Jak. Frid. Malers weil. Hochfürstl. Markgräfl. Bad. Kirchenraths und Rectors des Gymnasii Jllustris Algebra zum Gebrauch hoher und niederer Schulen

Maler, Jakob Friedrich

Carlsruhe, 1821

Aufgabe 5

urn:nbn:de:bsz:31-266447

che oder niedere Gleichungen sind diejenigen, in welchen die unbekannte Größe nur in der ersten Dignität vorkommt; höhere oder zusammengesetzte hingegen, worinnen die unbekannte Größe über die erste Dignität steigt. Vom Exponenten derselben hängt der Grad der Gleichung ab. Sie heißt quadratisch, wenn die unbekannte Größe zur zweyten; kubisch, wenn sie zur dritten; biquadratisch, wenn sie zur vierten; eine Gleichung vom 5ten, 6ten rc. Grad, wenn sie zur 5ten, 6ten rc. Dignität erhoben ist. So sind z. B. $x + a = b - c$ oder $3x + ax = q$ einfache; hingegen $x^2 = a + b$; $x^3 = m - n$ quadratische und kubische Gleichungen. Die Gleichung ist bestimmt, (determinata) wenn nur Eine unbekannte Größe darinnen vorkommt, die nur Einen, oder doch eine bestimmte Anzahl von Werthen hat. Unbestimmte Gleichungen sind das Gegentheil. Reine Gleichungen enthalten bloß die höchste Potenz der unbekannten Größe, die ihrem Grad gemäß ist; unreine außer der höchsten noch niedrigere derselben (Aequationes purae und adfectae.) So sind $x^2 = a + b$ und $x^3 = m + n$ reine; $x^2 + 2ax = q$ oder $x^3 - 2x^2 = m$ unreine Gleichungen.

Aufgabe 5.

§. 69.

Eine Aufgabe algebraisch aufzulösen.

Hierbey kommt es immer auf drey Stücke an: 1) Auf die Benennung (§. 12. 13. 14. 15.) 2) Auf die Bildung Einer oder mehrerer Gleichungen (§. 68. a.) 3) Auf die Reduktion. (§. 68. a.) Daher verfährt man also:

1) Man benennt die unbekannte Größen mit x, y, z; die bekannte aber mit a, b, c rc. (§. 12.) oder sind es Zahlen, so können sie als Zahlen stehen bleiben.
2) Man sucht aus den Umständen der Aufgabe eine Gleichung, indem man eine und dieselbe Größe auf doppelte Art ausdrückt. (§. 3.)
3) Wenn eine Gleichung gebildet ist, und auf beyden Seiten bekannte und unbekannte Größen vermengt stehen; so

muß die unbekannte auf einer Seite weggeschafft werden, damit sie nur in Einem Glied angetroffen werde, doch so, daß es immer eine Gleichung bleibe. Ist dieß geschehen, so befreyt man die unbekannte von den bekannten, die noch bey ihr stehen, bis die unbekannte positiv, ohne Coefficient, ohne Exponent und ohne Wurzelzeichen, ganz allein übrig bleibt. Wäre sie daher negativ, so bringt man sie aus dem ersten ins zweyte Glied, oder auch umgekehrt. Dieß sowohl, als das Befreyen von den bekannten mit ihr verbundenen Größen geschieht hauptsächlich:

a) Durch die 4 Rechnungs-Arten, und zwar gerade diejenige, welche der entgegen gesetzt ist, wodurch die bekannte mit der unbekannten verbunden sind. Das ist: Das Addirte wird subtrahirt; das Subtrahirte, addirt; das Multiplicirte, dividirt; das Dividirte, multiplicirt.
b) Durchs Erheben zu Dignitäten.
c) Durchs Wurzel-Ausziehen.
d) Durchs Substituiren.

Hierbey muß (den letzten Fall d ausgenommen) was in dem einen Gliede geschieht, immer auch im andern geschehen, damit es beständig eine Gleichung bleibe. Macht nun endlich die unbekannte Größe für sich allein das eine Glied der Gleichung aus, so, daß alle bekannten Größen im andern Gliede stehen, so weiß man den Werth der unbekannten Größe, d. h. die Gleichung ist reducirt, und somit die Aufgabe algebraisch aufgelös't.

