Jak. Frid. Malers weil. Hochfürstl. Markgräfl. Bad. Kirchenraths und Rectors des Gymnasii Jllustris Algebra zum Gebrauch hoher und niederer Schulen

Maler, Jakob Friedrich

Carlsruhe, 1821

Sechster willkuehrlicher Satz

urn:nbn:de:bsz:31-266447

nicht gegen A, sondern gegen B, folglich gegen A negativ, gegen B aber positiv. Nun wird man auch verstehen, was man bey der Auflösung folgender Aufgabe denken müsse. Es steht eine Perpendikulare vor uns auf dem Horizont. Wir finden durch algebraische Rechnung, daß ein gewisses Punkt — 4 Fuß zur Rechten davon entfernt ist. Es wird auf der entgegengesetzten Seite, das ist 4 Fuß zur linken liegen. Vielleicht stellt sich der Anfänger positive Größen am deutlichsten unter Kapitalien, negative unter Schulden oder einem Mangel, in Bezug auf das, was davon abgezogen werden soll, vor.

Sechster willkührlicher Satz.

§. 24.

Jeder weiß aus den ersten Anfangs-Gründen der Mathematik, daß man die Gleichheit zweyer Größen durchs Zeichen $=$ ausdrückt, daß also $5 = 3 + 2$ gelesen wird: 5 ist gleich $3 + 2$. Jngleichem daß $8 > 5$, so viel heiße, als 8 ist größer als 5, hingegen $3 < 4$, so viel, als 3 ist kleiner als 4.

Grundsatz 1.

§. 25.

Positive Größen zu positiven addirt, geben positive; hingegen negative zu negativen, negative. Z. B. $+ 7$ und $+ 3 = + 10$; $- 5$ und $- 8 = - 13$.

Grundsatz 2.

§. 26.

Wenn gleich große positive und negative Größen zusammen addirt werden, so zerstöhren sie sich, heben einander auf, oder geben Nichts z. B. $+ 7 - 7 = 0$ (§. 22). Eine negative Größe ist also nur in Rücksicht auf die ihr entgegengesetzte positive weniger als Nichts, indem auch negative Größen wirkliche Größen sind (§. 32) und nur in dieser Bedeutung ist der Ausdruck $- 4 < 0$ wahr.

Zusatz.

§. 27.

Werden daher ungleiche positive und negative Größen addirt, so zerstöhrt die kleinere von der größern so viel, als sie selbst beträgt, und das übrige bleibt. Ist demnach die größere positiv, so bleibt eine positive; ist sie aber negativ, so bleibt eine negative Größe übrig. Z. B. + 9 zu — 3 addirt, giebt + 6; und — 8 zu + 4 addirt, giebt — 4.

Dritter Grundsatz.

§. 28.

Eine kleinere positive von einer größern positiven Größe abgezogen läßt eine positive, und eine kleinere negative von einer größern negativen weggenommen, läßt auch eine negative übrig. Z. B. + 7 von + 15 abgezogen läßt + 8; hingegen — 5 von — 13 abgezogen ist = — 8.

Vierter Grundsatz.

§. 29.

Wenn eine positive Größe subtrahirt wird, so wird die Minuende um so viel weniger als die Subtrahende beträgt. Z. B. + 3 von + 12 abgezogen giebt + 9.

Zusatz 1.

§. 30.

Wird daher eine positive Größe von einer negativen abgezogen, so wird der Mangel um so viel größer. Man soll z. B. von — 5, + 3 wegnehmen, so bleibt erstlich der Mangel — 5. Soll nun + 3 davon noch weggenommen werden, so steigt der Mangel auf 8 oder giebt — 8.

Zusatz 2.

§. 31.

Soll eine größere positive Größe von einer kleinern abgezogen werden, so kann man nicht mehr, als die kleinere beträgt, davon wegnehmen, und der Rest wird eine negative Größe. Z. B. + 5 von + 3 abgezogen, giebt — 2. Denn, wenn ich nur 3 fl. habe, und soll 5 fl. bezahlen, so bleibe ich 2 fl. schuldig.

