Jak. Frid. Malers weil. Hochfürstl. Markgräfl. Bad. Kirchenraths und Rectors des Gymnasii Jllustris Algebra zum Gebrauch hoher und niederer Schulen

Maler, Jakob Friedrich

Carlsruhe, 1821

Aufgabe 4

urn:nbn:de:bsz:31-266447

$$\begin{array}{l} \text{V.}\ a^4 - b + c^2 \\ \quad a^3 - b^2 - 3c \\ \hline a^7 - a^3b + a^3c^2 \\ \quad - a^4b^2 + b^3 - b^2c^2 \\ \qquad - 3a^4c + 3bc - 3c^3 \\ \hline a^7 - a^3b - a^4b^2 + a^3c^2 + b^3 - 3a^4c - \\ - b^2c^2 + 3bc - 3c^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{VI.}\ 6a^r + 3b^s \\ \quad 8a^r - b^n \\ \hline 48a^{2r} + 24a^rb^s \\ \quad - 6a^rb^n - 3b^{s+n} \\ \hline 48a^{2r} + 24a^rb^s - 6a^rb^n - 3b^{s+n}. \end{array}$$

Erläuterung des sechsten Beispiels durch Zahlen.

Es sey $a = 2$; $b = 3$; $r = 2$; $s = 2$; $n = 3$: so ist
die Multiplikande $= 24 + 27 = 51$
der Multiplikator $= 32 - 27 = 5$
und das Produkt $=$ 255
aber auch das Produkt $= 768 + 864 - 648 - 729 =$
$= 1632 - 1377 = 255$.

§. 47. a.

Man **ordnet** eine Größe, nach einem gewissen in ihr befindlichen Buchstaben, wenn man ihre Theile so nach einander folgen läßt, wie die Exponenten dieses Buchstabens größer oder kleiner werden. So wäre $x^3 - ax^2 - bcx + abc$ nach x, und zwar so geordnet, daß die Exponenten immer kleiner werden. In $1 - 5x + 10x^2 - 10x^3 + 5x^4 - x^5$ hingegen steigen sie von x^0 bis zu x^5. Fehlt in der Reihe dieser Exponenten ein Glied oder mehrere, so kann man die Stelle mit einem willkührlichen Zeichen, z. B. mit * ausfüllen, x^3 * $- bcx$ *.

Aufgabe 4.

§. 48.

Buchstaben-Größen, welche einerley oder verschiedene Zeichen haben, in einander zu dividiren.

Auflösung und Beweis.

Ordnet die Dividende und Divisor nach (§. 47. a.) Lassen sich dieselben wirklich dividiren, so dividirt wie in Zahlen, nehmt den, oder die Buchstaben des Divisors von den Buchstaben der Dividende weg, und behaltet den, oder die übrigen als Quotienten (§. 18.) Kann die Division nicht wirklich geschehen, so verrichtet sie nur durch Zeichen. (§. 21.)

$$
\text{I)}\quad
\begin{array}{r|l}
a^2 - 2ad - b^2 + d^2 & a + b - d \\ \cline{2-2}
a^2 + ab - ad & a - b - d \\ \cline{1-1}
- ab - ad - b^2 & \\
- ab - b^2 + bd & \\ \cline{1-1}
- ad - bd + d^2 & \\
- ad - bd + d^2 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

$$
\text{II)}\quad
\begin{array}{r|l}
10a^2 + 11ab - 12ad - 6b^2 + bd + 2d^2 & 2a + 3b - 2d \\ \cline{2-2}
10a^2 + 15ab - 10ad & 5a - 2b - d \\ \cline{1-1}
- 4ab - 2ad - 6b^2 + bd + 2d^2 & \\
- 4ab \qquad - 6b^2 + 4bd & \\ \cline{1-1}
- 2ad \qquad - 3bd + 2d^2 & \\
- 2ad \qquad - 3bd + 2d^2 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

$$
\text{III)}\quad
\begin{array}{r|l}
a^3 - b^3 & a - b \\ \cline{2-2}
a^3 - a^2b & a^2 + ab + b^2 \\ \cline{1-1}
+ a^2b - b^3 & \\
+ a^2b - ab^2 & \\ \cline{1-1}
+ ab^2 - b^3 & \\
+ ab^2 - b^3 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

