Jak. Frid. Malers weil. Hochfürstl. Markgräfl. Bad. Kirchenraths und Rectors des Gymnasii Jllustris Algebra zum Gebrauch hoher und niederer Schulen

Maler, Jakob Friedrich

Carlsruhe, 1821

Aufgabe 54

urn:nbn:de:bsz:31-266447

Daher waren im ersten Haufen $8 + 4 = 12$; im 2ten 8; in beyden zusammen $12 + 8 = 20$ Mann, und das Geld betrug $20 + 172 = 192$ fl.

Die nämliche Größe wird getheilt, einmal in x, dann in $x + c$ gleiche Theile. Der Unterschied der Größe dieser Theile ist $= d$; die zu theilende Größe = der Anzahl aller Theile $+ a$. Wie groß ist die Anzahl aller Theile?

Antwort:

$$2.\left[-\frac{cd}{2d}+\frac{2c}{2d}\pm\sqrt{\left(\frac{c^2}{d}+\frac{ac}{d}+\frac{c^2d^2-4c^2d+4c^2}{4d^2}\right)}\right]+c$$

Aufgabe 54.

§. 155.

Aus dem gegebenen Produkt zweyer Zahlen und ihrer Summe die Zahlen selbst zu finden.

Auflösung.

Das Produkt sey $= a$; die Summe $= b$; die eine gesuchte Zahl $= x$; die andere $= y$; so ist

$$xy = a \qquad x + y = b$$

$$x = \frac{a}{y} \qquad x = b - y \text{ daher}$$

$$\frac{a}{y} = b - y$$

$$a = by - y^2$$

Weil nun y^2 negativ ist, ein Quadrat aber nie negativ seyn kann, (§. 151. V.) so muß y^2 addirt, by aber subtrahirt werden.

$$y^2 - by + a = 0$$

$$y^2 - by = -a \left(+\frac{b^2}{4}\right)$$

$$y^2 - by + \frac{b^2}{4} = \frac{b^2}{4} - a \text{ (und } \sqrt{}\text{)}$$

$$y - \frac{b}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{b^2}{4} - a\right)}$$

$$y = \begin{cases} \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b^2}{4} - a\right)} \\ \frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b^2}{4} - a\right)} \end{cases}$$

Man findet also zwey Werthe für y; und weil $x = b - y$, so ist: $x = b -$

$$\left[\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b^2}{4} - a\right)}\right] = \frac{b}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{b^2}{4} - a.\right)}$$

Setzt man nämlich $y = \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b^2}{4} - a\right)}$

so ist $x = \frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b^2}{4} - a\right)}$

Setzt man aber $y = \frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b^2}{4} - a\right)}$

so ist $x = \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b^2}{4} - a\right)}$

Es ist klar, daß die beyden letzten Werthe von x und y die vorigen, nur verwechselt sind. Man hat nämlich, von x in der Rechnung nichts angenommen, das sich nicht auch von y annehmen ließe. Denn, wenn man $xy = a$; $x + y = b$ setzt, so ließe sich eben so gut $yx = a$; und $y + x = b$ setzen, oder man könnte die Zahl y nennen, die man x genannt hatte. Wenn man also zuletzt y durch lauter gegebene Größen ausdrückt, so muß dieser Ausdruck auch zugleich x bedeuten können.

Anmerkung 1.

§. 156.

In der eben erwähnten Erinnerung liegt der Grund, warum die unbekannte Größe einer Gleichung oft mehr als Einen Werth hat. Man fragt nämlich oft nicht nach einer einzigen Sache, sondern nach vielen zugleich. Die Antwort muß also alle diese Sachen zugleich angeben. Hier fragte man zwar, wie es scheint, nur nach y; man sagte aber von diesem y nichts, was sich nicht auch von x sagen ließe, und fragte daher zugleich nach x und y.

Anmerkung. 2.

§. 157.

Hieraus fließt die Regel: Richtet, wo möglich, die Frage so ein, daß ihr nur einerley fragt, so wird auch die Antwort einfach. In der nämlichen Aufgabe, (§. 110.) suchte man beyder Zahlen halbe Differenz, diese konnte betrachtet werden, insofern sie zur halben Summe addirt, oder davon abgezogen wird. Daher ist sie entweder positiv oder negativ; ihre Größe aber beydemal einerley, nur das Zeichen unterschieden. Deßwegen fand man sie durch eine reine quadratische Gleichung. (§. 151. III.) Hier aber sind x und y nicht gleich, und doch findet man y aus keiner andern Betrachtung, als aus der man x finden würde. Daher wird die quadratische Gleichung unrein, damit y zwey unterschiedene Werthe bekommen kann, wovon einer x ist. Hätte man x gesucht, so hätte die Gleichung eben so zwey Werthe gegeben, davon einer y wäre.

Aufgabe 55.

§. 158.

Zwey Zahlen zu finden, deren Summe, Produkt und Differenz der Quadrate gleich sind.

Auflösung.

Die Größere seye $= x$; die kleinere $= y$; so ist I. $xy = x + y$ II. $x + y = x^2 - y^2$. Da aber $x^2 - y^2 = (x + y) \times (x - y)$ wie man sich leicht durch (§. 47.) überzeugen kann; so verwandelt sich die Gleichung II. in $x + y = (x + y) \times (x - y)$ (daher: $x + y$)

$$1 = x - y$$
$$+ y \qquad + y$$
$$1 + y = x$$ Dieß in I substituirt,

gibt $1 + y \times y = 1 + y + y$ oder

$$y + y^2 = 1 + 2y$$
$$- y \qquad - y$$
$$y^2 = y + 1$$

oder $y^2 - y = 1$ (wo $\frac{p}{2} = \frac{1}{2}$)

$$y^2 - y + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4}$$ $\sqrt{}$
$$y - \frac{1}{2} = \pm \sqrt{\frac{5}{4}}$$
$$y = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}}$$