Anmerkung 1.

§. 70.

Bey der Benennung kann man sich eine Aufgabe leicht oder schwer machen. Freylich ließen sich hievon einige Regeln geben, da es aber durch Beyspiele leichter und angenehmer geschehen kann; so soll hier, außer dem, was schon im §. 12. vorkam, nur so viel bemerkt werden:

1) Man bemühe sich, so wenig unbekannte Größen in die Gleichung zu bringen, als nur möglich ist.

2) Man wähle, um die Größen auszudrücken, wenns schicklich geschehen kann, solche Buchstaben, welche an die gewöhnlichen Namen der Größen erinnern. Daher drückt man z. B. die Summe durch s, die Differenz durch d, die Anzahl durch n aus rc.

Die Benennung und die aus derselben und den Umständen der Aufgabe zu bildende Gleichung läßt sich am leichtesten begreifen, wenn man die Aufgabe aus der gewöhnlichen in die algebraische Sprache übersetzt. Folgendes Beyspiel wird dieß deutlich machen.

Ein Kaufmann hat eine Summe Gelds, legt im Anfange eines jeden Jahrs für seine Haushaltung 1000 fl. beyseit, gewinnt jährlich mit dem Rest $\frac{1}{3}$ desselben und ist nach 3 Jahren noch einmal so reich als vorhin; wie viel hat er anfänglich gehabt?

In gewöhnlicher Sprache.	In algebraischer Sprache.
Ein Kaufmann hatte eine gewisse Summe Gelds, die man wissen möchte, - - - -	x
Von welcher er jährlich 1000 fl. ausgibt. - - - - -	$x - 1000$
Zum Uebrigen gewinnt er noch den dritten Theil. - - -	$x - 1000 + \frac{x - 1000}{3}$ oder $\frac{4x - 4000}{3}$
Im zweyten Jahr gibt er wieder 1000 fl. aus: - - -	$\frac{4x - 4000}{3} - 1000$ oder $\frac{4x - 7000}{3}$
Den Rest vermehrt er um den dritten Theil. - - - -	$\frac{4x - 7000}{3} + \frac{4x - 7000}{9}$ oder $\frac{16x - 28000}{9}$

In gewöhnlicher Sprache.	In algebraischer Sprache.
Im dritten Jahr gibt er wieder 1000 fl. aus: - - -	$\frac{16x - 28000}{9} - 1000$ oder $\frac{16x - 37000}{9}$
Und den Rest vermehrt er um den dritten Theil. - - -	$\frac{16x - 37000}{9} + \frac{16x - 37000}{27}$ oder $\frac{64x - 148000}{27}$
Hierauf ist er noch einmal so reich als vorhin. - - -	$\frac{64x - 148000}{27} = 2x.$

Man wird ohne Schwierigkeit begreifen, wie $x - 1000 + \frac{x - 1000}{3}$ in $\frac{4x - 4000}{3}$ verwandelt wurde, indem nur $x - 1000$ auch zu Drittel gemacht worden sind, welches $= \frac{3x - 3000}{3}$ ist. Ferner ist $\frac{3x - 3000}{3} + \frac{x - 1000}{3} = \frac{4x - 4000}{3}$, und so im Folgenden.

Anmerkung 2.

§. 71.