$$\text{IV)}\quad \begin{array}{r|l} c^2 - d^2 & c + d \\ c^2 + cd & \overline{c - d} \\ \hline -cd - d^2 & \\ -cd - d^2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\text{V)}\quad \begin{array}{r|l} 1 - 5x + 10x^2 - 10x^3 + 5x^4 - x^5 & 1 - 2x + x^2 \\ 1 - 2x + x^2 \qquad\qquad\qquad\qquad & \overline{1 - 3x + 3x^2 - x^3} \\ \hline -3x + 9x^2 - 10x^3 \qquad\qquad & \\ -3x + 6x^2 - 3x^3 \qquad\qquad & \\ \hline +3x^2 - 7x^3 + 5x^4 \qquad & \\ +3x^2 - 6x^3 + 3x^4 \qquad & \\ \hline -x^3 + 2x^4 - x^5 & \\ -x^3 + 2x^4 - x^5 & \\ \hline 0 \qquad & \end{array}$$

Anmerkung 1.

§. 49.

Buchstaben haben keine Bedeutung von ihrer Stelle, wie Zahlen, und $+ ab$ behält einerley Werth, es mag vornen, hinten, oder in der Mitte stehen. Darum darf man sich hier nicht ängstlich an die Ordnung binden, und man kann den Quotienten nehmen, wo man ihn findet, welches auch beym Subtrahiren des Produkts aus dem Quotienten in den Divisor statt hat. Damit aber Anfänger sehen, wie die Division behandelt werde, so wollen wir das erste Beyspiel etwas erläutern. Sprecht: a in a^2 habe ich a mal (§. 18.) setzt a in die Stelle des Quotienten, und multiplicirt damit den Divisor $a + b - d$, so kammt $a^2 + ab - ad$ (§. 47). Setzt dieß unter die Dividende, und ziehts von ihr ab, so bleibt $- ab - ad - b^2 + d^2$, wobey zu merken, daß $+ ab$, weils in der Dividende nicht vorkommt, nur mit verkehrtem Zeichen in den Rest gesetzt wird (§. 46). Sprecht ferner: a in $- ab$ habe ich $- b$ (§. 18. 42). Multiplicirt $- b$ wieder mit dem Divisor, und zieht das Produkt von der Dividende ab, so bleibt $- ad - bd + d^2$ Endlich gibt a in $- ad$ dividirt, $- d$, welches mit dem Divisor multiplicirt und subtrahirt aufgeht. Gienge es nicht auf, so müßte man, wie in Zahlen, an den erhaltenen Quotienten einen Bruch anhängen, dessen Zähler der Rest der Division und dessen Nenner der Divisor wäre.

Anmerkung 2.

§. 50.

Anfänglich werden selten Aufgaben vorkommen, wo man eine zusammengesetzte Dividende mit einem zusammengesetzten Divisor wirklich dividiren kann, wenn nicht die Dividende vorhin durch Multiplication entstanden ist. Daher dürfen sich Anfänger durch die geringe Schwierigkeit, welche das Dividiren zu machen scheinet, nicht abschrecken lassen. Kommen Fälle vor, wo man vermuthet, daß sich wirklich dividiren lasse, so versuche man es obs möglich ist. Wills nicht gehen, so verfahre man nach §. 21.

Anmerkung 3.

§. 51.

Wenn der Divisor nur aus Einem Gliede besteht, das entweder nur Einen oder mehrere Buchstaben enthält, welche in allen Gliedern der Dividende angetroffen werden, so streicht man den Divisor nur aus den Gliedern der Dividende weg. (§. 18.)

Z. B. $$\begin{array}{l|l} ab + 3ac - acf & a \\ \hline b + 3c - cf & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 4ab^2 - 5abc + abd & ab \\ \hline 4b - 5c + d & \end{array}$$

Würde aber der Divisor in einem oder etlichen Gliedern der Dividende gar nicht angetroffen, so müßte man sich mit der Zeichen-Division behelfen (§. 21).

Z. B. $$\begin{array}{l|l} a^2bc - 3abcf + dgx^2 & bc \\ \hline a^2 - 3af + \frac{dgx^2}{bc} & \end{array}$$

§. 51. a.

