Die Bewegungs-Mechanismen

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1857

Räderweke

urn:nbn:de:bsz:31-266481

ERKLÄRUNG DER BEWEGUNGS-MECHANISMEN.

Räderwerke.

TAB. I.

Fig. 1 und 2. Gewöhnliche Stirnräder zur Verbindung von parallelen Axen.

Fig. 3 und 4. Gewöhnliche Kegelräder zur Verbindung zweier Axen, deren Richtungen einen Winkel bilden, sich jedoch schneiden.

Fig. 5 und 6. Kegelräder mit schief und krumm geschnittenen Zähnen. Diese Zahnflächen sind die Einhüllungsflächen, welche die Schneide eines Meisels durch seine relative Bewegung gegen die beiden Radkörper beschreibt, wenn der Meisel in gewisser Weise fortbewegt wird und gleichzeitig die Radkörper mit den ihnen entsprechenden Geschwindigkeiten um ihre Axen gedreht werden.

TAB. II.

Fig. 1. Uebersetzung mit einem Zwischenrad. a und c sind zwei durch ein Zwischenrad b verbundene Räder. Dieses Zwischenrad hat keinen Einfluss auf das Geschwindigkeitsverhältniss der Räder a und c, wohl aber auf ihre Bewegungsrichtungen. Diese sind, wenn die Räder a und c unmittelbar in einander greifen, entgegengesetzte, wenn sie hingegen durch ein Zwischenrad in Verbindung gesetzt werden, übereinstimmende. Aehnlich verhält es sich auch, wenn die zwei Räder durch eine beliebige, aber ungerade Anzahl von Zwischenrädern verbunden werden.

Fig. 2. Uebersetzung mit zwei Zwischenrädern. a und d sind zwei Räder, die durch zwei Zwischenräder b und c in Verbindung gesetzt sind. Hier ist abermals das Geschwindigkeitsverhältniss der Räder a und d genau so gross, wie in dem Fall, wenn dieselben unmittelbar auf einander einwirkten, und die Bewegungsrichtungen von a und d sind einander entgegengesetzt. Aehnlich verhält es sich auch, wenn die zwei Räder a und d durch eine beliebige, jedoch gerade Anzahl von Zwischenrädern in Verbindung gebracht werden.

Fig. 3. Verbindung zweier Axen durch eine Zwischenaxe. a und b sind zwei Axen, deren Richtungen sich nicht schneiden und einen beliebigen Winkel gegen einander bilden. c ist eine Zwischenaxe, die so gelegt ist, dass ihre Richtung sowohl die Richtung von a, als auch jene von b durchschneidet. d und e sind zwei konische Räder, welche a mit c, f und g sind zwei konische Räder, welche c mit b verbinden.

Fig. 4 und 5. Räderzählwerk. a ist eine rasch laufende Axe, deren Umdrehungen gezählt werden sollen; b ein mit a verbundenes Getriebe mit ($z = 15$) Zähnen; c und d sind zwei Räder, ersteres hat $Z = 59$, letzteres $Z + 1 = 60$ Zähne. f ist eine in dem Gestell g gelagerte Axe, mit welcher das Rad c und ein Zeiger e verbunden sind, welcher auf eine an dem Rad d angebrachte Eintheilung weist. d dreht sich frei auf der Axe f. Die Anzahl der Umdrehungen, welche die Axe a macht, wenn der Zeiger in seiner relativen Bewegung gegen die Eintheilung des Rades d einmal herumgegangen ist, beträgt:

$$\frac{Z\,(Z+1)}{z}$$

oder weil im Modell $Z = 59$, $Z + 1 = 60$, $z = 15$ ist:

$$\frac{59 \times 60}{15} = 236$$

Der Umkreis ist daher in diesem Falle in 236 Theile zu theilen, damit ein Theilungs-Intervall einer Umdrehung der Axe a entspricht.

TAB. III.

Fig. 5 und 6. Schraubenräder für parallele Axen, Uebersetzung ohne Geschwindigkeitsänderung.

Fig. 1 und 2. Schraubenräder für Axen, deren Richtungen einen rechten Winkel bilden und sich nicht schneiden. Uebersetzung ohne Geschwindigkeitsänderung.

Fig. 3 und 4. Schraubenräder für Axen, deren Richtungen einen rechten Winkel bilden und sich nicht schneiden. Uebersetzung mit Geschwindigkeitsänderung.

Die Zähne dieser Räder sind die Einhüllungsflächen, welche entstehen, wenn die Schneide eines Meisels nach einer gewissen Richtung geradlinig und mit gleichförmiger Geschwindigkeit fortbewegt wird, während gleichzeitig die cylindrischen Radkörper mit der ihnen angemessenen Geschwindigkeit um ihre Axen gedreht werden. Diese Räder wurden zuerst von *White* angewendet und später durch *Olivier* wissenschaftlich untersucht.

Räder und Gestelle sind von Gusseisen, die Axen von Schmiedeisen.

TAB. IV.

Fig. 1, 2, 3, 4. Schraube ohne Ende. Bei einer Umdrehung der Schraubenaxe geht das Rad um eine Zahntheilung weiter, die Uebersetzungszahl ist demnach gleich der Anzahl der Zähne des Zahnrades. Es ist der compendiöseste Rädermechanismus für starke Uebersetzungen in's Langsame, consumirt jedoch leider durch Reibung ungemein viele Kraft, und kann desshalb zur Uebertragung von mächtigeren Kräften nicht gebraucht werden, wohl aber um sehr sanfte langsame Drehbewegungen hervorzubringen.

