}{4}\right)} \\ \frac{a-s}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{4} - \frac{s^2}{4}\right)} \end{cases}$

Nun muß noch der Werth von s selbst gefunden werden. Man substituire, die Rechnung abzukürzen, für die 4 Zahlen $\frac{s}{2} + r$; $\frac{s}{2} - r$; $\frac{a-s}{2} + q$; $\frac{a-s}{2} - q$. Da nun, vermöge der Natur der Aufgabe, das Produkt der 2ten und 4ten Zahl dem Quadrat der 3ten; auch das Produkt der 1sten und 3ten dem Quadrat der 2ten gleich ist, so ist auch: Einmal $\frac{as - s^2}{4} - \frac{qs}{2} + \frac{ar - rs}{2} - rq = \frac{s^2}{4} - rs + r^2$; aber auch $\frac{as - s^2}{4} + \frac{qs}{2} - \frac{ar + rs}{2} - rq = \frac{s^2}{4} + rs + r^2$. Ziehe die erste dieser zwey Gleichungen von der letzten ab

$$\frac{as - s^2}{4} + \frac{qs}{2} - \frac{ar + rs}{2} - rq = \frac{s^2}{4} + rs + r^2$$
$$\frac{as - s^2}{4} - \frac{qs}{2} + \frac{ar - rs}{2} - rq = \frac{s^2}{4} - rs + r^2$$

so bleibt $+ qs - ar + rs = 2rs$

oder $qs = ar + rs$

Nun substituire man für r seinen vorigen Werth $\sqrt{\left(\frac{b}{4}-\frac{s^2}{4}+\frac{as}{2}-\frac{a^2}{4}\right)}$ und für q das vorige $\sqrt{\left(\frac{b}{4}-\frac{s^2}{4}\right)}$; so ist $s\sqrt{\left(\frac{b}{4}-\frac{s^2}{4}\right)}=(a+s)\times\sqrt{\left(\frac{b}{4}-\frac{s^2}{4}+\frac{as}{2}-\frac{a^2}{4}\right)}$; welches zum Quadrate erhoben $s^2=-\frac{bs}{a}+\frac{a^2}{2}=\frac{b}{2}$ oder $s=-\frac{b}{2a}+\sqrt{\left(\frac{b^2}{4a^2}+\frac{a^2}{2}-\frac{b}{2}\right)}$ gibt. Da nun dieß gefunden ist, so sind auch, vermöge des Vorhergehenden, die 4 gesuchten Zahlen gefunden.

Hier wurde vorsetzlich Newtons Auflösung, einige wenigen Erleichterungen abgerechnet, ganz unverändert eingerückt, um Anfängern Gelegenheit zu geben, den Geistes-Gang dieses Mannes in etwas kennen zu lernen, und ihn mit den neuern, ihnen zu Gefallen erleichterten Beyspielen zu vergleichen.

Es seye nun

$a = 30$

$b = 340$, so ist

$\frac{b}{2a}=\frac{17}{3}$	$\frac{b}{2}=170$	$\frac{as}{2}=180$
$\frac{b}{4a^2}=\frac{289}{9}$	$\frac{b}{4}=85$	$\frac{a-s}{2}=9$
$\frac{a^2}{2}=450$	$s=12$	die erste und 4te Zahl =
$\frac{a^2}{4}=225$	$\frac{s}{2}=6$	$=9\pm7=16$ und 2
	$\frac{s^2}{4}=36$	die 2te und 3te Zahl =
		$=6\pm2=8$ und 4;

aber auch

1) $2 : 4 = 4 : 8$ und $4 : 8 = 8 : 16$.
2) $2 + 4 + 8 + 16 = 30 = a$.
3) $4 + 16 + 64 + 256 = 340 = b$.

Aufgabe 59.

§. 173.

Den Unterschied zweyer Quadrate zu finden, deren Wurzeln um Eins verschieden sind.