Beynahe alle Anfänger klagen, daß es ihnen an Beyspielen zur Uebung in der Division fehle. Nun könnten sie sich freylich eine Menge verschaffen, wenn sie immer ein Paar zusammengesetzte Faktoren mit einander multiplicirten, und dann das gefundene Produkt wieder mit jedem Faktor dividirten, wo nothwendig der Quotient allezeit den andern Faktor gäbe. Allein diese Divisionen würden zu leicht ausfallen. Ihnen zu Gefallen folgen hier 14 Divisions-Aufgaben; haben sie diese durchgearbeitet, so können sie die nämlichen Dividenden noch einmal mit ihren Quotienten dividiren, und von der Richtigkeit der Rechnung überzeugt seyn, wenn alsdann der erste Divisor als Quotient erscheint. Hierdurch wird die Anzahl dieser Uebungs-Aufgaben verdoppelt; und wer noch überdies in jeder den Quotienten mit dem Divisor multiplicirt, erhält dadurch eben so viel Multiplikations-Aufgaben, indem das Produkt immer wieder der Dividende gleichen muß, wodurch also auch der Mangel der Multiplikations-Aufgaben ersetzt wird. Sollten einige davon zu schwierig scheinen, so löse man sie erst dann auf, wenn man die §§. 53 bis 63 durchgearbeitet hat.

I. $9a^4 - 4b^4$ dividirt durch $3a^2 - 2b^2 = 3a^2 + 2b^2$

II. $6b^2c^3 - 17b^3c^2 + 14b^4c - 3b^5 : 2bc - 3b^2 = 3bc^2 - 4b^2c + b^3$

III. $6a^3 - 15a^2b + 9ab^2 : 2a^2 - 3ab = 3a - 3b$

IV. $8cx^2 - 10bdx - 12cux + 15bdu - 3fg : 4cx - 5bd = 2x - 3u - \frac{3fg}{4cx - 5bd}$

V. $x^5 - y^5 : x - y = x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4$

VI. $y^6 - z^6 : y - z = y^5 + y^4z + y^3z^2 + y^2z^3 + yz^4 + z^5$

VII. $a^5b^2 - a^3b^3 - 3a^3b^6 + a^2b^4 + 3ab^7 - b^5 : a^2b^2 - b^3 = a^3 - 3ab^4 + b^2$

VIII. $30a^5 - 5a^2b^4 - 24a^3b^3 - 35a^2c^5 + 36a^3c^2 + 4b^7 + 28b^3c^5 - 6b^4c^2 - 42c^7$
$: 5a^2 - 4b^3 + 6c^2 = 6a^3 - b^4 - 7c^5$

IX. $6a^2 - 22ab + 15ac + 20b^2 - 26a - 29bc + 44b + 6c^2 - 49c + 8$
$: 2a - 4b + c - 8 = 3a - 5b + 6c - 1$

X. $24a^{2m} + 22a^mb^n + 4b^{2n} - 24a^mc^3 - 12a^mc + 8a^m - 6b^nc^3 - 8b^nc + 2b^n + 12c^4 - 4c$
$: 4a^m + b^n - 2c = 6a^m + 4b^n - 6c^3 + 2$

XI. $21a^4a^m + 63a^4b^n - 36a^mb^m + 48a^mc^n - 108b^mb^n - 56a^4c^x + 144b^nc^n + 96b^mc^x - 128c^nc^x$
$: 3a^m + 9b^n - 8c^x = 7a^4 - 12b^m + 16c^n$

XII. $44a^{2m+2} + 22a^{m+1}b^3 - 48a^{m+1}b^7 - 24b^{10} + 64a^{m+1}c^{m+n} + 32b^3c^{m+n}$
$: 4a^{m+1} + 2b^3 = 11a^{m+1} - 12b^7 + 16c^{m+n}$

XIII. $35a^{2n-2} - 84a^{n-1} + 25a^{n-1}b - 60b + 20a^{n-1}c^{m-x} - 48c^{m-x}$
$: 7a^{n-1} + 5b + 4c^{m-x} = 5a^{n-1} - 12$

XIV. $x^5 + 198x^2 - 10609x + 20394 : x^2 + 2x - 99 = x^3 - 2x^2 + 103x - 206.$

Anmerkung.

§. 52.