Das Rad und das Gestelle sind von Gusseisen, die Axe mit Wurm und Kurbel ist von Schmiedeeisen, eben so auch der Zapfen, auf dem sich das Rad dreht.

Fig. 5, 6, 7, 8. Spiralrad mit Zahnrad. Die Wirkung von diesem Mechanismus ist ähnlich dem vorhergehenden. Bei einer Umdrehung des Spiralrades geht das Zahnrad um eine Zahntheilung weiter, die Uebersetzungszahl ist also auch hier gleich der Anzahl der Zähne des Zahnrades. Dieser Mechanismus erschöpft aber durch Reibung noch mehr Kraft, als die Schraube ohne Ende, indem bei einer Umdrehung des Spiralrades die aus dem Druck der Zähne des Rades gegen die Spiralwindung entspringende Reibung durch die Länge einer Spiralwindung überwunden werden muss. Der Mechanismus kann als Zählapparat gut gebraucht werden, um namentlich die Anzahl von schnell umgehenden Axen, z. B. Turbinenaxen zu zählen.

TAB. V.

Fig. 1 und 3. Differenzial-Räderwerk mit Kegelrädern. Dieses Rädersystem, welches bekanntlich bei den Banc à broches-Maschinen zur Fadenaufwicklung gebraucht wird, ist seinem Wesen nach ein Mechanismus, durch welchen drehende Bewegungen summirt oder abgezogen werden können.

a ist eine Axe, mit welcher das Kegelrad b fest verbunden ist. c ist ein Kegelrad, das sich frei auf der Axe a dreht. Mit demselben ist die cylinderische Röhre d und das Zahnrad e fest verbunden. c d und e bilden also einen Körper, der sich frei auf a dreht. f ist ein Stirnrad, das sich frei auf a dreht; es wird von der Axe g aus vermittelst des Getriebes h bewegt. i ist ein sogenanntes Planetenrad, dessen Axe in dem Körper von f gelagert ist und dessen Zähne in jene der Kegelräder b und c eingreifen. k ist ein wegen des Planetenrades i angebrachtes Gegengewicht. Werden die Axen a und g vermittelst der daran befindlichen Kurbeln, wie die Pfeile andeuten, nach einerlei Richtung gedreht, so entsteht in dem Rade c und in dem damit verbundenen Rade e eine drehende Bewegung, nach der in der Zeichnung angedeuteten entgegengesetzten Richtung, und die Geschwindigkeit dieser Bewegung wird auf folgende Weise bestimmt:

Nennt man

$\binom{n}{b}$ $\binom{n}{f}$ $\binom{n}{e}$ die Anzahl der Umdrehungen der Räder b, f und e in einer Minute, so ist, wenn die Bewegungen nach den in der Zeichnung angegebenen Pfeilrichtungen erfolgen:

$$\binom{n}{e} = \binom{n}{b} + 2\binom{n}{f} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Wird a nach einer Richtung gedreht, die der durch den Pfeil angedeuteten entgegengesetzt ist, so ist:

$$\binom{n}{e} = -\binom{n}{b} + 2\binom{n}{f} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Wird dagegen g nach einer Richtung gedreht, die der durch den Pfeil angedeuteten entgegen gesetzt ist, so hat man:

$$\binom{n}{e} = \binom{n}{b} - 2\binom{n}{f} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

In dem ersteren dieser drei Fälle bewirkt der Mechanismus eine Addition, in den beiden letzteren Subtraktionen. Fällt der Werth von $\binom{n}{e}$ negativ aus, so ist diess ein Zeichen, dass die Bewegung von e nach einer Richtung erfolgt, die der durch den Pfeil angedeuteten entgegengesetzt ist.

Ist $\binom{n}{b} = 2\binom{n}{f}$, d. h. dreht sich das Rad b zweimal so schnell als f und sind die Bewegungsrichtungen dieser Räder entgegengesetzt, so wird $\binom{n}{e} = o$, d. h. das Rad e macht dann keine Bewegung.

Fig. 2. Differenzial-Räderwerk mit Stirnrädern. Auch dieser Mechanismus bewirkt eine Addition oder eine Subtraktion zweier drehenden Bewegungen, jedoch in einem allgemeineren Sinne als der vorhergehende.

a und b sind zwei mit Kurbeln versehene Axen, deren Drehbewegungen vermittelst des Rädersystems combinirt werden. Das Resultat erscheint in dem Zeiger c. d ist ein mit a unveränderlich verbundenes Stirnrad. g ist ein auf der Axe a frei drehbares Rad, das mit der Röhre k und mit dem Zeiger c zu einem Körper vereinigt ist, g k c bilden also einen auf a frei drehbaren Körper. h ist ein Stirnrad, das sich frei auf a dreht und von der Axe b aus vermittelst des Getriebes i bewegt wird. e und f sind zwei mit einer Axe l verbundene Räder. Die Zähne von e greifen in d, die Zähne von f greifen in g ein. Die Axe l ist in den Körper des Rades h gelagert.

Werden nun die Axen a und b vermittelst der an denselben angebrachten Kurbeln so gedreht, wie die Pfeile andeuten, so erscheint in c eine drehende Bewegung, deren Geschwindigkeit auf folgende Weise bestimmt wird.