Die Reduktion einer Gleichung wird der Anfänger am leichtesten begreifen, wenn er sich eine Gleichung wie eine Wage vorstellt, die inne steht, und in deren beyden Schalen gezeichnete Gewicht-Steine und Waaren liegen. Hier stellen die bekannten Größen oder Zahlen gezeichnetes Gewicht, die unbekannten aber die Waare, deren Gewicht man nicht weiß, und das Aequal-Zeichen den Wagbalken vor. Z. B. die (§. 70.) gefundene Gleichung $\frac{64x - 148000}{27} = 2x$ würde nach dieser Vorstellung so ausgedrückt. In einer Wagschale liegen von einer Waare (x) 64 Stücke, doch nur von jedem der 27ste Theil weniger $\frac{148000}{27}$ an gezeichneten Gewicht-Steinen. In der andern Wagschale aber 2 ganze Stücke Waare. Nun möchte man wissen, wie viel Ein solches Stück Waare wäge? Dieß wäre leicht, wenn Ein Stück ganz allein in der einen Wagschale läge, in der andern aber lauter Gewichtsteine, und doch die Wage noch immer inne stände. Um dieß zu erfahren, wollen wir so lang aus einer Wagschale eben so viel Gewichtsteine oder Waaren-Stücke nehmen, als aus der andern; oder in eine so viel legen, als in die andere; oder, was in einer jeden Schale liegt, verdoppeln, vervielfältigen, halbiren, oder sonst in gleiche Theile theilen, bis wir in einer Wagschale das Stück Waare allein, und in der andern lauter Gewichtsteine erhalten. Wenn wir hierbey immer mit einer Wagschale das nämliche vornehmen, was mit der andern geschah, so wird die Wage auch immer inne stehen bleiben.

$$\frac{64x}{27} - \frac{148000}{27} = 2x$$

Hier wünschen wir vorzüglich, keine Waaren-Stücke mehr zu haben, die nur der 27ste Theil sind, sondern lauter Ganze. Wir wollen daher ein jedes 27 mal nehmen, oder das ganze Gewicht in jeder Schale 27 mal vervielfältigen, das ist, mit 27 multipliciren. Diesen Vortheil muß man fast immer brauchen, um vor allen Dingen die Brüche wegzuschaffen.

$$\frac{64x}{27} - \frac{148000}{27} = 2x$$

multipl. mit 27

$$64x - 148000 = 54x$$

Jeder wird leicht begreifen, daß $\frac{64x}{27}$ mit 27 multiplicirt 64x gebe. Gibt doch $\frac{1}{27}$ mit 27 multiplicirt $\frac{27}{27}$ oder 1 und $\frac{2}{27} \times 27$ den Bruch $\frac{27 \times 2}{27}$ oder 2. Wenn daher ein Bruch mit seinem Nenner multiplicirt wird, so ist's eben so viel, als wenn der Nenner weggelassen würde, und der Zähler bliebe allein stehen.

Nun fehlen in einer Schale 148000, dieß zeigt das — Zeichen. Diese — 148000 wollen wir ersetzen, und in die andere auch so viel legen, das ist 148000 addiren.

$$\begin{array}{l} 64x - 148000 = 54x \\ \quad + 148000 + 148000 \ (\S\ 26.) \\ \hline 64x = \quad 54x + 148000 \end{array}$$

Aber wir wollen auch aus beyden Schalen 54 Stücke Waare (54x) wegnehmen.

$$\begin{array}{l} \quad 64x = 54x + 148000 \\ - 54x - 54x \\ \hline \quad 10x = 148000 \end{array}$$

Da nun in der einen Schale 10 Stück Waare liegen, und in der andern an Gewicht-Steinen 148000, so wollen wir, um nur Ein Stück Waare zu erhalten, von 148000 auch nur den 10ten Theil nehmen, das ist, mit 10 dividiren, und noch immer wird die Wage inne stehen.

$$\begin{array}{l} 10x = 148000 \\ \hline x = 14800 \end{array} \ (:10$$

und jetzt wissen wir, was das Stück Waare wiegt.

Die allgemeine Auflösung dieser Aufgabe kommt im §. 244 rc. vor.

§. 71. a.

Im vorhergehenden §. wurden die Brüche weggeschafft. Da dieß so häufig vorkommt, so soll hier eine allgemeine Regel dafür gegeben werden. Ist nur Ein Bruch vorhanden, so multiplicirt man mit seinem Nenner die sämmtlichen Theile beyder Glieder. Z. B. $a - b + n = \frac{d + x}{m}$, welche Gleichung mit m multiplicirt die Gleichung $(a - b + n)\, m = d + x$ gibt. Sind mehrere Brüche vorhanden, so muß man alle Nenner derselben mit einander, und sodann mit diesem Produkt die sämmtlichen Theile beyder Glieder multipliciren. Z. B.

$$\frac{a}{b} + \frac{x}{m} - q = r + \frac{c}{d} \quad (\times bmd$$

$$\frac{abmd}{b} + \frac{xbmd}{m} - qbmd = rbmd + \frac{cbmd}{d}$$

$$amd + xbd - qbmd = rbmd + cbm$$

§. 71. b.

