Jak. Frid. Malers weil. Hochfürstl. Markgräfl. Bad. Kirchenraths und Rectors des Gymnasii Jllustris Algebra zum Gebrauch hoher und niederer Schulen

Maler, Jakob Friedrich

Carlsruhe, 1821

Aufgabe 46

urn:nbn:de:bsz:31-266447

das ist: Wie sich die Differenz der Geschwindigkeiten zur größern Geschwindigkeit verhält, so die Entfernung zum Raume, den der schnellere Körper durchlaufen muß.

Anmerkung.

§. 127.

Niemand wird's befremden, daß die Proportion (§. 124) $b : c = x : a + x$ in die Gleichung $cx = ab + bx$ verwandelt wurde. Ist doch aus den Anfangsgründen der Arithmethik bekannt, daß in jeder Proportion das Produkt der beyden äußern Glieder dem Produkt der beyden mittlern gleich seye.

Aufgabe 46.

§. 128.

Ein Haas hat 780 Sprünge vor einem Hund voraus. Der ihn verfolgende Hund thut 4 Sprünge, bis der Haas 3 thut; und 7 Haasen-Sprünge betragen 5 Hunds-Sprünge. Wie viel Sprünge kann der Haas noch thun, bis ihn der Hund einholt?

Auflösung.

Könnte man die Geschwindigkeiten des Haasens und Hundes miteinander vergleichen, so ließe sich diese Aufgabe, wie die vorige auflösen. Diese Vergleichung geschieht folgendermaßen. Der Hund legt durch 5 Sprünge so viel Raum zurück, als der Haase durch 7. In dieser Bedeutung gleichen 5 Hundssprünge 7 Haasensprüngen, oder 1 Hundssprung $= \frac{7}{5}$ Haasensprüngen. Nun thut der Hund 4 Sprünge in der Zeit, da der Haase 3 thut. Der Hund legt also einen Raum von $4 \times \frac{7}{5}$ Haasensprüngen in der Zeit zurück, in welcher der Haase einen Raum von 3 seiner Sprünge zurück legt. Also verhalten sich die Geschwindigkriten des Hundes und des Haasens $= \frac{4 \times 7}{5} : 3$. Der Haase ist also der langsamere unter beyden (§. 124). Nun setze man in dasiger Gleichung, wo x gefunden wird, $b = 3$; $c = \frac{4 \times 7}{5}$; $a = 780$; so ist $c - b = \frac{4 \times 7}{5} - 3$ und $x =$

$$\frac{780 \times 3}{\frac{4 \cdot 7}{5} - 3} \text{ oder} = \frac{780 \times 3}{\frac{4 \cdot 7 - 3 \cdot 5}{5}} = \frac{780 \times 3 \times 5}{28 - 15} = \frac{780 \times 3 \times 5}{13}.$$

Nun ist $780 = 390 \times 2 = 130 \times 3 \times 2 = 13 \times 10 \times 3 \times 2 = 13 \times 60$. Folglich $\frac{780 \times 3 \times 5}{13} = \frac{13 \times 60 \times 3 \times 5}{13} = 60 \times 3 \times 5 = 900$. Und so viel Sprünge kann der Haase noch thun.

Anmerkung.

§. 129.

In der Formel $x = \frac{780 \times 3}{\frac{4 \cdot 7}{5} - 3}$ wurde die Rechnung mit den Zahlen nur durch Zeichen angedeutet, nicht wirklich verrichtet; weil man auf diese Art leicht allgemeine Regeln für andere Zahlen, die statt der vorigen gesetzt werden, entdeckt. Diese Regeln wären folgende:

1) Man berechne, wie viel ein Hundssprung in Haasensprüngen ausgedrückt beträgt, hier = 7/5.
2) Dieß multiplicirt man mit der Zahl, welche bestimmt, wie viel Sprünge der Hund (hier 4) in der Zeit thut, in welcher der Haase eine gegebene Menge Sprünge (hier 3) thut.
3) Hiervon subtrahire man die gegebene Menge der Haasensprünge, die in eben der Zeit mit dem Hundssprunge geschehen (hier 3).
4) Endlich spreche man: Wie sich die Differenz zu der gegebenen Menge der Haasensprünge verhält, so die Sprünge, die der Haase voraus hat, zu einer vierten Zahl. Und diese vierte Zahl ist das Gesuchte.