Bezeichnet man durch d e f g nicht nur die Räder, auf welche diese Buchstaben geschrieben sind, sondern zu gleicher Zeit auch die Halbmesser ihrer Theilkreise und durch die Symbole $\binom{n}{d}$ $\binom{n}{h}$ $\binom{n}{c}$ die Anzahl der Umdrehungen, welche gleichzeitig die Räder d h und die Zeiger c in einer Minute machen, so hat man:

$$\binom{n}{c} = \frac{d}{e}\,\frac{f}{g}\binom{n}{d} + \left(\frac{d}{e}\,\frac{f}{g} - 1\right)\binom{n}{h} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

und die Bewegung von c erfolgt nach der Richtung des auf c gezeichneten Pfeiles oder nach entgegengesetzter Richtung, je nachdem der Werth von $\binom{n}{c}$ positiv oder negativ ausfällt. Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{d}{e}\,\frac{f}{g} = m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

so wird:

$$\binom{n}{c} = m\binom{n}{d} + (m-1)\binom{n}{h} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Die Wirkung dieses Rädersystems besteht also darin, dass (bei den in der Zeichnung angedeuteten Drehungsrichtungen) in dem Rade c die Anzahl der Umdrehungen von d m fach und die Anzahl der Umdrehungen von b (m — 1) fach auftreten.

In allen Anwendungen der Differenzial-Räderwerke ist die eine von den Axen, deren Drehbewegungen combinirt werden sollen, eine constante, die andere dagegen eine veränderliche Geschwindigkeit, die resultirende Bewegung ist daher immer eine veränderliche.

Die Räder der Modelle sind von Messing, die Axen von Schmiedeisen, die Gestelle von Gusseisen, der Sockel von Holz.

TAB. VI.

Fig. 1, 2, 3, 4. Differenzial-Räderwerk mit veränderlicher Geschwindigkeit in vier Ansichten. a und b sind die beiden Axen, deren drehende Bewegung combinirt werden soll. Die Bewegung von b ist gleichförmig, jene von a veränderlich. Das Kegelrad c ist fest verbunden mit b. Das Kegelrad d mit der Röhre e und dem Zeiger v, drehen sich zusammen frei auf der Axe b. Das Kegelrad f dreht sich frei auf b und ist mit einem konischen Planetenrad g versehen, dessen Axe in dem Körper des Rades f gelagert ist. Die bis hieher beschriebenen Bestandtheile bilden das eigentliche Differenzial-Räderwerk. Die übrigen Theile des Apparates dienen dazu, der Axe a eine variable Geschwindigkeit zu ertheilen. h i k sind drei Stirnräder. h ist mit der Axe b verbunden. i dreht sich frei auf dem Zapfen l und dient als Zwischenrad. k ist mit einer Axe m verbunden. Auf dieser Axe befindet sich eine mit Leder überzogene Metallscheibe n, die durch zwei ringförmige Stahlfedern p gegen ein ebenfalls mit Leder überzogenes Röllchen q gedrückt wird. Diese Rolle q kann längs der viereckigen Axe a hin- und hergleiten, eine Drehung von q bewirkt jedoch auch eine Drehung von a. An dem Röllchen q ist ein Hals angebracht, der von einer Gabel t umfasst wird, die durch eine Schraube s hin- und hergeführt werden kann.

Will man nun den Apparat so in Wirkung setzen, dass eine constante Bewegung von b mit einer variablen Bewegung von a combinirt wird, so kann diess geschehen, indem man vermittelst Kurbeln, die in der Zeichnung weggelassen wurden, die Räderaxe b und die Schraubenspindel s in gleichförmig drehende Bewegungen versetzt. Denn wenn b gedreht wird, wird zunächst vermittelst der Räder c g d der Zeiger v, zur Bewegung angeregt; allein gleichzeitig wird durch die Räder h i k und durch die Scheibe n die Rolle q gedreht und dadurch kommt die Axe a und vermittelst des Getriebes r das Rad f in Bewegung, so dass nun die Bewegungen von b und a combinirt in e erscheinen.

Wenn aber auch gleichzeitig die Spindel s gedreht wird, erlangt die Gabel t eine fortschreitende Bewegung und bewirkt, dass der Berührungspunkt zwischen der Scheibe n und dem Röllchen q gegen den Mittelpunkt von n hinrückt, was dann zur Folge hat, dass die Geschwindigkeit der drehenden Bewegung von a abnimmt. Auf die so eben beschriebene Weise wird also durch zwei gleichförmig drehende Bewegungen der Axe b und Spindel s eine veränderliche Bewegung in der Axe a hervorgebracht, die dann mit der Bewegung von b combinirt im Zeiger v_1 erscheint.

Das Gleiche kann man auch hervorbringen, wenn die Spindel s und die Axe m statt der Achse b gedreht werden.

Wenn der Ring u weggenommen wird, kann das Zwischenrad i auf dem Zapfen l hinausgeschoben werden, so dass es dann nicht mehr in die Räder eingreift, und wenn dann die Axen b und a direkt gedreht werden, lauft q n und k wirkungslos mit und der ganze Apparat combinirt in diesem Falle die constanten drehenden Bewegungen von b und a.

Auch an diesem Modell sind die Räder und Rollen von Messing, die Axen von Schmiedeeisen, das Gestelle von Gusseisen.

