Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Jak. Frid. Malers weil. Hochfürstl. Markgräfl. Bad. Kirchenraths und Rectors des Gymnasii Jllustris Algebra zum Gebrauch hoher und niederer Schulen

Maler, Jakob Friedrich

Carlsruhe, 1821

Aufgabe 7

urn:nbn:de:bsz:31-266447

Visual Library

2) In einem Dreyeck ist der Winkel bey A um 17^0 größer als der Winkel bey B, und der bey C ist ¼ von dem bey A; wie groß ist jeder? Antwort: der bey A $87\frac{5^0}{9}$; der bey B $70\frac{5^0}{9}$ und der bey C $21\frac{8^0}{9}$.

3) In einem Trapez ist die Summe der Diagonale und der beyden Perpendikularen = 18. Die größere Perpendikulare ist halb so groß als die Diagonale; die kleinere = der Diagonale weniger 7; wie groß ist jede dieser Linien? Antwort: die Diagonale 10, die größere Perpendikulare 5 und die kleinere 3.

4) Man hat 3 Linien, A, B, C, welche zusammen 12 Fuß betragen. Nun ist B um 1 Fuß größer als A, und C um 1 Fuß größer als B; wie lang ist jede dieser Linien? Antwort: A = 3, B = 4, C = 5 Fuß.

5) In einem Kreis ist die Summe des Durchmessers und zweyer Chorden = 304 Zoll. Die Differenz zwischen der Hälfte der kleinern Chorde und der ganzen größern Chorde ist = 70, und die Differenz zwischen eben jener Hälfte und dem Durchmesser = 74 Zoll; wie viel Zolle hält der Diameter und jede der beyden Chorden? Antwort: der Durchmesser = 114 Z; die größere Chorde = 110 Z. und die kleinere = 80 Z.

Aufgabe 7.

§. 75.

Corydon und Mops streiten über die Anzahl ihrer Schafe. Corydon sagt: Gibst du mir eins von deinen, so habe ich noch einmal so viel als du. Mops erwiedert: Gibst du mir eins von deinen, so habe ich so viel als du. Wie viel hatte jeder?

Auflösung.

Corydon habe . . . . = x

Mops . . . . = y

Bekommt Corydon 1, so hat er x + 1, Mops aber eins weni-

ger als zuvor, das ist $y - 1$. Weil aber in diesem Falle Corydon noch einmal so viel hat, als Mops, so müssen Mopsens Schafe $(y - 1)$ doppelt genommen werden $(2y - 2)$ und dann sind sie der Anzahl des Corydons gleich, oder
$x + 1 = 2y - 2$.

Bekommt Mops 1, so hat er $y + 1$, Corydon hingegen $x - 1$; nun sollen beyde gleichviel haben, daher wäre $y + 1 = x - 1$. Setzt beyde Gleichungen neben einander:

$$x + 1 = 2y - 2 \qquad y + 1 = x - 1$$

Da nun beyde in Eine verwandelt werden müssen (§. 73.) so kann dieß nicht besser geschehen, als wenn man in beyden einerley unbekannte Zahl auf Eine Seite bringt, z. B. x.

$$\begin{array}{rcl|rcl} x + 1 & = & 2y - 2 & y + 1 & = & x - 1 \\ - 1 & & - 1 & + 1 & & + 1 \\ \hline x & = & 2y - 3 & y + 2 & = & x \end{array}$$

Weil hier die beyden Größen $2y - 3$ und $y + 2$ dem nämlichen x, folglich sich selbst gleich sind, so ist:

$$\begin{array}{rcl} 2y - 3 & = & y + 2 \\ + 3 & & + 3 \\ \hline 2y & = & y + 5 \\ - y & & - y \\ \hline y & = & 5 \end{array}$$

Jetzt weiß man, wie groß y ist. Setzt man dessen Werth 5 in die obige Gleichung $y + 2 = x$, so erhält man $5 + 2 = x$ oder $x = 7$.

Noch kürzer läßt sich diese Aufgabe auflösen, wenn man beyde Gleichungen von einander subtrahirt.

$$\begin{array}{lrcl} & x + 1 & = & 2y - 2 \\ \text{(subtr.)} & x - 1 & = & y + 1 \\ \hline & + 2 & = & y - 3 \\ & + 3 & & + 3 \\ \hline & 5 & = & y \end{array}$$

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Baden-Württemberg

Aehnliche Aufgaben sind die 2 folgenden:

1) Man hat 2 Körper, A und B; nimmt man von B 2 ℔ weg, und legt sie zu A, so wiegt A 3mal soviel als B; nimmt man dagegen von A 2 ℔ weg, und legt sie zu B, so wiegt B $1\frac{1}{10}$ soviel als A. Wie schwer ist A und B? Antwort A = $8\frac{22}{23}$ ℔ und B = $5\frac{15}{23}$ ℔.

