Jak. Frid. Malers weil. Hochfürstl. Markgräfl. Bad. Kirchenraths und Rectors des Gymnasii Jllustris Algebra zum Gebrauch hoher und niederer Schulen

Maler, Jakob Friedrich

Carlsruhe, 1821

Aufgabe 57

urn:nbn:de:bsz:31-266447

Wurzelgrößen wie andere Zahlen addirt und subtrahirt werden. Z. B. $\sqrt{8}$ und $\sqrt{32}$ geben $2\sqrt{2}$ und $4\sqrt{2}$; daher ist $4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ und $4\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$. Ferner $\sqrt[3]{320}$ und $\sqrt[3]{135}$ gibt $4\sqrt[3]{5}$ und $3\sqrt[3]{5}$; daher ist $\sqrt[3]{320} + \sqrt[3]{135} = 7\sqrt[3]{5}$; und $\sqrt[3]{320} - \sqrt[3]{135} = \sqrt[3]{5}$.

Zusatz 3.

§. 165.

Eben so kann, wenn unter dem Wurzelzeichen einerley Zahlen übrig bleiben, das Verhältniß von 2 solchen Größen bestimmt angegeben werden. Z. B. $\sqrt{63} : \sqrt{252}$ ist $= \sqrt{9 \times 7} : \sqrt{36 \times 7} = 3\sqrt{7} : 6\sqrt{7} = 3 : 6 = 1 : 2$.

Aufgabe 57.

§. 166.

Wurzelgrößen, welche einerley Wurzelexponenten haben, zu multipliciren.

Auflösung.

Diese Größen seyen $\sqrt[n]{a}$ und $\sqrt[n]{b}$. Man setze ihr Produkt $= v$; so ist

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = v \quad \text{nach §. 67. a.}$$

zur Dignität n erhoben $\qquad ab = v^n$ (und $\sqrt[n]{\ }$)

$$\sqrt[n]{ab} = v$$

Daher die Regel: Multiplicire die Größen unter dem Wurzelzeichen wie gewöhnlich, und setze vor das Produkt das gemeinschaftliche Wurzelzeichen. Z. B. $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$; $\sqrt{3} \times \sqrt{12} = \sqrt{36} = 6$; $\frac{1}{2}\sqrt{3} \times \frac{3}{5}\sqrt{5} = \frac{3}{10}\sqrt{15}$; $\sqrt[3]{7} \times \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{14}$; $\sqrt[n]{x^r} \times \sqrt[n]{y^s} = \sqrt[n]{x^r y^s}$

Zusatz 1.

§. 167.

Sollten Wurzelgrößen von verschiedenen Wurzelexponenten multiplicirt werden, so müssen sie vorhin nach §. 66. zu einerley Benennung gebracht werden. Z. B. $\sqrt[3]{16} \times \sqrt{8} = 16^{1/3} \times 8^{1/2} = 16^{2/6} \times 8^{3/6} = \sqrt[6]{256} \times \sqrt[6]{512} = \sqrt[6]{131072}$; $\sqrt[n]{a^r} \times \sqrt[m]{b^s} = \sqrt[mn]{a^{mr}} \times \sqrt[mn]{b^{ns}} = \sqrt[mn]{a^{mr}b^{ns}}$.

Zusatz 2.

§. 168.

Weil Division der Rückweg von der Multiplikation ist, so können auch Wurzelgrößen, wenn sie einerley Exponenten haben, ohne weitere Vorbereitung dividirt, und das vorige Wurzelzeichen davor gesetzt werden. Z. B. $\sqrt{12} : \sqrt{6} = \sqrt{2}$. $\sqrt[3]{18} : \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{6}$. $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ $\sqrt[m]{a^3} : \sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{a^2}$.