TAB. VII.

Die auf dieser Tab. dargestellten Modelle zeigen Anwendungen von den Differenzial-Räderwerken auf sogenannte Uebersetzungskurbeln. Diese sind jedoch kaum von irgend einem praktischen Werth.

Fig. 1 und 2 sind zwei Ansichten einer Uebersetzungskurbel mit Kegelräder.

a ist eine Axe, die sich in dem Gestell b dreht, und mit welcher das Schwungrad c und das konische Rad d verbunden ist. e ist ein an das Gestelle b befestigtes, mithin unbewegliches Kegelrad. f ist eine auf der Axe a frei drehbare Kurbel, deren Körper über diese Axe hinaus verlängert ist. g ist ein konisches Rädchen, dessen Zähne sowohl in d als auch in e eingreifen; es dreht sich um einen Zapfen, der am Ende der Verlängerung von f angebracht ist. Wird die Kurbel f einmal herumgedreht, so macht die Axe a und das damit verbundene Schwungrad c gleichzeitig zwei Umdrehungen.

Fig. 3 und 4 sind zwei Ansichten einer Uebersetzungskurbel mit Stirnräder.

a ist eine Axe, die sich im Gestell b dreht und mit welcher das Schwungrad c und das Rädchen d verbunden ist. g ist ein an das Gestell b geschraubtes unbewegliches Rad. h ist eine Kurbel, die sich frei auf der Axe a dreht. Dieselbe ist über die Axe a hinaus verlängert, und in dieser Verlängerung dreht sich eine mit zwei Rädchen f und e versehene Axe i. f greift in g ein, e in d. Wird die Kurbel einmal herumgedreht, so macht das Schwungrad gleichzeitig

$$\frac{g}{f}\,\frac{e}{d} - 1$$

Umdrehungen nach einer Richtung, die jener, nach welcher die Kurbel gedreht wurde, entgegengesetzt ist. In diesem Ausdruck bedeuten die Buchstaben die Halbmesser der Theilkreise, der mit g f e d bezeichneten Räder.

TAB. VIII.

Fig. 1 und 2 zwei Ansichten, *Fig. 3, 4, 5* einzelne Theile von dem sogenannten Rädergehänge. Dieser Mechanismus ist bestimmt, die drehende Bewegung von einer fixen Axe aus auf eine bewegliche, d. h. ihren Ort verändernde Axe zu übertragen. a ist die fixe, c die bewegliche Axe. Diese letztere wird durch zwei Schwingen f f gehalten, die sich um die Zapfen g g drehen, und wird vermittelst der Kurbeln h h und der Schubstangen i i in eine hin- und hergehende Bewegung versetzt, wenn die Axe a vermittelst einer der beiden Kurbeln h gedreht wird. d d sind zwei um die Axe a, e e zwei um die Axe c drehbare in der Mitte durch einen Bolzen gegliederte Schienen. In diesen Schienen liegen die Axen der drei Zwischenräder k l m, vermittelst welcher die Räder n und p in Verbindung gesetzt sind. n ist mit a, p ist mit b verbunden.

Wird die Axe a vermittelst einer der Kurbeln h gedreht, so entsteht zunächst durch die Kurbeln h und Schubstangen i eine hin- und hergehende Bewegung der Axe c, aber gleichzeitig auch vermittelst der Räder n k l m p eine drehende Bewegung.

Dieses Rädergehänge wird bei den Banc à broches-Spinnmaschinen angewendet, um die Drehung der Spulen zu bewirken, während sie an den Spindeln auf und nieder gleiten.

Fig. 3 zeigt die Schienen mit den Rädern, wenn das Ganze geradlinig ausgestreckt wird.

TAB. IX.

Fig. 1 und 2. Drehung eines Körpers um zwei Axen. a ist eine aus zwei Hälften zusammengesetzte mit einer Axe b verbundene Hohlkugel. Diese Axe b ist in einem Ring c gelagert, der mit horizontalen in dem Gestell d gelagerten Zapfen e e versehen ist. Mit der Axe b ist ein konisches Rädchen f und mit dem Gestell d ein Stirnrad g fest verbunden und zwar concentrisch mit der Axe e e. Auf den Ring c ist ein Axenlager h geschraubt, das eine mit zwei Stirnrädern i und k versehene Axe l hält, jedoch so, dass sie sich im Lager h drehen kann. Die Zähne von i greifen in g, jene von k in f ein. Wird die Kurbel m einmal herumgedreht, so macht die Kugel zweierlei Drehungen, nämlich eine Umdrehung um die Axe e e und gleichzeitig $\frac{g}{i}\,\frac{k}{f}-1$ Umdrehungen um die Axe b.

Die Kugel a dreht sich durch dieses Rädersystem mit veränderlicher Geschwindigkeit um eine Momentanaxe, die fortwährend ihre Lage gegen die Kugel verändert.

Fig. 3 und 4. Ellyptische Räder. a und b sind zwei congruente ellyptische Räder, deren Drehungsaxen c und d durch die Brennpunkte der Ellypsen gehen. Um ihre Bewegung zu erleichtern, ist noch eine Stirnräder-Uebersetzung e f angebracht, und das Ganze wird vermittelst der an der Axe g befindlichen Kurbel h in Bewegung gesetzt. Die Axe d ist auch noch mit einer Kurbel i versehen, von welcher aus die drehende Bewegung von d in eine hin- und hergehende Bewegung verwandelt werden kann. Die Wirkung dieses Räderwerkes besteht darin, dass durch eine gleichförmige Bewegung der Axe g eine periodisch veränderliche Drehung in der Axe d hervorgebracht wird.