2) Auf einen Körper wirken unter einem rechten Winkel 2 Kräfte A und B. Sie sind beyde unbekannt, jedoch weiß man, daß, wenn von A 30 weggenommen, und zu B gesetzt werden, A = B wird; daß aber auch, wenn man von B 40 zu A schlägt, A dreymal so groß wird als B; wie groß ist der Raum, den der Körper durchläuft? Antwort: $202\frac{4}{10}$. Der Körper durchläuft nämlich die Diagonale des Kräftenparallelograms.

Daß das nämliche Verfahren auch bey drey unbekannten Größen Statt finde, wird aus folgendem Beyspiele erhellen.

Man hat 3 Gewichtsstücke, welche zusammen 24 Lth. betragen. Das 1te und 3te wiegen zusammen 3mal so viel, als das 2te, und das 2te und 3te halb so viel als das 1te; wie viel Lothe beträgt jedes?

Es sey das 1te = x, das 2te = y, das 3te z Lothe; so ist:

1) $\dfrac{x + z = 3y}{x = 3y - z}$ 2) $\dfrac{y + z = \frac{x}{2}}{2y + 2z = x}$ 3) $x + y + z = 24$

4) $\dfrac{3y - z = 2y + 2z}{y = 3z}$ 5) $\dfrac{\dfrac{x = 3y - z}{\quad\|\quad}}{\dfrac{x = 9z - z}{x = 8z}}$

6) $\dfrac{x + y + z = 24 \atop \| \quad \|}{\dfrac{8z + 3z + z = 24}{\dfrac{12z = 24}{z = 2}}}$ 7) $\dfrac{y = 3z \atop \quad\;\|}{y = 6}$ 8) $\dfrac{x = 8z \atop \quad\;\|}{x = 16}$

7) entspringt aus 4) u. 6), sowie 8) aus 5) u. 6)

§. 75. a.

Im vorhergehenden §. wurde schon durch Hilfe des **Substituirens** reducirt, indem man, z. B. in der Aufgabe vom Corydon und Mops, um x aus der Gleichung wegzuschaffen, statt desselben den gefundenen ihm gleichen Werth; und dann, als y gefunden war, um x zu erhalten, den schon gesuchten Werth von y in der Gleichung $x = y + 2$ setzte. Man sieht hieraus:

1. **Substituiren** heißt, den Werth einer Größe in die Stelle einer andern ihr gleichen Größe setzen. Z. B. hier $2y - 3$ statt x, dem es gleich gefunden wurde.
2. Dieser Werth muß daher aus den Umständen der Aufgabe entweder schon bekannt seyn, oder gefunden werden.
3. Man muß mit der Größe, welche substituirt wird, die nämlichen Veränderungen vornehmen, welche mit der Größe vorgenommen wurden, für welche sie substituirt werden soll.
4. Hierdurch wird Eine (oft mehrere) unbekannte Größe aus der Gleichung weggeschafft, und endlich die gewöhnliche Reduktion möglich.

Folgende Beyspiele mögen zur Uebung im Reduciren durch Hilfe der Substitution dienen.

1) Es sey $a + y = x + b - c$ und $y = d - p$; wie groß ist x?

Antw. $x = a + d - p - b + c$.

2) Es sey $a - y = x + b$ und $y = a - c$; wie groß ist x?

Antw. $x = c - b$.

3) Es sey $a^2 + bx - c^2 = ad + a^2 - y^2$ und $x = m + n$; wie groß ist y?

Antw. $y = \sqrt{c^2 + ad - b(m + n)}$

4) Es sey $c^2 + y^2 - 2bd = a^2 - bx$ und $x = a + b - c$; wie groß ist y?

Antw. $y = \sqrt{a^2 - c^2 + 2bd - b(a + b - c)}$

5) Es sey $\sqrt{y^2 - c} = ax + b$ und $y^2 = a^2 + 2ab + b^2$; wie groß ist x?