1) Es seye alles wie in der Aufgabe im §. 70., nur habe der Kaufmann nach 3 Jahren gerade eben so viel als anfänglich; wie viel hatte er? Antwort: 4000 fl.

2) Es seye alles, wie vorhin, nur habe er nach 3 Jahren nichts; wie viel hatte er? Antwort: 2312½ fl.

3) Der Kaufmann brauche jährlich für seine Haushaltung 1520 fl., und gewinne jährlich mit dem Rest ¼ desselben. Nach 4 Jahren sey er 2 mal so reich als anfänglich, wie viel hat er anfänglich gehabt? Antwort: $24817\frac{79}{113}$ fl.

4) Es sey alles wie in der vorigen Aufgabe, nur habe der Kaufmann nach 4 Jahren gerade so viel, als anfänglich, wie viel hatte er? Antwort: 7600 fl.

5) Es sey wiederum alles, wie vorhin, nur habe der Kaufmann nach 4 Jahren nichts, wie groß war sein anfängliches Vermögen? Antwort: $4487\frac{1}{25}$ fl.

6) In einer Schlacht hat der Commandeur des linken Flügels x Mann, muß gleich im Anfang zur Unterstützung des rechten Flügels 520 Mann abgeben, erhält aber dafür in der ersten Stunde vom Centrum ⅔ seines Rests; in der zweyten Stunde schickt er 2500 Mann zu einer besondern Expedition ab, und zieht dafür ¾ seines Rests vom Reservecorps an sich; in der dritten Stunde zählt er 1400 Todte, und hat doch noch eben so viel Leute als anfänglich, wie viel waren's? Antwort: $3804\frac{8}{23}$ Mann.

Lehrsatz 3.

§. 72.

Soll eine Aufgabe bestimmt seyn, so müssen so viele Gleichungen gemacht werden können, als unbekannte Größen vorhanden sind.

Beweis.

Gesetzt, es wären in einer Gleichung zwey unbekannte Größen; so würden entweder beyde in einem, oder nur eine in einem und die andere im anderen Gliede stehen. Im ersten Falle würde man wohl wissen, wie viel beyde zusammen, aber nicht was jede besonders betrüge; im andern Fall aber, daß eine unbekannte Größe einer bekannten und unbekannten gleich seye, wodurch abermal nichts bestimmt würde. Daher können in einer Gleichung nicht zwey unbekannte Größen statt finden, sondern es fordert jede derselben eine eigene Gleichung, wenn sie bestimmt seyn soll, welches eben so leicht von mehreren unbekannten Größen bewiesen werden kann.

Anmerkung.

§. 72. a.

Identische oder leere Gleichungen dürfen bey der nach dem vorigen §. erforderlichen Anzahl der Gleichungen bey einer Aufgabe nicht mitgezählt werden. Identisch oder leer sind aber z. B. folgende Gleichungen:

$$a^2 - x^2 = (a + x)\ (a - x);\ \sqrt[m]{u^n} = u^{\frac{n}{m}}.$$

Zusatz.

§. 73.

Aber auch bey mehrern Gleichungen werden die unbekannten Größen nicht bestimmt, wenn nicht aus diesen mehrern eine einige Gleichung gebildet wird. Man muß daher eine einige daraus zu machen suchen, und dieß sollen Beyspiele deutlich zeigen.

Aufgabe 6.

§. 74.

Alexander der Große sprach zu seinen Feldherren: Ich bin zwey Jahre älter als Hephästion. Clytus sagte: Ich bin 4 Jahre älter als ihr beyde. Kallisthenes setzte hinzu: Mein Vater ist 96 Jahre alt, und so alt als alle drey. Wie alt war jeder?