Nennt man m das grösste Uebersetzungsverhältniss, d. h. das Verhältniss der Geschwindigkeiten der Axen d und c, wenn der grösste Radiusvektor von a auf den kleinsten Radiusvektor von b einwirkt, A die halbe grosse, B die halbe kleine Axe einer solchen Ellypse, so ist:

$$\frac{B}{A} = \sqrt{1-\left(\frac{m-1}{m+1}\right)^2}$$

Vermittelst dieses Ausdruckes kann man das Axenverhältniss der Ellypsen so bestimmen, dass es einem gegebenen Maximum der Geschwindigkeitsverhältnisse der Axen d und c entspricht.

Für die Ausführung ist zu bemerken, dass die Zahnabrundungen, wenn man sie nach Kreisbögen machen will, alle mit $^1/_1$ einer Zahntheilung gemacht werden dürfen, indem die Krümmungshalbmesser der Räder an den Eingriffspunkten in jeder Lage derselben übereinstimmen.

Theorie der unrunden Räder. Zuweilen wird durch den Zweck, welchem eine Maschine zu dienen hat, die Forderung gestellt, zwei Axen a und b in eine solche Verbindung zu bringen, dass sich b nach einem gewissen vorgeschriebenen Gesetz bewegt, wenn die Axe a gleichförmig gedreht wird. Diese Aufgabe kann durch verschiedene Mechanismen und kann insbesondere durch unrunde Zahnräder gelöst werden. Die Formen solcher Räder können auf folgende Weise durch Rechnung ganz scharf bestimmt werden.

Es seien a und b Tab. X. Fig. 1 die durch unrunde Räder c und d zu verbindenden Axen. Wenn die krummen Theillinien der Räder richtig sind, müssen dieselben die Eigenschaften haben, dass wenn man von e aus auf den Theilungslinien gleich lange Bogenlängen $e\,f = e\,g$ abschneidet, so muss

1. die Summe $\overline{a\,f} + \overline{b\,g}$ der Radienvektoren a f und b g gleich sein der Distanz $\overline{a\,b}$ der Axen und muss

2. das Verhältniss $\dfrac{\widehat{f\,a\,e}}{\widehat{g\,b\,e}}$ der Winkel, um welchen sich die Räder drehen, wenn das eine Rad c um einen Winkel $\widehat{f\,a\,e}$ gewendet wird, dem vorgeschriebenen Bewegungsgesetz entsprechen. Diess ist der Fall, wenn man folgenden Bedingungen genügt:

$$\rho\, d\,\varphi = \rho_1\, d\,\varphi_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\rho + \rho_1 = D \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

In diesen Ausdrücken bedeutet:

$D = \overline{a\,b}$ die Axendistanz;

$\varphi = \widehat{f\,a\,e}$ den Winkel, um welchen die eine Axe gedreht wird;

$\varphi_1 = \widehat{g\,b\,e}$ den Winkel, um welchen sich gleichzeitig die zweite Axe drehen soll;

$d\,\varphi\; d\,\varphi_1$ die Differenzialien dieser Winkel bei einer unendlich kleinen Drehung der Axen;

$\left.\begin{array}{l}\rho = \overline{a\,f}\\ \rho_1 = \overline{g\,b}\end{array}\right\}$ zwei correspondirende Radienvektoren.

Wenn das Gesetz gegeben ist, nach welchem die Drehung von d bei einer gleichförmigen Drehung von c erfolgen soll, muss φ_1 als Funktion von φ bekannt sein, kennt man also:

$$\varphi_1 = \text{Funktion}\,(\varphi) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Aus den Ausdrücken (1) (2) und (3) kann man jederzeit die Rollungslinien der Räder bestimmen.

Es folgt zunächst aus (1) und (2):

$$\left.\begin{array}{l}\rho = \dfrac{D}{1+\dfrac{d\,\varphi}{d\,\varphi_1}}\\[2ex] \rho_1 = \dfrac{D}{1+\dfrac{d\,\varphi_1}{d\,\varphi}}\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Durch Differenziation der Gleichung (3) kann man jederzeit den Quotienten $\frac{d\,\varphi}{d\,\varphi_1}$ als Funktion von φ und den Quotienten $\frac{d\,\varphi_1}{d\,\varphi}$ als Funktion von φ_1 ausdrücken und wenn man diese Werthe der

Differenzial-Quotienten in (4) einführt, ergeben sich zwei Ausdrücke, von denen der erstere ρ als Funktion von φ und der letztere ρ_1 als Funktion von φ_1 darstellt, und diese Ausdrücke sind nichts anderes, als die in Polarcoordinaten ausgedrückten Gleichungen der beiden Kurven, nach welchen die Räder gerundet werden müssen.

Man kann aber auch, um diese Kurven zu bestimmen, auf folgende Art verfahren. Aus der Gleichung (3) ergibt sich unmittelbar durch Differenziation $\frac{d\,\varphi_1}{d\,\varphi}$ als Funktion von φ. Führt man diesen Werth von $\frac{d\,\varphi_1}{d\,\varphi}$ in die zweite der Gleichungen (4) ein, so erhält man ρ_1 ausgedrückt durch φ und nicht durch φ_1.