Damit kein Anfänger glaube, die Buchstaben-Rechenkunst seye unvollständig, wenn nicht auch gezeigt werde, wie Buchstabenbrüche behandelt werden müssen; so bemerke man, daß sie in allen Stücken ganz nach der gemeinen-Rechenkunst bearbeitet werden, und man nur die Art zu addiren, subtrahiren, multipliciren und dividiren in Acht zu nehmen habe.

So ist

1) $a = \frac{a}{1} = \frac{abd}{bd}$.

2) $a + \frac{b}{d} = \frac{ad+b}{d}$; $a - \frac{b}{d} = \frac{ad-b}{d}$.

3) $\frac{am+n}{m} = a + \frac{n}{m}$; $\frac{bcr^2-p}{r} = bcr - \frac{p}{r}$.

4) $\frac{am+an-abc}{ax} = \frac{m+n-bc}{x}$; $\frac{x^3-x^2+x}{xy} = \frac{x^2-x+1}{y}$

5) $\frac{a}{b}$ (df $= \frac{adf}{bdf}$

$\frac{c}{d}$ (bf $= \frac{cbf}{bdf}$

$\frac{e}{f}$ (bd $= \frac{ebd}{bdf}$

6) $\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc}$; $\frac{\frac{a}{b}}{d} = \frac{ad}{b}$;

$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$.

7) $\frac{a}{b}$ (m $= \frac{am}{bm}$

$\frac{b}{m}$ (b $= \frac{b^2}{bm}$

$\frac{am+b^2}{bm}$

$$8)\ \frac{ab}{cd}\ (m = \frac{abm}{cdm}$$
$$\frac{x}{m}\ (cd = \frac{xcd}{cdm}$$
$$\frac{abm - xcd}{cdm}$$

$$9)\ \frac{a}{b} \times n = \frac{an}{b} = \frac{a}{b:n} = \frac{a}{\frac{b}{n}};\ \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

$$10)\ \frac{a}{b} : n = \frac{a}{bn} = \frac{a:n}{b} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{n};\ \frac{c}{d} : \frac{m}{n} =$$
$$= \frac{c}{d} \times \frac{n}{m} = \frac{cn}{dm};\ c : \frac{a}{b} = \frac{c}{1} \times \frac{b}{a} = \frac{bc}{a}$$

§. 52. a.

Um hier schon zu zeigen, wie die Buchstabenrechnung auf Vortheile in der Zahlenrechnung führen könne, wollen wir annehmen, daß zwey Brüche von gleichen Zählern addirt oder subtrahirt werden sollen. Diese Brüche seyen $\frac{a}{b}$ und $\frac{a}{d}$ Hier ist

$$1)\ \frac{a}{b} + \frac{a}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{ab}{bd} = \frac{ad+ab}{bd} = \frac{a(d+b)}{bd}$$
$$2)\ \frac{a}{b} - \frac{a}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{ab}{bd} = \frac{ad-ab}{bd} = \frac{a(d-b)}{bd}$$

Diese Ausdrücke $\left(\frac{a(d+b)}{bd}\right.$ und $\left.\frac{a(d-b)}{bd}\right)$ enthalten folgende Regel:

Um 2 Brüche von gleichen Zählern zu addiren oder zu subtrahiren, darf man nur die Summe oder die Differenz beyder Nenner mit dem gemeinschaftlichen Zähler multipliciren. Dieß Produkt ist der Zähler, und das Produkt beyder Nenner ist der Nenner der verlangten Summe oder Differenz.

So ist z. B. $\frac{3}{7} + \frac{3}{11} = \frac{3(11+7)}{7\ .\ 11} = \frac{3\ .\ 18}{77} = \frac{54}{77}$

und $\frac{3}{7} - \frac{3}{11} = \frac{3(11-7)}{7\ .\ 11} = \frac{3\ .\ 4}{77} = \frac{12}{77}$

Sechste Erklärung.

§. 53.

Wenn eine Größe mit sich selbst multiplicirt wird, so heißt das Produkt die andere Potenz oder Dignität dieser Größe. Wird die andere Potenz wieder mit der ersten multiplicirt, so kommt die dritte Potenz heraus. Wird die dritte Potenz noch einmal mit der ersten multiplicirt, so entsteht die vierte, und auf gleiche Weise die fünfte, sechste Potenz rc. Die Größe selbst, welche auf diese Art multiplicirt wurde, wird die erste Potenz oder die Wurzel genannt.

