Jak. Frid. Malers weil. Hochfürstl. Markgräfl. Bad. Kirchenraths und Rectors des Gymnasii Jllustris Algebra zum Gebrauch hoher und niederer Schulen

Maler, Jakob Friedrich

Carlsruhe, 1821

Aufgabe 51

urn:nbn:de:bsz:31-266447

Eben so könnte man durch einen Versuch gefunden haben, daß das Quadrat der Zahl 5 übrig bleibt, wenn man 55 von ihrem 16fachen abzieht, das ist, daß $5 \times 5 = 16 \times 5 - 55$; oder auf beyden Seiten 55 addirt $= 5 \times 5 + 55 = 16 \times 5$, und auf beyden Seiten 16×5 abgezogen $5 \times 5 - 16 \times 5 + 55 = 0$; welches algebraisches Räthsel durch die Gleichung A ausgedrückt ist.

Weil man durch Addiren und Subtrahiren immer, welche Glieder der Gleichung man will, auf eine oder die andere Seite des Gleichheits-Zeichens bringt, so läßt sich jede unreine quadratische Gleichung auf die Art, wie C, ausdrücken. Nun können p, q, was für Zahlen man will, bejahte oder verneinte, bedeuten, und so stellt C jede unreine quadratische Gleichung vor.

Mit der Gleichung A z. B. muß man, um sie auf die Form von C zu bringen, folgende Vorbereitung machen:

$$\frac{x^2 - 16x + 55 = 0}{x^2 - 16x = \quad -55}$$

Eine bekannte Größe, welche mit irgend einer Potenz der unbekannten multiplicirt ist, heißt der Coefficient jener Potenz. In A sind die Coefficienten: 1 beym Quadrat; -16 bey der ersten Potenz und $+55$ bey x^0 (§. 60). In B sind sie: 1 beym Quadrat, 4 bey der ersten Potenz und 21 bey der, deren Exponent $= 0$. In C sind sie: 1 bey der zweyten; p bey der ersten und q bey der, deren Exponent $= 0$.

Aufgabe 51.

§. 151.

Eine unreine quadratische Gleichung aufzulösen.

Auflösung.

I. Zur Vorbereitung ist zu zeigen nöthig, wie reine quadratische Gleichungen aufgelöset werden, worin nämlich allein das Quadrat der unbekannten Größe, und nicht zugleich auch ihre erste Potenz enthalten ist, wie §. 106. 107. 110. 112.

Man suche nämlich die Zahl, deren Quadrat, $= f$, also $z^2 = f$, so ist $z = \sqrt{f}$.

Diese Quadrat-Wurzel aus f mag als bejaht oder als verneint angesehen werden, so gibt sie beydemal einerley bejahtes Quadrat. (§ 41.) Folglich ist z entweder $+\sqrt{f}$ oder $-\sqrt{f}$, welches man so ausdrückt: $z = \pm\sqrt{f}$.

Beispiel.

Man suche die Zahl, deren Quadrat 25 ist, oder es seye $z^2 = 25$; so ist $f = 25$ und $\sqrt{f}$ oder $z = +5$ aber auch $= -5$; denn $(+5)^2 = +25$, und $(-5)^2 = +25$.

II. Es gibt Fälle, wo die Natur der Frage nicht verstattet, die Zahl, die man sucht, für verneint anzunehmen. So war (§. 106.) $(-15)^2$ eben sowohl $= +225$, als $(+15)^2$: Und (§. 107.) entsteht das Quadrat $+4$ eben sowohl von -2 als von $+2$. Aber weder die Menge von Hauptleuten, noch die Breiten können verneint seyn. Also entscheidet hier die besondere Bedeutung der Zahlen etwas, welches die bloß arithmetische Auflösung unbestimmt ließe. Nämlich in den beyden Gleichungen $225 = x^2$ und $x^2 = 4$ kann x an sich sowohl etwas bejahtes als etwas verneintes bedeuten; aber eine verneinte Größe kann das nicht bedeuten, was in den Aufgaben gesucht wird.