Bezeichnen wir diesen Ausdruck der Kürze wegen mit:

$$\rho_1 = \Psi(\varphi) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Nimmt man nun eine Reihenfolge von Werthen von φ an, so gibt die Gleichung (3) die correspondirenden Werthe von φ_1, dann gibt die Gleichung (5) die entsprechenden Werthe von ρ_1 und schliesslich ergeben sich die Werthe von ρ durch die Beziehung

$$\rho = (D - \rho_1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Anwendung dieser Theorie. Legen wir uns die Aufgabe vor, zwei unrunde Räder zu construiren, welche folgende Eigenschaften haben:

1. Das Rad, welchem die Elemente φ und ρ entsprechen, soll m Polygonseiten haben.
2. Das Rad, welchem die Elemente φ_1 und ρ_1 entsprechen, soll m_1 Polygonseiten haben.

Es sei $m_1 > m$ so, dass der Quotient $\frac{m_1}{m} = i$ die Uebersetzungszahl ausdrückt.

3. Das Bewegungsgesetz für die beiden Räder sei:

$$\varphi_1 = \mathfrak{A}\,\varphi + \mathfrak{B}\sin.\,k\,\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

wobei $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{B}$ k drei vorläufig noch unbestimmte constante Grössen sind.

Aus (7) folgt durch Differenziation:

$$\frac{d\,\varphi_1}{d\,\varphi} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\,k\cos.\,k\,\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Führt man diesen Werth in die zweite der Gleichungen (4) ein, so erhält man:

$$\rho_1 = \frac{D}{1 + \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\,k\cos.\,k\,\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Vermöge der oben ausgesprochenen Bedingungen muss für $\varphi = \frac{2\pi}{m}$ $\varphi_1 = \frac{2\pi}{m_1}$ und muss ferner der Werth von ρ_1 für $\varphi_1 = \frac{2\pi}{m_1}$ oder für $\varphi = \frac{2\pi}{m}$ gleich werden dem Werth von ρ_1 für $\varphi_1 = 0$. Diess ist vermöge (7) und (9) der Fall, wenn:

$$\frac{2\pi}{m_1} = \mathfrak{A}\frac{2\pi}{m} + \mathfrak{B}\sin.\,k\,\frac{2\pi}{m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

und

$$\frac{D}{1 + \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\,k} = \frac{D}{1 + \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\,k\cos.\,k\,\frac{2\pi}{m}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Diesen Bedingungen wird Genüge geleistet, wenn man nimmt:

$$\left.\begin{aligned} k &= m \\ \mathfrak{A} &= \frac{m}{m_1} = \frac{1}{i} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Hiermit sind zwei von den drei Constanten bestimmt. Die dritte Constante $\mathfrak{B}$ kann man so bestimmen, dass das Verhältniss zwischen der grössten und kleinsten Geschwindigkeit des mit ungleichförmiger Geschwindigkeit laufenden Rades einen gewissen Werth γ hat.

Für die grösste Geschwindigkeit ist vermöge (8) $\cos.\,k\,\varphi = +1$, für die kleinste $\cos\,k\,\varphi = -1$, man hat daher vermöge (8):

$$\gamma = \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\,k}{\mathfrak{A} - \mathfrak{B}\,k}$$

oder wenn man für $\mathfrak{A}$ und k die Werthe (12) einführt:

$$\gamma = \frac{\frac{1}{i} + m\,\mathfrak{B}}{\frac{1}{i} - m\,\mathfrak{B}}$$

Hieraus folgt:

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{m\,i}\,\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}$$

oder weil $m\,i = m_1$ ist:

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{m_1}\,\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Führt man die Werthe (12) und (13) in (7) und (9) ein, so erhält man folgende Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{i}\left(\varphi + \frac{1}{m}\,\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\sin.\,m\,\varphi\right) \\ \rho_1 &= \frac{i\,D}{1 + i + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\cos.\,m\,\varphi} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Wenden wir uns nun zur Beschreibung der Räder, welche auf den Tab. X. und XI. dargestellt sind.

TAB. X.

Fig. 1 und 2. Unrunde Räder für periodische Bewegungen. Die durch diese Figuren dargestellten Räder sind spezielle Fälle von den Gleichungen (14). Es ist nämlich für diese Räder $m = m_1 = 1$, $i = 1$ $\gamma = 4$ angenommen worden, daher erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi + \frac{3}{5} \sin. \varphi \\ \varrho_1 &= \frac{5\,\mathrm{D}}{10 + 3 \cos. \varphi} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (15)$$

Setzt man in diese Formeln für φ eine Reihenfolge von Werthen und berechnet sodann die entsprechenden Werthe von φ_1 und ϱ_1, so findet man schliesslich auch die Werthe von ϱ vermittelst der Beziehung

$$\varrho = \mathrm{D} - \varrho_1$$

Verzeichnet man vermittelst der so erhaltenen Rechnungsresultate die Räder oder vielmehr nur die Rollungslinien derselben, so erscheinen die Räder nicht in der Stellung, in welcher sie in Fig. 1 dargestellt sind, sondern in der um 180° verwendeten Stellung.

Von der Richtigkeit der Rechnung und Construktion überzeugt man sich am besten, wenn man die Peripherielängen der beiden Linien vermittelst eines Zirkels misst; man wird finden, dass sie genau einerlei Länge haben.