Zusatz.

§. 53. a.

Da $+ a$ und $- a$ verschieden sind, so gibt auch $+ a \times - a = - a^2$, keine andere Potenz oder Dignität von a, sondern ist nur ein Produkt von $+ a$ in $- a$.

Anmerkung. 1.

§. 54.

Die Würzel seye a, so ist die zweyte Potenz a^2, die dritte a^3, die 4te a^4, die 5te a^5 rc. (§. 19.)

Anmerkung. 2.

§. 55.

Ehemels pflegte man die 2te Potenz Quadratum oder Census; die 3te Cubus; die 4te Quadrato quadratum oder Censi census auch Biquadratum; die 5te Surdesolidum oder Censi cubus; die 6te Surdesolidum secundum; die 7te Censi censi census rc. zu nennen. Allein die neuere von Cartesen, auf Keplers Anrathen, angenommene Benennung ist viel schicklicher. Daher ist die alte ganz abgekommen, außer daß man noch sagt, Quadratum, Cubus, Biquadratum.

Siebenter willkührlicher Satz.

§. 56.

Aus §. 54 folgt, daß, wenn man bey einem Buchstaben oder auch bey einer Zahl anzeigen will, zur wievielten

Potenz die Größe erhoben sey, man sich hierzu der Exponenten bediene, z. B. a^2, a^5, 7^8, 9^4 &c. Will man keine bestimmte, sondern nur überhaupt irgend eine Potenz einer Größe bezeichnen, so drückt man den Exponenten durch einen Buchstaben aus, z. B. a^m, b^x, x^n &c.

Zusatz 1.

§. 57.

Diese, oben auf der rechten Seite stehende Zahlen oder Buchstaben heißen eben deßwegen **Exponenten**, weil sie den Grad der Dignität (Potestät) oder Potenz bestimmen. Man sieht aber auch hieraus, verglichen mit §. 53. a., daß **negative Dignitäten mit geraden Exponenten unmöglich**, hingegen mit **ungeraden Exponenten möglich** sind. Denn die Faktoren sind entweder + oder —; und in beyden Voraussetzungen wird die Dignität bey geraden Exponenten positiv. Z. B. $+ a \times + a = + a^2$; $- a \times - a = + a^2$. Ingleichem $- a \times - a \times - a \times - a = + a^4$ (§. 41.) hingegen $- a \times - a \times - a \times = - a^3$ &c.

Zusatz 2.

§. 58.

Nach §. 41. werden folgende Potenzen leicht multiplicirt:

$$\begin{array}{ccccccc} a^4 & a^5 & x^m & b^n & c^r & d^n & x^{n-1} \\ a^3 & a & x^n & b^n & c & d^2 & x \\ \hline a^7 & a^6 & x^{m+n} & b^{2n} & c^{r+1} & d^{n+2} & x^n \end{array}$$

Zusatz 3.

§. 59.

Da ferner die Buchstaben beym Dividiren bloß weggenommen werden, so darf man nur den Exponenten des Divisors vom Exponenten der Dividende abziehen, wenn man Potenzen, die einerley Wurzel haben, dividiren will. (§. 42. a.)

Z. B.
$$\begin{array}{cccccc} x^5 & x^5 & a^m & b^{m+n} & c^n & c^{m-1} \\ x^2 & x & a^n & b^n & c & c \\ \hline x^3 & x^4 & a^{m-n} & b^m & c^{n-1} & c^{m-2} \end{array}$$

So giebt auch $a^2 + a^2m^2 + a^2m^4$ dividirt durch $a + am + am^2$ zum Quotienten $a - am + am^2$ (§. 48.)

Zusatz 4.

§. 60.

Da nun a^2 in a^2 dividirt, nach der so eben vorgetragenen Regel, a^0 zum Quotienten gibt, aber auch a^2 durch a^2 dividirt $= 1$ ist; so muß $a^0 = 1$, und überhaupt eine jede Größe mit dem Exponenten $0 = 1$ seyn.

Zusatz 5.

§. 61.