Antw. $x = \frac{a - c}{a}$

6) Es sey $\sqrt[3]{x^3 + a} = cy$ und $x^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; wie groß ist y?

Antw. $y = \frac{2a + b}{c}$.

§. 75. b.

Ein Vater ist 25, der Sohn 5 Jahre alt; wie viel Jahre müssen noch verfließen, bis der Vater doppelt so alt als der Sohn ist?

Auflösung.

Es seye die Zeit, welche zu dem verlangten Alter fehlt, $= x$; des Vaters wirkliches Alter $= p$, des Sohnes wirkliches Alter $= f$; so ist das gesuchte Alter des Vaters $= p + x$, und des Sohnes $= f + x$. Wenn nun beyde x Jahre zurückgelegt haben, soll der Vater n mal so alt als der Sohn seyn, d. i. $= fn + nx$ daher:

$$\begin{array}{l} p + x = fn + nx \\ - x - x \\ \hline p = fn + nx - x \\ - fn - fn \\ \hline p - fn = nx - x \text{ oder (§. 20.)} \\ \hline p - fn = (n-1)\,x \;(: n-1) \\ \hline \frac{p - fn}{n - 1} = x \end{array}$$

Das ist: $\frac{25 - 5 \times 2}{2 - 1} = \frac{15}{1} = 15 = x$. Denn $25 + 15 = (5 + 15) \times 2$ d. i. $40 = 20 \times 2$.

Zusatz 1.

Wäre das nämliche Alter gegeben, und man wollte wissen, wann der Vater 3mal so alt als der Sohn wäre, so würde

$n = 3$, folglich $\frac{p - fn}{n - 1} = \frac{25 - 5 \times 3}{3 - 1} = \frac{10}{2} = 5$.
Denn $25 + 5 = (5 + 5) \times 3$ oder $30 = 10 \times 3$.

Zusatz 2.

Eben so kann man das 4 und 5fache Alter des Vaters finden. Nach $1\frac{2}{3}$ Jahren ist der Vater 4mal, und nach 0 Jahren, d. h. im gegenwärtigen Augenblick, ist er 5mal so alt.

Fragte man aber: Wann ist der Vater 6mal so alt? so würde $n = 6$, folglich $x = \frac{25 - 5 \times 6}{6 - 1} = \frac{-5}{5} = -1$. Weil nun in diesem Falle x negativ wird, so zeigt die gefundene allgemeine Formel zugleich, welche Fälle möglich oder unmöglich sind. So bald nämlich das mit n multiplicirte Alter des Sohnes $>$ das Alter des Vaters, oder wenn $fn > p$ wird, ist der angenommene Fall unmöglich. Denn man will ja eine wirkliche, positive, nicht die entgegengesetzte Zeit wissen, nach welcher der Vater n mal so alt als der Sohn seyn soll.

Hätte aber die Frage allgemeiner so geheißen: Wann war oder wird der Vater nmal so alt als der Sohn? so sind alle Fälle möglich, in welchen n zwischen $p - f$ und 1 angenommen wird; d. h. n kann sowohl $p - f$ als 1 unendlich nahe fallen, nie aber 1 selbst werden. Im Augenblicke, als der Sohn gebohren wurde, war der Vater $(p-f)$ mal so alt als der Sohn. Nun kann n abnehmen, bis es $= \frac{p}{f}$ wird. In allen diesen Fällen, den letzten ausgenommen, erscheint x nach der Formel negativ; im letzten wird es $= 0$. Das — Zeichen des x zeigt an, daß die Zeit, in welcher der Vater n mal so alt als der Sohn, schon vorüber ist, daß also x von p und f abgezogen werden muß. Ist $n = \frac{p}{f}$ also $x = o$, so ist der Zeitpunkt gegenwärtig, in welchem der Vater n mal so alt als der Sohn ist. Wird n aber kleiner als $\frac{p}{f}$; so wird x positiv, und muß zu p und f addirt werden, d. h. jener Zeitpunkt ist zukünftig.

Man könnte auch, um x positiv zu erhalten, für den Fall, wenn $n > \frac{p}{f}$, die Formel so finden:

$$p - x = n \; (f - x)$$
$$p - x = nf - nx$$
$$p + (n - 1)\, x = nf$$
$$(n - 1)\, x = nf - p$$
$$x = \frac{nf - p}{n - 1}$$

Dann wäre diese Formel für alle Fälle, in denen $n > \frac{p}{f}$, und die oben gefundene für alle, in welchen $n < \frac{p}{f}$.