Fig. 3. Unrunde Räder für abwechselnd beschleunigte und verzögerte Bewegungen. Das Bewegungsgesetz, welches der Construktion dieser Räder zu Grunde gelegt wurde, ist:

$$\varphi_1 = \mathrm{a}\,\varphi + \mathrm{b}\,\varphi^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (16)$$

wobei a und b constante Grössen bedeuten.

Aus dieser Gleichung folgt zunächst:

$$\frac{d\,\varphi_1}{d\,\varphi} = \mathrm{a} + 2\,\mathrm{b}\,\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (17)$$

Setzt man diesen Werth in die zweite der Gleichungen (4), so findet man:

$$\varrho_1 = \frac{\mathrm{D}}{1 + \mathrm{a} + 2\,\mathrm{b}\,\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (18)$$

Um die Constanten a und b angemessen zu bestimmen, habe ich angenommen:

1. Dass die Beschleunigungen und Verzögerungen abwechselnd durch Halbkreise erfolgen sollen.
2. Dass das Verhältniss zwischen der grössten und kleinsten Geschwindigkeit des zweiten Rades gleich γ sein soll.

Unter diesen Voraussetzungen muss sein:

$$\pi = \mathrm{a}\,\pi + \mathrm{b}\,\pi^2$$

und

$$\gamma = \frac{\mathrm{a} + 2\,\mathrm{b}\,\pi}{\mathrm{a}}$$

Hieraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{a} &= \frac{2}{\gamma + 1} \\ \mathrm{b} &= \frac{1}{\pi}\,\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (19)$$

und die in Fig. 3 dargestellten Räder sind für die Annahme $\gamma = 4$ berechnet.

TAB. XI.

Fig. 3. Viereckig unrunde Räder. Durch diese Räder wird bei einer gleichförmigen Bewegung des Rades c das andere Rad d während einer Umdrehung 4 mal verzögert und 4 mal beschleuniget.

Diese Räder folgen aus den früher aufgestellten Gleichungen (14), wenn man in denselben setzt:

$$\mathrm{m} = \mathrm{m}_1 = 4\,, \quad \mathrm{i} = 1\,, \quad \gamma = 2.$$

Für diese Annahme wird:

$$\varphi_1 = \varphi + \frac{1}{8} \sin. 4\,\varphi$$

$$\varrho_1 = \frac{3\,\mathrm{D}}{6 + \cos. 4\,\varphi}$$

Man ersieht aus diesen Beispielen, dass die Verzeichnung von derlei unrunden Rädern für beliebige Drehungsgesetze keiner Schwierigkeit unterliegt. Anders verhält es sich mit der wirklichen Ausführung solcher Räder wegen der Zahnformen, denn diese sind sehr schwierig so herzustellen, dass die Bewegung sanft und stetig erfolgt. Indessen derlei Räder werden ja doch nur ganz ausnahmsweise angewendet, und dann kann man sich die mühevolle Arbeit ihrer Herstellung wohl gefallen lassen.

Fig. 1 und 2. Das Einzahnrad. c ist eine mit einer Axe a verbundene runde Metallscheibe, an welcher ein einzelner Zahn d angebracht ist. g ist ein Sternrad mit 6 Zahnlücken e und mit 6 bogenförmigen Theilen f. Die Halbmesser dieser Bögen f stimmen mit dem Halbmesser der Scheibe c überein, und die Summe aus dem Halbmesser von c und dem Abstand des Mittelpunktes eines Bogens f von der Axe b ist gleich der Entfernung der Axen a und b. Wird das Rad c vermittelst der Kurbel h gedreht, so schreitet das Rad g bei jeder ganzen Umdrehung von c um eine Sternseite weiter, allein diese Bewegung erfolgt nicht mit Stetigkeit, sondern mit Unterbrechungen. Das Rad g bewegt sich nämlich nur dann, wenn der Zahn d in eine Lücke zu stehen kommt, und bleibt ruhig stehen, wenn eine von den Bögen f mit der Rundung von c in Berührung tritt.

Dieser Mechanismus kann also gebraucht werden, wenn eine ruckweise drehende Bewegung einer Axe verlangt wird.

In Fig. 1 ist durch punktirte Linien der Anfang und das Ende eines Zahneingriffes angegeben.

TAB. XII.

Fig. 1, 2, 3. Zählwerk mit Einzahnrädern. Durch dieses Modell ist eine Anwendung des Einzahnrades auf ein Zählwerk gezeigt. $\mathrm{a}_1\ \mathrm{a}_2\ \mathrm{a}_3$ sind drei Einzahnräder. $\mathrm{b}_1\ \mathrm{b}_2\ \mathrm{b}_3$ drei Sternräder, jedes von 10 Seiten. Die vier Axen $\mathrm{c}_1\ \mathrm{c}_2\ \mathrm{c}_3\ \mathrm{c}_4$ sind mit 4 Zeigern $\mathrm{d}_1\ \mathrm{d}_2\ \mathrm{d}_3\ \mathrm{d}_4$ versehen, welche auf vier in zehn Theile getheilte Kreise weisen. Bei einer Umdrehung eines Einzahnrades macht das entsprechende Sternrad den zehnten Theil einer Umdrehung. Die Uebersetzung von a auf b ist gleich 10. Es werden demnach gezählt:

durch den Zeiger d, Einheiten,
durch den Zeiger d, Zehner,
durch den Zeiger d, Hunderte,
durch den Zeiger d, Tausende

von Umdrehungen der Axe b.