Wenn der Exponent negativ ist, so ists eben so viel, als wäre er von 0 abgezogen worden. Wo aber der Exponent 0 ist, da ist die Größe $= 1$ (§. 60.) und das Subtrahiren des Exponenten zeigt Dividiren an. (§. 59.) Folglich ist $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$; $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$; $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ ꝛc. Denn a^{-2} ist eben so viel als a^0 dividirt mit a^2 (§. 59.) a^0 aber ist $= 1$; daher auch $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$, ingleichem 4^{-3} ist $= \frac{1}{64}$ und 3^{-2} ist $= \frac{1}{9}$ ꝛc.

Zusatz 6.

§. 62.

Jede Größe kann in sich selbst multiplicirt werden, und das Produkt wieder mit der nämlichen Größe. Daher kann auch jede Potenz als eine Wurzel angesehen werden (§. 53.) und wenn sie mit sich selbst multiplicirt wird, so wird ihr Exponent zu sich selbst addirt, (§. 58.) das ist doppelt genommen. Wird damit die zur Wurzel angenommene Potenz noch einmal multiplicirt, so wird auch ihr Exponent noch einmal addirt, das ist dreymal genommen ꝛc. Soll also eine Potenz zu einer höhern Potenz erhoben werden, so darf man nur ihren Exponenten mit der Zahl multipliciren, welche Exponent der Potenz ist, zu der sie erhoben werden soll. Z. B.

Wurzel	a^3	a^5	a^m	a^r
zur Potenz	2	3	n	4
	a^6	a^{15}	a^{mn}	a^{4r}

Zusatz 7.

§. 63.

Durch Multiplication des Exponenten wird eine Potenz zu einer höhern erhoben; folglich auch durch Division des Exponenten die Wurzel ausgezogen, weil Division das Entgegengesetzte von der Multiplication ist. Z. B.

Potenz	a^6	x^{12}	x^m	x^m	x^3	a
Wurzel	2	3	4	n	2	3
	a^3	x^4	$x^{m:4}$	$x^{m:n}$	$x^{3:2}$	$a^{1:3}$

Siebente Erklärung.

§. 64.

Eine Potenz ist **vollkommen**, wenn sich ihre Wurzel genau bestimmen läßt, d. i. wenn sie eine **rationale** Wurzel hat. Die Wurzeln **unvollkommener** Potenzen, die man auf keine Weise ganz genau angeben kann, heißen **Irrationalwurzeln**.

So ist z. B. 4 eine vollkommene zweyte und 27 eine vollkommene dritte Potenz, indem 2 genau die Wurzel der erstern und 3 genau die Wurzel der letztern ist. Hingegen ist dieselbe Zahl 4 eine unvollkommene dritte und die Zahl 27 eine unvollkommene zweyte Potenz, weil es keine Zahl gibt, welche zur dritten Potenz erhoben genau die Zahl 4, und keine, welche zur zweyten Potenz erhoben genau die Zahl 27 gäbe. Die Zahlen 2 und 3 sind folglich die rationalen Wurzeln vom Quadrat 4 und vom Cubus 27; dagegen liegt die Wurzel vom Cubus 4 zwischen 1 und 2, und die Wurzel vom Quadrat 27 zwischen 5 und 6, und diese beyde Wurzeln sind, weil sie sich nicht ganz genau bestimmen lassen, irrational.

Achter willkührlicher Satz.

§. 65.

Wenn man anzeigen will, daß aus einer Größe die Wurzel gezogen werden soll, so braucht man dieß Zeichen $\sqrt{}$. Ists die Wurzel der dritten, vierten Potenz ꝛc. so schreibt man die Zahl oben hinein. Bey der zweyten Potenz aber wird gewöhnlich keine Zahl ins Wurzelzeichen gesetzt. Z. B. $\sqrt[3]{5}$; $\sqrt[5]{10}$; $\sqrt[m]{a^3}$; $\sqrt{x^n}$. Besteht die Größe aus mehrern Gliedern, so schließt man sie entweder mit Klammern ein, oder zieht einen Strich darüber. Z. B. $\sqrt[m]{a^2+b^2}$ oder $\sqrt[n]{}(a^2+b^2)$ ferner $\sqrt{x^2-2cx}$ und $\sqrt{}(dx^2+abx)$. Kürze wegen werden wir öfters diejenige Größen, vor welchen das Wurzelzeichen irgend einer Dignität steht, **Wurzelgrößen**, und den zwischen dem Wurzelzeichen stehenden Exponenten den **Wurzelexponenten** nennen.