Zusatz 3.

§. 32.

Aus diesen zwey Zusätzen erhellt, daß, wenn eine positive Größe abgezogen werden soll, es eben so viel ist, als wenn sie zur negativen gemacht, und addirt würde.

Zusatz 4.

§. 32. a.

Jede einfache Größe ohne irgend ein Zeichen ist positiv. Z. B. $a = + a$. Soll sie negativ seyn, so muß das — Zeichen davor stehen. Eben so ist auch der erste Theil jeder zusammengesetzten Größe, wenn kein Zeichen davor steht, positiv. Z. B. in $a + b - c$ ist $a = + a$.

Lehrsatz 1.

§. 33.

Wenn eine negative Größe subtrahirt wird, so wird die Minuende um so viel größer.

Beweis.

Gesetzt es soll von einer Größe, die indessen a heißen mag, eine negative $- b$ abgezogen werden, so stelle man sich vor, es werde b zu a addirt, und eben dies b wieder subtrahirt, so bleibt a was es vorher war (§. 26) und steht also: $a + b - b$. Nimmt man nun $- b$ weg, so muß $a + b$ übrig bleiben, folglich ist a um b vermehrt worden.

Anmerkung.

§. 34.

Man setze, dieß leichter zu begreifen, ich hätte 12 fl. im Vermögen, wäre aber 12 fl. schuldig, so hätte ich eigentlich nichts. Würde nun die Schuld von 12 fl. subtrahirt oder aufgehoben, so blieben mir meine 12 fl. im Beutel, weil die aufgehobene Schuld vernichtet wäre, und folglich nicht mehr bezahlt werden dürfte. Daher ist's für meine Kasse, eben so viel, als ob ich durch Subtraction der Schuld, 12 fl. erhalten hätte.

Zusatz 1.

§. 35.

Wird also eine negative Größe von einer positiven abgezogen, so ist's eben so viel, als wenn eine gleichgroße positive addirt würde. Z. B. — 2 von + 5 subtrahirt ist = + 5 + 2 = 7.

Zusatz 2.

§. 36.

Soll eine größere negative Größe von einer kleinern negativen abgezogen werden, so kann man nicht mehr wegnehmen, als die kleinere selbst beträgt, und der Rest wird positiv. Z. B. — 10 von — 7 abgezogen, giebt + 3. Denn es ist eben so viel, als wäre ich 7 fl. schuldig, und jemand bezahlte für mich eine Schuld von 10 fl., so blieben mir noch 3 fl. übrig.

Zusatz 3.

§. 37.

Hieraus erhellt, daß es auch da, wo eine negative Größe von einer negativen abgezogen werden soll, wieder eben so viel sey, als wenn sie in einer gleichgroße positive verwandelt und zu dieser addirt würde.

§. 37. a.

Wir ziehen das bisherige, vom §. 25. an, in folgende Additions- und Subtraktionsregeln zusammen.

A) Regeln für die Addition.

1) Größen mit einerley Zeichen werden gewöhnlich addirt, und die Summe erhält das nämliche Zeichen.

2) Größen mit verschiedenen Zeichen muß man, um sie zu addiren, subtrahiren, nämlich die kleinere von der größern, und dem Rest das Zeichen der größern geben, so hat man die Summe.

B) Regel für die Subtraktion.

Zwey Größen, sie mögen Zeichen haben, welche sie wollen, werden subtrahirt, wenn man die Zeichen der Subtrahende umkehrt und dann addirt.

Lehrsatz 2.

§. 38.

Wenn mit einer positiven Größe multiplicirt wird, so ist's eben so viel, als wenn man die zu multiplicirende Größe so oft addirte, als der positive Multiplikator Einheiten hat. Wird aber mit einer negativen multiplitirt, so wird die Multiplikande eben so oft subtrahirt.

Beweis.

