Jak. Frid. Malers weil. Hochfürstl. Markgräfl. Bad. Kirchenraths und Rectors des Gymnasii Jllustris Algebra zum Gebrauch hoher und niederer Schulen

Maler, Jakob Friedrich

Carlsruhe, 1821

Aufgabe 49

urn:nbn:de:bsz:31-266447

merken: Das Silber wird nach der Mark, oder 16 Loth geschätzt. Wenn also in 16 Lothen 13 Loth Silber und 3 Loth Kupfer enthalten sind, so nennt man's 13löthiges Silber. Das unter das Silber gemischte Kupfer aber wird angesehen, als hätte es keinen Werth. Es soll z. B. aus 14 und 8löthigem Silber 13löthiges zusammengeschmolzen werden; wie viel muß man vom feinern und schlechtern nehmen? Antwort: zu 1 Lth 13löthigem vom feinern 5/6, und vom schlechtern 1/6 Lth.

Anmerkung 2.

§. 144.

Hieher gehört auch Archimeds Kronen-Probe. König Hiero gab einem Goldschmied 18 Pfund Gold, eine Krone daraus zu verfertigen. Die Krone hatte zwar das Gewicht, man merkte aber, daß Silber darunter seye. Archimeden wurde aufgetragen, die Sache zu untersuchen. Er fand, daß ein in's Wasser gehängter Körper etwas weniger wäge, nämlich so viel, als das Wasser wog, dessen Platz er eingenommen hatte. Nun nimmt aber ein Pfund Gold weniger Platz ein, als ein Pfund Silber, weil jenes von schwererer Art ist, als dieses. Daher verliert auch jenes weniger von seinem Gewicht im Wasser, als dieses; ein aus beyden aber vermischtes mehr als Gold und weniger als Silber. Wie daraus zu finden, wie viel in jedem Klumpen enthalten seye, zeigt der folgende §.

Aufgabe 49.

§. 145.

Aus dem gegebenen Gewichte eines aus zweyerley Metallen zusammengeschmolzenen Klumpens, und wie viel solcher am Gewicht verliert, deßgleichen, wie viel ein gleich schweres, für sich ungemischt im Wasser verliert, zu finden, wie viel von jedem Metalle im Klumpen seye?

Auflösung.

Der Klumpen wäge . . . . $= p$
Er verliere im Wasser . . . . $= c$
Das schwerere Metall vom gleichem Gewichte
verliere . . . . $= a$
Das leichtere . . . . $= b$
Der Theil vom leichtern seye . . . . . . $= x$
So ist der Theil vom schwerern . . . . . $= p - x$
Wenn das Gewicht p vom leichtern verliert $= b$
So verliert x . . . . $= \frac{bx}{p}$
Und der Theil des schwerern . . . . . . $= \frac{ap - ax}{p}$

Beyde zusammen $\frac{bx + ap - ax}{p} = c$

$$bx + ap - ax = cp$$

$$bx - ax = cp - ap$$

$$(b - a)x = (c - a)p$$

$$x = \frac{(c - a)p}{b - a}.$$

Das schwerere wird seyn $p - x$ oder $p - \frac{(c - a)p}{b - a} =$
$p - \frac{cp - ap}{b - a} = \frac{bp - ap - cp + ap}{b - a} = \frac{bp - cp}{b - a} =$
$\frac{(b - c)p}{b - a}$. Gesetzt die 18 Pfund wiegende Krone verlor im Wasser $1\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ Pfund. Da nun 18 Pfund Gold 1 Pfund, 18 Pfund Silber aber $1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ Pfund verlieren, so ist $p = 18$; $c = \frac{4}{3}$; $a = 1$; $b = \frac{3}{2}$; folglich $x = \frac{(\frac{4}{3} - 1) \times 18}{\frac{2}{3} - 1}$
$= \frac{\frac{1}{3} \times 18}{\frac{1}{2}} = \frac{2 \times 18}{3} = 2 \times 6 = 12$. Und so viel Pfund Silber waren in der Krone, hingegen $18 - 12 = 6$ Pfund waren Gold darin.

Prüfung.

Sucht durch folgende Proportion, wie viel 12 Pfund Silder im Wasser verlieren: $18 : 12 = \frac{2}{3} : \frac{3 \times 12}{2 \times 18} = 1$. Also verlieren 12 Pfund Silber 1 Pfund, da $\frac{3}{2}$ Pfund, oder der Verlust, den 12 Pfund Silber im Wasser leiden, der 12te Theil von 18 Pfunden ist. Eben so ist der Verlust, den 18 Pfund Gold leiden, der 18te Theil von 18 Pfunden. Folglich werden 6 Pfund Gold auch ihren 18ten Theil, das ist $\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$ Pfund verlieren. Mithin verlieren die 12 Pfund Silber und 6 Pfund Gold zusammen $1 + \frac{1}{3}$ Pfund, wie oben gefunden wurde.

Diese Rechnung setzt voraus, daß, wenn 12 Pfund Silber und 6 Pfund Gold mit einander vermischt sind, jenes 1, dieses $\frac{1}{3}$ Pfund verlieren werde, so wie jedem widerführe, wenn es mit dem andern unvermischt wäre. Allein diese Voraussetzung muß geprüft werden, und die Prüfung wird sie nicht bestätigen. Man sehe Kästners Anfangsgründe der angewandten Mathematik, Hydrostatik (§. 54). Nach denen daselbst (§. 49.) angegebenen Zahlen, wird für den Verlust des Goldes und Silbers etwas anders gesetzt.

Zusatz.

§. 146.

Also verhält sich das leichtere zum schwerern, wie $\frac{(c - a)p}{b - a} : \frac{(b - c)p}{b - a}$, oder wie $c - a : b - c$.

§. 146. a.

Die Aufgabe des §. 145 läßt sich auch auf folgende Art auflösen.

Es seye das Gold . . . $= x$
das Silber . . . . . $= y$
das Gewicht der Krone . $= d$
d Gold treibe aus a Maaß
d Silber treibe aus b Maaß
did Krone treibe aus c Maaß;

so treibt x aus $\frac{ax}{d}$, und y treibt aus $\frac{by}{d}$.

Nun ist 1) $x + y = d$ und 2) $\frac{ax + by}{d} = c$

$$x = d - y \qquad ax + by = cd$$

$$ax = cd - by$$

$$x = \frac{cd - by}{a}$$

$$\|$$

$$d - y = \frac{cd - by}{a}$$

$$ad - ay = cd - by$$

$$by - ay = cd - ad$$

$$y = \frac{(c - a)d}{b - a}$$

Folglich $x = d - \frac{(c - a)d}{b - a}$

$$x = bd - ad - cd + ad$$

$$x = \frac{(b - c)d}{b - a}$$

Aufgabe 50.

§. 147.

Die Eigenschaften des Quadrats zu finden, wenn die Wurzel zwey Theile hat.

Auflösung.

Die 2 Theile seyen a und b, so ist die Wurzel $= a + b$; folglich $(a + b) \times (a + b) =$ ihrem Quadrat oder $a^2 + 2ab + b^2$. Hieraus ist klar, daß das Quadrat drey Theile habe, wenn die Wurzel zwey hat, nämlich:

1) das Quadrat des ersten Theils a^2,
2) das doppelte Produkt des ersten a in den andern $b = 2ab$,
3) das Quadrat des zweyten Theils b^2.