Zusatz 1.
§. 66.

Da $\sqrt[3]{a^2} = a^{2:3}$ und $\sqrt[n]{x^m} = x^{m:n}$ (§. 63. 65.) so kann man brauchen, welches man will, und von welchem man Vortheil hat, welches sich unten zeigen wird. Und weil es bey Wurzelgrößen auf den Exponenten ankommt, der ein Bruch ist; so können zwey Wurzelgrößen zu einerley Benennung gebracht werden, wenn man ihre Exponenten, wie die Brüche in der gemeinen Rechenkunst, zu einerley Benennung bringt. Z. B. $\sqrt[3]{a^4}$ und $\sqrt[4]{a^3}$ sind $= a^{4:3}$ und $a^{3:4}$ folglich auch eben so viel als $a^{16:12}$ und $a^{9:12}$ oder $\sqrt[12]{a^{16}}$ und $\sqrt[12]{a^9}$. Desgleichen ist $\sqrt[m]{x^n}$ und $\sqrt[r]{x^s} = \sqrt[rm]{x^{nr}}$ und $\sqrt[rm]{x^{ms}}$.

§. 66. a.

Da $-a^2$, $-a^4$ rc. unmögliche Größen sind (§. 57.) so drückt auch $\sqrt{-a^2}$ desgleichen $\sqrt[4]{-a^4}$, überhaupt (wenn n eine gerade Zahl ist) $\sqrt[n]{-a}$ eine **unmögliche Wurzel** aus. Man nennt sie auch **eingebildete Wurzeln** (imaginarias) Denn es seye $n = 2$ und $-a = -16$, so wäre $\sqrt[2]{-16}$ eine solche unmögliche Wurzel, da sie weder $+4$ noch -4 seyn kann. Hingegen $\sqrt[3]{-64}$ kann -4 seyn, indem $-4 \times -4 \times -4 = -64$. Also sind alle geraden Wurzeln aus negativen Größen unmöglich; dagegen sind alle ungeraden Wurzeln aus negativen Größen möglich, indem eine negative Größe zwar eine Potenz von einem ungeraden, nie aber eine Potenz von einem geraden Exponenten seyn kann.

Zusatz.

§. 67.

Einen Bruch $\frac{m}{n}$ zum Quadrat erheben, heißt, ihn mit sich selbst multipliciren, oder sein Quadrat ist $\frac{m \times m}{n \times n} = \frac{m^2}{n^2}$ nämlich ein Bruch, dessen Zähler und Nenner Quadrate des vorigen Zählers und Nenners sind. Umgekehrt heißt, aus dem Bruch $\frac{m^2}{n^2}$ die Quadrat-Wurzel ziehen, einen Bruch finden, dessen Zähler und Nenner die Quadrat-Wurzeln jenes Zählers und Nenners sind, oder es ist $\sqrt{\frac{m^2}{n^2}} = \frac{\sqrt{m^2}}{\sqrt{n^2}} = \frac{m}{n}$. Denn wenn man $\frac{\sqrt{m^2}}{\sqrt{n^2}}$ quadrirt, so kommt, nach dieses Zusatzes erstem Theil, $\frac{m^2}{n^2}$ heraus. So ist $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2\,.\,2}{3\,.\,3} = \frac{4}{9}$ und $\sqrt{4/9} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = 2/3$. Hierdurch kann man nicht selten eine Wurzelgröße bequemer ausdrücken. Z. B. $\sqrt{\frac{7}{10000}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{10000}} = \frac{\sqrt{7}}{100}$. Eben so ist $\left(\frac{m}{n}\right)^3 = \frac{m^3}{n^3}$, und $\sqrt[3]{\frac{b}{a}} = \frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a}}$. Ferner $\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{4.4.4.}{5.5.5.} = \frac{64}{125}$ und $\sqrt[3]{\frac{8}{343}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{343}} = \frac{2}{7}$. Deßgleichen $\sqrt[3]{\frac{7}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{1000}} = \frac{\sqrt[3]{7}}{10}$. Ueberhaupt erhellt, daß einen Bruch zu einer Potenz erheben, heiße: seinen Zähler und Nenner zu dieser Potenz erheben. So ist zum Beispiel $\left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$. Folglich heißt auch aus einem Bruch irgend eine Wurzel ziehen, solche aus Zähler und Nenner ziehen, z. B.

$$\sqrt[n]{\frac{b}{a}} = \frac{\sqrt[n]{b}}{\sqrt[n]{a}}$$

§. 67. a.