Da die Multiplikande so oft genommen wird, als der Multiplicator Einheiten hat; so ist klar, daß bey einem positiven Multiplicator auch die Multiplicande wirklich etliche mal zu sich selbst addirt werde. Ist aber der Multiplikator negativ, so muß zwar die Multiplikande auch so viel mal genommen werden, als der Multiplicator Einheiten hat, aber das Entgegengesetzte von der Multiplikande. Folglich ist's eben so viel, als ob die Multiplikande so oft abgezogen würde, als der Multiplikator Einheiten hat.

Wäre der Multiplikator keine ganze Zahl, sollte man z. B. 7 mit $\frac{3}{4}$ multipliciren, so kann dieß freylich nicht heißen: die 7 etliche mal zu sich selbst addiren. Es wird aber doch niemand den Ausdruck undeutlich finden: die 7 drey viertel mal nehmen, heißt sie so oft nehmen, als 1 in $\frac{3}{4}$ enthalten ist. Es ist aber die 1 in $\frac{3}{4}$ nicht ganz, sondern nur $\frac{3}{4}$ mal enthalten.

Sollte man 7 mit $-\frac{3}{4}$ multipliciren, so hieße auch dieß, die 7 so oft nehmen, als 1 in $-\frac{3}{4}$ enthalten ist. Es ist aber in $-\frac{3}{4}$ die Einheit $\frac{3}{4}$ mal abgezogen; man soll also auch 7 drey viertel mal abziehen, oder man erhält $-\frac{7\,.\,3}{4} = -\frac{21.}{4}$

Zusatz 1.

§. 39.

Wird daher $+ a$ mit $+ b$ multiplicirt, so giebts $+ ab$. Denn, wenn die positive Größe a etliche mal zu sich selbst addirt werden soll, so muß sie positiv bleiben (§. 25. 17. 38.) hingegen giebt $-a \times + b = - ab$, weil eine negative Größe etliche mal zu sich selbst addirt, negativ bleibt. (§. 25. 27. 38.)

Zusatz 2.

§. 40.

Wird $+ a$ mit $- b$ multiplicirt, so giebts $- ab$; denn die positive Größe a wird etliche mal subtrahirt. (17.29.38.) Hingegen giebt $- a$ mit $- b = + ab$, weil die negative Größe $- a$, etliche mal subtrahirt, das ist, ihr Entgegengesetztes genommen wird. (§. 35. 17. 38.)

Zusatz 3.

§. 41.

Folglich geben einerley Zeichen (+ und + desgleichen − und −) im Multipliciren +; verschiedene Zeichen hingegen (+ und − oder − und +) geben −. (§. 39. 40.)

§. 41. a.

Dieser Satz wird auf folgende Art ganz scharf bewiesen. Es ist

$$1)\ + a \times + b = + ab.$$
$$2)\ - a \times + b = - ab.$$

Beweis.

$$+ a = + 2a - a$$
$$\times \text{ mit } + b = + b \text{ giebt (Nro. 1.)}$$

$+ ab = + 2ab - ab$, denn gäbe $- a$ mit $+ b$ multiplicirt $+ ab$, so müßte, weil Gleiches mit Gleichem multiplicirt, gleiche Produkte giebt, $+ ab = + 2ab + ab = + 3ab$ seyn, was sich offenbar widerspricht.

$$3)\ - a \times - b = + ab.$$

Beweis.

$$+ a = + 2a - a$$
$$\times \text{ mit } - b = - b \text{ giebt (Nro. 2.)}$$

$- ab = - 2ab + ab$, denn gäbe $- a$ mit $- b$ multiplicirt $- ab$, so müßte ja $- ab = - 3ab$ seyn, was unmöglich.

§. 41. b.

Aehnliche Größen mit Exponenten werden multiplicirt, wenn man ihre Exponenten addirt. (§. 19.) Z. B. $a^4 \times a^3$

$= a^7$. Denn $a^4 =$ aaaa und $a^3 =$ aaa. Folglich $a^4 \times a^3$ $=$ aaaa $\times$ aaa $=$ aaaaaaa $= a^7$.