Was also in Worten so weitläuftig gesagt wurde, stellen die Zeichen in einem einzigen Blick dar. Will man, statt der bestimmten Zahlen, die Aufgabe in Buchstaben ausdrücken, so setze man $780 = a$; $4 = b$; $3 = c$ (wo aber dieß b und c nicht das bedeuten, was sie im §. 124 bedeuten) $7 = d$; $5 = f$;

so ist $x = \frac{ac}{\frac{bd}{f} - c}$. Man multiplicire den Divisor und die Dividende mit f, so erhält man $x = \frac{acf}{bd - cf}$. Auch in Zahlen Beyspielen ist's also, zuweilen wenigstens, vortheilhaft, die Rechnung mit den Zahlen nicht gleich auszuführen, sondern nur anzudeuten; weil man so leichter sieht, welche Zahlen sich durch Division rc. aufheben. So zerfällte man in dieser Aufgabe 780 in 390×2, welches leicht bewerkstelligt wird, wenn man 780 mit 2 dividirt. Alsdann ist leicht zu übersehen, daß $390 = 130 \times 3$ rc. Man fand also hier den Werth, von $x = 900$, leichter, als wenn man mit den Zahlen selbst gewöhnlich gerechnet hätte.

Zusatz 1.

§. 130.

Der Hund muß durchlaufen $a + x$. Er durchlauft also auch $a + \frac{acf}{bd - cf}$ oder $\frac{abd - acf + acf}{bd - cf} = \frac{abd}{bd - cf}$.

Zusatz 2.

§. 131.

Weil $\frac{abd}{bd - cf}$ den Lauf des Hundes in Haasensprüngen vorstellt, und die Haasensprünge sich zu den Hundssprüngen verhalten wie d zu f, so ist $d : f = \frac{abd}{bd - cf} : \frac{abf}{bd - cf}$; das ist: Der Hund hat $\frac{abf}{bd - cf}$ oder $\frac{ab}{\frac{bd}{f} - c}$ Sprünge zu thun.

Anmerkung.

§. 132.

In der vorhergehenden Aufgabe kommen 6 Zahlen vor, davon eine jede unbekannt und die übrigen bekannt seyn können, woraus 6 Aufgaben entstehen, (§. 122.) wovon jedoch Eine bereits aufgelöst ist. Die Resultate der 5 übrigen sind:

$$1)\quad a = \frac{(bd - cf)\,x}{cf};$$

$$2)\quad b = \frac{(a + x)\,cf}{dx};$$

$$3)\quad c = \frac{xbd}{(a + x)\,f};$$

$$4)\quad d = \frac{(a + x)\,cf}{bx};$$

$$5)\quad f = \frac{xbd}{(a + x)\,c};$$

Aufgabe 47.

§. 133.

Zwey Boten gehen gegen einander. Man finde aus der gegebenen Weite der Oerter, beyder Tagreisen und der Zeit, um welche einer früher abgeht als der andere, die Zeit, wann sie einander begegnen.

Auflösung.

Es seye die Zeit, um welche der erste früher abgeht als der 2te = = = = = = = = = = = = $= a$

Die Tagreise des 1sten = = = = = = $= b$

= = = = = = 2ten um n größer oder kleiner, folglich entweder = = = $= b + n$ oder $b - n$

Die Weite der Oerter = = = = = = $= d$

Die Zeit, da der andere abgeht, bis sie sich begegnen = = = = = = = = $= x$

Daher ist die Zeit des 1sten = = = $= a + x$

Welche mit b multiplicirt dessen Weg gibt $= ab + bx$

Und der Weg des 2ten, wenn seine Tagreise um n größer ist, beträgt = $= bx + nx$

Folglich $ab + 2bx + nx = d$

$$2bx + nx = d - ab$$

$$(2b + n)\,x = d - ab$$

$$x = \frac{d - ab}{2b + n}$$