Da $\sqrt{a^2} = a$ auch $\sqrt[3]{a^3} = a$; überhaupt $\sqrt[n]{a^n} = a$, so ist auch $(\sqrt{a^2})^2 = a^2$; und $\left(\sqrt[3]{a^3}\right)^3 = a^3$ und $\left(\sqrt[n]{a^n}\right)^n = a^n$ (§. 56.) Das ist: Wenn eine Größe, vor der ein Wurzelzeichen steht, zur nämlichen Potenz erhoben wird, die der im Wurzelzeichen stehende Exponent bestimmt, so fällt das Wurzelzeichen weg. Z. B. $\left(\sqrt[n]{b}\right)^n = b$.

Anmerkung.

§. 68.

Die Berechnung der Wurzelgrößen setzt freylich noch mehrere Aufgaben voraus. Da sie aber anfänglich etwas schwierig scheinen, so ists schicklicher, sie bis dahin zu versparen, wo sie nöthig sind, und unmittelbar angewendet werden. Siehe unten die §§. 159. bis 169. b. Wir verlassen daher jetzt die Buchstaben-Rechenkunst, und gehen zur Algebra.

§. 68. a.

Was Gleichungen sind, lehrt §. 3. Der Werth der in einer Gleichung vorkommenden unbekannten Größe heißt Wurzel der Gleichung. Diesen Werth finden, heißt die Gleichung reduciren oder auflösen. Glieder der Gleichung sind die durchs = Zeichen verbundene Größen. Man nennt gewöhnlich das linker Hand stehende das erste, das rechter Hand befindliche aber das zweyte Glied. Sind die Glieder zusammengesetzte Größen, (§. 17.) so heißen die durch + oder — verbundenen einfachen Größen die Theile der Glieder. Einfache oder niedere Gleichungen sind diejenigen, in welchen die unbekannte Größe nur in der ersten Dignität vorkommt; höhere oder zusammengesetzte hingegen, worinnen die unbekannte Größe über die erste Dignität steigt. Vom Exponenten derselben hängt der Grad der Gleichung ab. Sie heißt quadratisch, wenn die unbekannte Größe zur zweyten; kubisch, wenn sie zur dritten; biquadratisch, wenn sie zur vierten; eine Gleichung vom 5ten, 6ten rc. Grad, wenn sie zur 5ten, 6ten rc. Dignität erhoben ist. So sind z. B. $x + a = b - c$ oder $3x + ax = q$ einfache; hingegen $x^2 = a + b$; $x^3 = m - n$ quadratische und kubische Gleichungen. Die Gleichung ist bestimmt, (determinata) wenn nur Eine unbekannte Größe darinnen vorkommt, die nur Einen, oder doch eine bestimmte Anzahl von Werthen hat. Unbestimmte Gleichungen sind das Gegentheil. Reine Gleichungen enthalten bloß die höchste Potenz der unbekannten Größe, die ihrem Grad gemäß ist; unreine außer der höchsten noch niedrigere derselben (Aequationes purae und adfectae.) So sind $x^2 = a + b$ und $x^3 = m + n$ reine; $x^2 + 2ax = q$ oder $x^3 - 2x^2 = m$ unreine Gleichungen.

Aufgabe 5.

§. 69.

Eine Aufgabe algebraisch aufzulösen.

Hierbey kommt es immer auf drey Stücke an: 1) Auf die Benennung (§. 12. 13. 14. 15.) 2) Auf die Bildung Einer oder mehrerer Gleichungen (§. 68. a.) 3) Auf die Reduktion. (§. 68. a.) Daher verfährt man also:

1) Man benennt die unbekannte Größen mit x, y, z; die bekannte aber mit a, b, c rc. (§. 12.) oder sind es Zahlen, so können sie als Zahlen stehen bleiben.
2) Man sucht aus den Umständen der Aufgabe eine Gleichung, indem man eine und dieselbe Größe auf doppelte Art ausdrückt. (§. 3.)
3) Wenn eine Gleichung gebildet ist, und auf beyden Seiten bekannte und unbekannte Größen vermengt stehen; so