III. Manchmal ist's gleichgültig, ob man den bejahten oder verneinten Werth brauchen will. Im §. 110 sollte man eigentlich endigen: $x = \pm\sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$. Das obere

Zeichen gäbe die größere Zahl $\left(\frac{a}{2} + x\right) = \frac{a}{2} + \left(+\sqrt{\frac{a^2}{4} - b}\right)$

und die kleinere $\left(\frac{a}{2} - x\right) = \frac{a}{2} - \left(+\sqrt{\frac{a^2}{4} - b}\right)$

Das untere Zeichen hingegen gäbe die kleinere . . . $\left(\frac{a}{2} + x\right) = \frac{a}{2} + \left(-\sqrt{\frac{a^2}{4} - b}\right)$

und die größere $\left(\frac{a}{2} - x\right) = \frac{a}{2} - \left(-\sqrt{\frac{a^2}{4} - b}\right)$ (§. 35.)

Das ist: $\frac{a}{2} + x$ wurde nun die kleinere, $\frac{a}{2} - x$ die größere, weil x etwas verneinendes bedeutet.

IV. Bey solchen Umständen, wie II und III, muß man doch den Grund anzugeben wissen, warum man von den beyden Werthen der unbekannten Größe nur den bejahten braucht. In andern Fällen aber erhält man nicht alle Zahlen, die der Frage genug thun, wenn man nicht auf diese Zweydeutigkeit der Wurzel Acht gibt. So ist eigentlich (§. 112.) $x = \pm \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} + b.\right)}$ Das untere Zeichen gibt für die dort gesuchten Zahlen zwey verneinte Werthe. Im dortigen Beyspiel ist nämlich $x = \pm 8$, und beym Gebrauch des untern Zeichens die eine Zahl $-8 + 6 = -2$; die andere $-8 - 6 = -14$. Dieser beyden Zahlen halbe Summe ist -8; ihre Differenz ist, was heraus kommt, wenn man -14 von -2 abzieht, oder $(-2) - 14 = +12$ (§. 37). Ihr Produkt $-14 \times -2 = +28$ (§. 47). (Die Differenz zu finden, ziehe ich -14 von -2 ab, weil -14 für kleiner als -2 anzusehen ist; denn von zwey negativen Zahlen ist die größere negative als die kleinere angesehen. Dieß gründet sich darauf: **Kleiner** heißt dasjenige, wozu etwas **hinzukommen**, also etwas bejahtes addirt werden muß, das größere zu erhalten. So ist 5 kleiner als 12, weil 7 zu 5 kommen muß, um 12 zu erhalten. Wenn man nun -14 in -2 verwandeln will, so muß man $+12$ zu -14 addiren, das ist, es muß $+12$ zu -14 kommen, damit -2 daraus wird. Also ist -14 kleiner als -2. Diese Bemerkung, daß eine größere negative Zahl kleiner als die nicht so große negative ist, hat überall ihren Nutzen, wo man größere und kleinere Zahlen gegen einander hält. In eben der Bedeutung sagt man: Jede verneinte Größe seye **weniger als Nichts**, weil man zu ihr etwas addiren muß, um **Nichts** zu bekommen. Z. B. zu -3 muß

$+ 3$ addirt werden, und dann ist erst $- 3 + 3 = 0$. Daher ist noch vielmehr jede verneinte Größe kleiner als jede bejahte, da die bejahte immer mehr als Nichts ist. So ist $- 10$ kleiner als $+ 2$, denn man muß $+ 12$ zu 10 addiren, um $+ 2$ daraus zu machen).

V. Man erinnere sich ferner, daß jedes Quadrat eine bejahte Größe ist. Ein verneintes Produkt entsteht aus 2 Faktoren nur dann, wenn sie entgegengesetzte Zeichen haben. So ist $+ 5 \times - 5 = - 25$, aber kein Quadrat, denn $+ 5$ ist nicht einerley mit $- 5$; so wenig es einerley ist 5 fl. besitzen, und 5 fl. schuldig seyn. Wenn also nicht $+ 5 = - 5$ ist, so ist auch $- 25$ kein Produkt aus 2 gleichen Faktoren. (§. 53. und 57.)

VI. Wer also eine verneinte Größe ein Quadrat nennt, der sagt etwas, das sich selbst widerspricht. Wer das z in der Gleichung $z^2 = - 25$ anzugeben verlangt, der verlangt etwas unmögliches. Man würde dieß so ausdrücken: $z = + \sqrt{- 25}$. Eine Quadrat-Wurzel aus einer verneinten Größe ist also nichts, als ein Zeichen ohne Begriff. Deßwegen heißt sie auch, nach §. 66. a, eine unmögliche Größe, quantitas imaginaria.