Zusatz 4.

§. 42.

Wenn ein Produkt mit einem Faktor dividirt wird, so muß der andere Faktor, als Quotient, heraus kommen. Da nun in folgenden vier möglichen Fällen

$$\begin{array}{cccc} 1)\ +a & 2)\ -a & 3)\ +a & 4)\ -a \\ +b & +b & -b & -b \\ \hline +ab & -ab & -ab & +ab. \end{array}$$

durch die Multiplication die hier stehende Produkte erscheinen, (§. 39. 40.) so muß auch im ersten Fall $+$ ab mit $+$ b dividirt, $+$ a; im zweyten Fall $-$ ab mit $+$ b, $-$ a; im dritten Fall $-$ ab mit $-$ b, $+$ a; und endlich im vierten Fall $+$ ab mit $-$ b, $-$ a zum Quotienten geben. Folglich geben auch beym dividiren einerley Zeichen $+$, verschiedene Zeichen aber geben $-$.

§. 42. a.

Aehnliche Größen mit Exponenten werden dividirt, wenn man ihre Exponenten von einander abzieht. (§. 42. und 41. b.) Z. B. $\frac{a^7}{a^4} = a^3$.

§. 42. b.

Oft kann man zusammengesetzte Größen, wenn mehrere ähnliche darunter befindlich sind, mit weniger Zeichen ausdrücken, ohne ihren Werth zu ändern. Dieß nennt man Reduciren oder auf den kleinsten Ausdruck bringen. Die Reduktions-Regeln fließen aus folgender Betrachtung. Jede zusammengesetzte Größe besteht entweder aus unähnlichen einfachen Größen, z. B. $a + b - c$. Hier ist keine Reduktion möglich. Oder sie besteht aus bloß ähnlichen, oder aus ähnlich und gleichen. Im 2ten und 3ten Fall haben sie entweder einerley, oder verschiedene Zeichen. Haben sie einerley, so addirt man die Coefficienten. Z. B. $2a + 4b + a + 2b - c - 3c = 3a + 6b - 4c$. Haben sie verschiedene Zeichen, so subtrahirt man die kleinere

Coefficienten von den größern und giebt dem Rest das Zeichen der größern. Z. B. $7a - a - 4b + 2b = 6a - 2b$; ingleichem $5a - 5a + 3b + 3b = 6b$. (§. 25. 26. 27.)

Aufgabe 1.

§. 43.

Aehnliche Buchstaben - Größen mit einerley oder verschiedenen Zeichen zu addiren.

Auflösung und Beweis.

Ordnet die Posten nach (§. 18. a. 2.) und reducirt sie nach (§. 42. b.)

$$\begin{array}{r} 5a - 3b + 4c - 7d - 3f \\ 2a + 3b - 5c - 2d + 6f \\ \hline 7a \quad * \quad - c - 9d + 3f \end{array}$$

Anmerkung.

§. 44.

Sollen unähnliche Buchstaben - Größen zusammen addirt werden, so setzt man sie mit ihren Zeichen nur neben einander. Z. B. $+ a$ zu $- 3b$ addirt, giebt $+ a - 3b$ und $2a$ zu $+ b$ addirt, giebt $2a + b$.

Aufgabe 2,

§. 45.

Aehnliche Buchstaben-Größen mit einerley oder verschiedenen Zeichen von einander zu subtrahiren.

Auflösung und Beweis.

Ordnet sie nach (§. 18. a. 2.) und stellt euch vor, die Subtrahende habe gerade die entgegengesetzte Zeichen, das ist: statt + stehe —, und statt — stehe +. Sodann addiret nach §. 43. so habt ihr den Rest. (§. 32, 35 und 37. a.)

Beispiel.

$$\begin{array}{r} 7a + 3b - 2c - 4f + 2g - 4x \\ 3a - 2b - 4c - 2f + 4g + 3x \\ - \quad + \quad + \quad + \quad - \quad - \\ \hline 4a + 5b + 2c - 2f - 2g - 7x \end{array}$$