Haben sie nicht einerley Exponenten, so bringt man sie, wie im vorigen §., zu gleicher Benennung. Z. B.
$\sqrt{64} : \sqrt[3]{8} = 64^{1/2} : 8^{1/3} = 64^{3/6} : 8^{2/6} = \sqrt[6]{64^3} : \sqrt[6]{8^2} = \sqrt[6]{262144} : \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{4096} = \sqrt[3]{64} = 4$.

Aber auch $\sqrt{64} : \sqrt[3]{8} = 8 : 2 = 4$.

§. 169.

Nun läßt sich die Prüfung mit den Zahlen §. 158. und 160. anstellen.

$$x = 3/2 + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$y = 1/2 + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Summe $x + y = 2 + \sqrt{5}$

Ferner . . $\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ multiplicirt

mit $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$

$$\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}$$

$$+ \frac{3\sqrt{5}}{4} + \frac{5}{4}$$

Produkt $xy = 2 + \sqrt{5}$

Endlich $x^2 = \frac{9}{4} + \frac{3\sqrt{5}}{2} + \frac{5}{4}$ (§. 147.)

$y^2 = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{5}{4}$

$$x^2 - y^2 = 2 + \sqrt{5}$$

Nimmt man aber die zweyte Werthe

$x = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$

$y = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$ so ist

die Summe $x + y = 2 - \sqrt{5}$

Ferner $\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$

$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$

$$\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4}$$

$$- \frac{3\sqrt{5}}{4} + \frac{5}{4}$$

Produkt $xy = 2 - \sqrt{5}$

Endlich $x^2 = \frac{9}{4} - \frac{3\sqrt{5}}{2} + \frac{5}{4}$

$y^2 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{5}{4}$

$$x^2 - y^2 = 2 - \sqrt{5}$$

Hier sind $x + y$, xy und $x^2 - y^2$ negativ (§. 160).

§. 169. a.

Wurzel-Größen zu jeder beliebigen Potenz zu erheben.

Auflösung und Beweis.

Das Quadrat von $\sqrt[n]{b}$ ist $= \sqrt[n]{b} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{b^2}$; Der Kubus $= \sqrt{b^2} \times \sqrt{b} = \sqrt{b^3}$ (§. 166). Also überhaupt die Potenz m von $\sqrt{b} = \sqrt{b^m}$; folglich die allgemeine Regel: Erhebt die unter dem Wurzelzeichen befindliche Größe zur verlangten Potenz. Z. B. Kubus von $\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{125}$.

§. 169. b.

Aus einer Wurzelgröße die Wurzel einer verlangten Potenz zu ziehen. Z. B. $\sqrt{(\sqrt[3]{b})}$

Auflösung und Beweis.

Da $\sqrt[3]{b} = b^{1/3}$ $\sqrt{b} = b^{1/2}$ (§. 66.) folglich auch $\sqrt{b^{1/3}} = b^{1/6}$ und $b^{1/6} = \sqrt[6]{b}$; so ist auch $\sqrt{(\sqrt[3]{b})} = \sqrt[6]{b}$; oder allgemein: $\sqrt[m]{(\sqrt[n]{b})} = \sqrt[mn]{b}$. Daher die Regel:

1) Multiplicirt beyde Wurzel-Exponenten in einander.
2) Setzt ihr Produkt als neuen Wurzel-Exponenten in das einfache Wurzelzeichen der vorigen, unter dem doppelten, dreyfachen rc. Wurzelzeichen stehenden Größe.

Zusatz.

So kann man einer Wurzelgröße, welche mehrere Wurzelzeichen hat, leicht nur Eines verschaffen. Z. B. $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{4}}} = \sqrt[24]{4}$.

Aufgabe 58.

§. 170.

Man sucht drey Zahlen, die eine zusammenhängende Proportion (proportio geometrica continua) ausmachen, aus der Summe dieser Zahlen $= a$; und der Summe ihrer Quadrate $= b$.

Auflösung.

Wenn die erste der drey gesuchten Zahlen $= x$; die 2te y heißt; so ist die 3te $= \frac{y^2}{x}$, und man erhält folgende Gleichungen.