VII. Wenn man bey Auflösung einer Aufgabe auf solche unmögliche Größen kommt, so zeigt dieß an, daß man etwas Unmögliches verlange. Dergleichen wäre im §. 110, wenn $\frac{a^2}{4} < b$. Man fand nämlich in der Rechnung, welche zur dortigen Auflösung führte, daß $\frac{a^2}{4} - x^2 = b$. Nun ist x^2 immer etwas bejahtes (V.) also immer $\frac{a^2}{4} - x^2 < \frac{a^2}{4}$. (§. 29.) Weil nun b herauskommt, wenn man $\frac{a^2}{4}$ um etwas vermindert, so ist immer $\frac{a^2}{4} > b$. Man setze $a = 12$; $b = 52$; so wäre $x = \sqrt{36 - 52} = \sqrt{- 16}$. Weil nun $- 16$ kein Quadrat seyn kann, so kann es auch keine Zahlen geben, deren Summe 16 und das Produkt 52 wäre.

VIII. Nun kann man zur Auflösung der unreinen quadratischen Gleichungen schreiten. Es wird, der Deutlichkeit wegen, gut seyn, zuerst ein Beyspiel vorzunehmen.

IX. Bey der Gleichung A verfahre man so:

$$\frac{x^2 - 16x + 55 = 0}{x^2 - 16x = -55}$$

so ist sie nach §. 150. auf die allgemeine Form gebracht. Jetzt nehme man die Hälfte des Coefficienten (§. 150.) bey x, sie ist -8; und nun mache man das Quadrat von $x - 8$. Dieß ist $x^2 - 16x + 64$ (§. 147.) Man würde also $x^2 - 16x$ in dieß Quadrat verwandeln, wenn man $+ 64$ dazu addirte. Aber, die Gleichheit zu erhalten, muß man eben diese 64 zu $- 55$ addiren. So steht die Rechnung folgendermaßen:

$$\begin{array}{rcl} x^2 - 16x & = & -55 \\ +64 & & +64 \\ \hline x^2 - 16x + 64 & = & 64 - 55 = +9, \text{ das ist} \\ \hline (x-8)^2 & = & 9 \text{ folglich} \\ \hline x - 8 & = & \pm\sqrt{9} \\ \hline x - 8 & = & \pm 3 \\ +8 & & +8 \\ \hline x & = & 8 \pm 3 \end{array}$$

Dieß gibt also x entweder $= 11$ oder $= 5$. Wer also die (§. 150.) beschriebene erste Gleichung durch einen Versuch mit der 5 gefunden hätte, und sie als ein Räthsel aufgäbe, der würde zu seiner Verwunderung finden, daß die Antwort auf sein Räthsel nicht nur 5, sondern auch 11 ist. Denn $11^2 - 16 \times 11 + 55 = 121 - 176 + 55 = 0$.

X. Aus dem Verfahren mit diesem Beyspiel kann man leicht die allgemeine Methode einsehen. Die beyden Theile der

Gleichung, welche das Quadrat der unbekannten Größe und ihre erste Potenz enthalten, sehe man als zwey Glieder eines Quadrats an, dessen Wurzel, aus der unbekannten Größe und einer bekannten bestände. Diese bekannte muß die Hälfte des Coefficienten bey x seyn, bejaht oder verneint, wie derselbige ist. Man macht also das Quadrat dieser Hälfte, und addirt solches zu den beyden Theilen der Gleichung, welche der unbekannten Größe Quadrat und ihre erste Potenz enthalten. So machen diese beyden Theile mit dem, was man dazu addirt, zusammen ein Quadrat aus, dessen Wurzel die unbekannte Größe und die Hälfte des Coefficienten bey x sind. Um nun die Gleichheit zu erhalten, muß man das Quadrat des halben Coeficienten auch zur bekannten Zahl addiren, die man zuvor auf die Seite des Gleichheits-Zeichens, den unbekannten gegenüber gebracht hat.

