Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Jak. Frid. Malers weil. Hochfürstl. Markgräfl. Bad. Kirchenraths und Rectors des Gymnasii Jllustris Algebra zum Gebrauch hoher und niederer Schulen

Maler, Jakob Friedrich

Carlsruhe, 1821

Aufgabe 56

urn:nbn:de:bsz:31-266447

Visual Library

Nun war $1 + y = x$; daher

$$\frac{1 + \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} = x}{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} = x}$$

Anmerkung 1.

§. 159.

Um die Probe hievon zu machen, muß man mit Wurzel-Größen zu rechnen wissen, wie sogleich gezeigt werden soll.

Anmerkung 2.

§. 160.

Nach §. 67. ist $\sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Weil nun $5 > 4$, so ist $\sqrt{5} > \sqrt{4}$ oder > 2 und $\frac{\sqrt{5}}{2} > \frac{2}{2}$ oder > 1. Daher ist $\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}}$ verneint. Es ist aber auch $\sqrt{5} < 3$, weil $\sqrt{9} = 3$; folglich $\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$ bejaht. Wenn man also in den Werthen von y und x das Minus-Zeichen braucht, so ist der erste verneint, der andere bejaht, und zwar ist, an sich, jener größer als dieser. Dennoch aber bleibt es wahr, daß y die kleinere Größe ist, denn man sieht ja jede verneinte Größe für kleiner an, als jede bejahte. (§. 151. IV.) Wenn daher $y = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$ verneint; $x = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$ aber bejaht ist, so geben sie ein verneintes Produkt xy (§. 41.), folglich muß auch ihre Summe $x + y$, die dem Produkt gleich seyn soll, verneint seyn. Auch ist ja zum bejahten x das verneinte größere y addiren, so viel als, vom bejahten x etwas positives Größeres abziehen. (§. 31.) Ein Weiteres hierüber wird im §. 169. vorkommen.

Aufgabe 56.

§. 161.

Eine Zahl, die mit einer Wurzelgröße multiplicirt ist, mit unter das Wurzelzeichen zu bringen.

Auflösung.

Es seye a, bey $a \sqrt[n]{b}$ unter das Wurzelzeichen zu bringen. Man setze einstweilen

$$a\sqrt[n]{b} = v \qquad \text{nach §. 67. a.}$$

$$\text{zur Dignität n erhoben } a^n\, b = v^n \quad (\text{und } \sqrt[n]{\ })$$

$$\sqrt[n]{a^n\, b} = v$$

Hieraus folgt die Regel: Erhebe die Zahl vor dem Wurzelzeichen zur Dignität des Wurzelexponenten und multiplicire diese Dignität mit der Zahl unter dem Wurzelzeichen, so ist geschehen, was man verlangte.

Anmerkung.

§. 162.

Folgende Beyspiele erläutern die gegebene Regel. $3\sqrt{2} = \sqrt{18}$; $2\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{32}$; $\frac{1}{2}\sqrt{7} = \sqrt{\frac{7}{4}}$; $2\sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{48}$; $x\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{abx^3}$; $\frac{1}{n}\sqrt{ab} = \sqrt{\left(\frac{ab}{n^2}\right)}$; und $\frac{a-c}{d+f}\sqrt{g}$ ist $= \sqrt{\left(\frac{(a-c)^2\, g}{(d+f)^2}\right)} = \sqrt{\left(\frac{(a^2-2ac+c^2)\, g}{d^2+2df+f^2}\right)}$ ꝛc.

Zusatz 1.

§. 163.

Es erhellt hieraus ferner: daß, wenn man die Zahl unter dem Wurzelzeichen mit einer Dignität des Wurzelexponenten dividirt, die Wurzel dieser Dignität als Coefficient vor das Wurzelzeichen gesetzt werden könne. Z. B. $\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{108} = \sqrt[3]{27 \times 4} = 3\sqrt[3]{4}$; $\sqrt{\frac{5}{4}} = \sqrt{5 \times \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$; $\sqrt[n]{x^n\, b} = x\sqrt[n]{b}$; $\sqrt{4\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{9}{2}} = 3\sqrt{\frac{1}{2}}$ oder auch $\sqrt{\frac{9}{2}} = \sqrt{\frac{18}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$; $\sqrt{5} = 2\sqrt{\frac{5}{4}}$.

Zusatz 2.

§. 164.

Wenn nach dergleichen vorgenommenen Reduktionen einerley Zahlen unter dem Wurzelzeichen bleiben, so können

Wurzelgrößen wie andere Zahlen addirt und subtrahirt werden. Z. B. $\sqrt{8}$ und $\sqrt{32}$ geben $2\sqrt{2}$ und $4\sqrt{2}$; daher ist $4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ und $4\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$. Ferner $\sqrt[3]{320}$ und $\sqrt[3]{135}$ gibt $4\sqrt[3]{5}$ und $3\sqrt[3]{5}$; daher ist $\sqrt[3]{320} + \sqrt[3]{135} = 7\sqrt[3]{5}$; und $\sqrt[3]{320} - \sqrt[3]{135} = \sqrt[3]{5}$.

Zusatz 3.

§. 165.

Eben so kann, wenn unter dem Wurzelzeichen einerley Zahlen übrig bleiben, das Verhältniß von 2 solchen Größen bestimmt angegeben werden. Z. B. $\sqrt{63} : \sqrt{252}$ ist $= \sqrt{9 \times 7} : \sqrt{36 \times 7} = 3\sqrt{7} : 6\sqrt{7} = 3 : 6 = 1 : 2$.

Aufgabe 57.

§. 166.

Wurzelgrößen, welche einerley Wurzelexponenten haben, zu multipliciren.

Auflösung.

Diese Größen seyen $\sqrt[n]{a}$ und $\sqrt[n]{b}$. Man setze ihr Produkt $= v$; so ist

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = v \quad \text{nach §. 67. a.}$$

zur Dignität n erhoben $\quad ab = v^n$ (und $\sqrt[n]{\ }$)

$$\sqrt[n]{ab} = v$$

Daher die Regel: Multiplicire die Größen unter dem Wurzelzeichen wie gewöhnlich, und setze vor das Produkt das gemeinschaftliche Wurzelzeichen. Z. B. $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$; $\sqrt{3} \times \sqrt{12} = \sqrt{36} = 6$; $\frac{1}{2}\sqrt{3} \times \frac{3}{5}\sqrt{5} = \frac{3}{10}\sqrt{15}$; $\sqrt[3]{7} \times \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{14}$; $\sqrt[n]{x^r} \times \sqrt[n]{y^s} = \sqrt[n]{x^r y^s}$