1) Wann war der Vater 6mal so alt als der Sohn? Antwort: Vor 1 Jahr.

2) Wann war er $19\frac{9}{10}$ mal so alt als der Sohn? Antwort: Vor $3\frac{178}{189}$ Jahren.

3) Wann wird er $1\frac{1}{3}$ mal so alt? Antwort: Nach 55 Jahren.

4) Wann $1\frac{1}{100}$ mal so alt? Antwort: Nach 1995 Jahren.

Zusatz 3.

Die zuerst gefundene allgemeine Regel hieße also wörtlich:

a) Multiplicirt f, das Alter des Sohnes, mit der Zahl n, welche bestimmt, wie vielmal der Vater älter als der Sohn seyn soll. Dieß gibt fn.

b) Subtrahirt dieß Produkt von des Vaters wirklichem Alter p, so findet ihr p — fn.

c) Dividirt den Rest mit n — 1, das ist, mit der um 1 verminderten Zahl, welche bestimmt, wie vielmal der Vater älter als der Sohn seyn soll, so habt ihr die verlangte Jahre $\frac{p - fn}{n - 1} = x$.

Zusatz 4.

Hieraus erhellt augenscheinlich, daß man am Ende jeder Aufgabe gar wohl weiß, was die gebrauchten Buchstaben bedeuten; und so fällt der (§. 11.) berührte Einwurf durch die Erfahrung weg. Es bestätiget sich aber auch der große Vortheil der Buchstabenrechnung, daß nämlich eine, in solchen allgemeinen Zeichen aufgelöste Aufgabe hinreichend seye, alle möglichen ähnlichen Fälle aufzulösen, ohne die weitläuftige Rechnung in jedem einzelnen Falle zu wiederholen.

§. 75. c.

Noch allgemeiner heißt die vorige Aufgabe im §. 75. b. so: Man finde 2 Formeln für die Größe x, die so beschaffen seyn soll, daß, wenn sie zu 2 andern Größen M und m addirt, oder von ihnen subtrahirt wird, die größere + oder — x nmal so groß als die kleinere + oder — x sey.

Erster Fall.

$$M + x = n\,(m + x)$$

$$M + x = nm + nx$$

$$M = nm + (n - 1)\,x$$

$$M - nm = (n - 1)\,x$$

$$\frac{M - nm}{n - 1} = x \text{ und da}$$

$$M - nm = \underbrace{(M - m)}_{\parallel \atop d} - (n - 1)\,m$$

so ist auch $$\frac{d - (n - 1)\,m}{n - 1}$$

Zweyter Fall.

$$M - x = n\,(m - x)$$

$$M - x = nm - nx$$

$$M + (n - 1)\,x = nm$$

$$(n - 1)\,x = nm - M$$

$$x = \frac{nm - M}{n - 1}$$

Auch hier gilt alles, was oben rücksichtlich der Annahme von n gesagt wurde. Es muß nämlich zwischen M — m oder zwischen die Differenz und 1 inne fallen. Findet man nun, daß nach der ersten Formel nm von M, oder (n — 1) m von d nicht kann abgezogen werden, so zeigt dieß an, daß der zweyte Fall statt findet. Geht es aber bey der Subtraktion auf, so ist M schon um nmal größer als m.

1) In einem Rechteck ist $b = 24$ und $a = 2$. Man will es vergrößern, und zwar so, daß b und a um gleich viel verlängert werden, und sich sodann verhalten sollen, wie $10 : 1$; wie groß werden b und a?

Antwort: $b = 24\frac{4}{9}$; $a = 2\frac{4}{9}$.

Hier ist $n < \frac{M}{m}$, folglich wird die erste Formel angewendet. Es ist eine Vergrößerung des Rechtecks möglich.

2) Es sey alles wie vorhin, nur soll das Rechteck verkleinert werden, und alsdann sich $b : a = 21 : 1$ verhalten; wie groß werden b und a?

Antwort: $b = \frac{231}{10}$ und $a = \frac{11}{10}$.

Aufgabe 8.

§. 76.

Zwey Zahlen zu finden, welche zusammen 253 ausmachen, eine aber um 79 größer ist als die andere.

Auflösung.

Die eine seye . . . $= x$

Die andere um 79 größer $= x + 79$

Zusammen $2x + 79 = 253$

$- 79 - 79$

$2x = 174$ (divid. mit 2.

$x = 87$