XI. Nach diesen vorläufigen Betrachtungen wird man verstehen können, wie mit der Gleichung $x^2 + px = q$ zu verfahren ist, welche Gleichung bekanntlich alle unreinen quadratischen Gleichungen vorstellt. Man suche das, was auf der linken Seite addirt werden muß, um ein vollkommenes Quadrat zu erhalten. Dieß heraus zu bringen, erhebe man $x + a$ zum Quadrat, d. i. $x^2 + 2ax + a^2$ (§ 147.) und setze, es soll $2ax = px$ seyn, so ist, wenn man p z. B. negativ annimmt, $2a = - p$ und $a = - \frac{p}{2}$; auch $x + a = x - \frac{p}{2}$. Man muß also das Quadrat von $x - \frac{p}{2}$ machen, dieß ist $x^2 - px + \frac{p^2}{4}$. Hierein nun $x^2 - px$ zu verwandeln, muß $\frac{p^2}{4}$ dazu addirt werden.

$$\begin{array}{r}
x^2 - px = q \\
+ \frac{p^2}{4} + \frac{p^2}{4} \\
\hline
x^2 - px + \frac{p}{2} = \frac{p^2}{4} + q \text{ oder} \\
\hline
\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} + q \ (\sqrt{\ }) \\
\hline
x - \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p^2}{4} + q\right)} \\
+ \frac{p}{2} \quad + \frac{p}{2} \\
\hline
x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p^2}{4} + q\right)}
\end{array}$$

nach welcher Formel alle quadratischen Gleichungen aufgelößt werden, wenn man nur, statt p und q, die gehörigen Werthe setzt. Z. B. in A (§. 150.) ist $p = -16$; $q = -55$; also $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ oder $\frac{p^2}{4} = 64$; und $\frac{p^2}{4} - q = 64 - 55 = +9$; folglich $x = 8 \pm \sqrt{9}$, wie in IX. Vermöge der gegenwärtigen Rechnung mit den Buchstaben erspart man sich also die Mühe, die Rechnung für jede Aufgabe in Zahlen besonders zu wiederholen. So ist in B (§. 150.) nachdem man die Gleichung auf die allgemeine Form gebracht, und hierdurch $x - 4x = 21$ erhalten hat, $p = -4$; $q = 21$; also $\frac{p^2}{4} + q = 4 + 21 = 25$ und die Quadrat-Wurzel daraus $= 5$; folglich $x = 2 \pm 5$. Hier ist der eine Werth von $x = 7$, der andere $= -3$; nämlich $+ 7 \times 7 = 4 \times 7 + 21$ und $(-3)^2$ d. i. $9 = 4 \times -3 + 21$; indem $4 \times -3 = -12$, und $-12 + 21 = +9$.

Zusatz.

§. 152.

In jeder quadratischen Gleichung hat die unbekannte Größe zwey Werthe. Diese Werthe sind, wenn die Gleichung die Form wie die in C (§. 150.) hat, beyde möglich, so fern $\frac{p^2}{4} + q$ bejaht; beyde unmöglich, wenn diese Größe verneint ist. Nun ist

$\frac{p^2}{4}$, als das Quadrat der Hälfte des Coefficienten von x, immer bejaht, der Coefficient selbst mag bejaht oder verneint seyn. (§. 151. V.) Ist also die bekannte Zahl q bejaht, (wie in B) so sind immer beyde Wurzeln möglich. Ist aber die gegebene Zahl etwas verneintes (wie in A) so muß sie kleiner als das Quadrat des halben Coefficienten seyn, wenn beyde Werthe von x möglich und unterschieden seyn sollen. Ist sie gerade so groß, so sind beyde Werthe gleich; ist sie größer, so sind beyde Werthe unmöglich.

Beyspiel für gleiche Werthe.

$$x^2 = 6x - 9 \text{ oder}$$

$$x^2 - 6x = -9, \text{ wo } \frac{p}{2} = -3; \text{ daher}$$

$$x^2 - 6x + 9 = -9 + 9$$

$$x - 3 = \pm\sqrt{-9+9}$$

$$x = 3 \pm \sqrt{0} = 3$$

Beyspiel für unmögliche Werthe.

$$x^2 = 8x - 20 \text{ oder}$$

$$x^2 - 8x = -20, \text{ wo } \frac{p}{2} = -4; \text{ daher}$$

$$x^2 - 8x + 16 = 16 - 20$$

$$x - 4 = \pm\sqrt{16-20}$$

$$x = 4 \pm \sqrt{-4}$$

Es gibt also keine Zahl, deren Quadrat herauskäme, wenn man 20 von ihrem 8fachen abzieht.

Aufgabe 52.

§. 153.

Ein Hauptmann theilt 1200 fl. unter seine Soldaten, und ein anderer eben so viel unter die seinigen aus. Der letztere hatte 40 Mann weniger als der erstere, daher erhält jeder von den letztern 5 fl. mehr, als einer von den erstern.