Um die Zählung schneller Bewegungen zu zeigen, wird unmittelbar das Rad a gedreht; um die Zählung langsamer Bewegungen zu zeigen, wird die Axe des Getriebes b in Bewegung gesetzt.

Rollen.

TAB. XIII.

Fig. 1 und 2. Rollenmodell. Durch dieses Modell wird die Wirkung der gewöhnlichen Rollentriebe erklärt.

a ist eine kleine Grundplatte, in welcher eine eiserne Stange b eingeschraubt ist. c eine mit einer Kurbel versehene Rolle. d eine Hülse, die durch eine Schraube an die Stange festgeklemmt werden kann, und mit einem Zapfen versehen ist, auf welchem sich die Rolle e dreht. e ist ein gabelförmiger Axenhalter; derselbe ist vermittelst einer Hülse um einen Zapfen drehbar, dessen geometrische Axe in die Vertikallinie x y fällt, die durch den Punkt f tangirend an den Rollenumfang von c gezogen werden kann. g ist die zweite Rolle, ihre Axe wird durch e gehalten, und ihr Umfang wird ebenfalls von der Vertikallinie x y berührt. Um beide Rollen ist ein Riemen geschlungen.

Dreht man den Axenhalter e um den Zapfen, so erhält die Axe von g gegen die Axe von c jede beliebige Lage, und man kann nun durch Drehung der Rolle c vermittelst der daran befindlichen Kurbel zeigen, dass die Bewegung von c auf g übertragen wird, vorausgesetzt, dass die Drehung in dem Sinne erfolgt, welcher durch die Pfeile angedeutet wird, kann aber ferner zeigen, dass der Riemen von den Rollen abfällt, wenn die Drehung nach einer der Pfeilrichtung entgegengesetzten Richtung vorgenommen wird. Die erstere dieser Drehungsrichtungen ist nämlich diejenige, bei welcher die Riemenmittel der auflaufenden Riementheile in die mittleren Ebenen der Rollen fallen, auf welche die Riemenstücke auflaufen, was eben die Grundbedingung ist, welche erfüllt werden muss, damit die Riemen nicht abfallen.

Fig. 3 und 4. Rolle mit Hook'schem Schlüssel. a und b sind zwei in einer Ebene liegende, gegen einander schwach geneigte Axen. c ist eine gewöhnliche mit der Axe a verbundene Rolle. d ist eine mit der Axe b nicht gewöhnlich, sondern vermittelst eines Hook'schen Schlüssels e verbundene Rolle. Die Rolle d kann also ihre Lage gegen b innerhalb gewisser Grenzen beliebig ändern. f ist der die beiden Rollen umschlingende Riemen. Wird die Axe a vermittelst der daran befindlichen Kurbel gedreht, so kommt durch die Rollen und durch den Riemen auch die Axe b in Bewegung. Allein die Stellung der Rolle d ist dabei beinahe eine labile, daher sind am Gestell des Modelles noch vier Stellschrauben g angebracht, welche, wenn die Rolle d ihre richtige Stellung hat, die Nabe der Rolle kaum berühren, jedoch verhindern, dass die Rolle d ihre richtige Lage nicht merklich ändern kann.

Diese Rollenanordnung kann auch in dem Falle gebraucht werden, wenn die Richtungen der Axen a und b sich nicht schneiden; nur darf der Richtungswinkel der Axen nie beträchtlich sein. Streng genommen ist die Bewegung der Axe b bei einer gleichförmigen Drehung von a nicht gleichförmig, die Ungleichförmigkeiten in der Bewegung von b sind jedoch, wenn der Richtungswinkel der Axen klein ist, von keiner Bedeutung.

TAB. XIV.

Fig. 1 bis 5. Rollenmodell. Verbindung zweier Axen, deren Richtungen sich nicht schneiden und gegen einander beliebig geneigt sind vermittelst eines Riemens und zweier Leitrollen.

a und b sind die beiden Hauptrollen. c und d die Leitrollen. e der alle 4 Rollen umschlingende Riemen. f ein dreieckiger Rahmen, dessen Ebene zu den Axenrichtungen der Rollen a b parallel ist. g_1 g_2 g_3 drei in dem Rahmen eingesetzte schmiedeiserne Stangen, an welche die Rollenträger mit Klemmschrauben befestiget werden können. Die Träger der Rollen a und b sind von gleicher Construktion. Fig. 3 zeigt die Rolle b mit ihrem Träger im Durchschnitt. Die Träger der Leitrollen sind ebenfalls von gleicher Construktion, und diese ist insbesondere durch die Figuren 4 und 5 deutlich gemacht. Jede Leitrollenaxe wird durch ein System von zwei Gabeln h und i gehalten, die um zwei ihrer Richtung nach gegen einander senkrechte Axen drehbar sind und durch Schrauben festgestellt werden können. Auch kann die Entfernung jeder Leitrolle von der Stange g_1 innerhalb gewisser Gränzen geändert werden. Durch diese Einrichtung können die Rollen c und d innerhalb gewisser Gränzen in jede beliebige Lage gegen die Rollen b und a gebracht werden. Damit nun sowohl eine Rechtsdrehung als auch eine Linksdrehung der Rolle a auf die Rolle b übertragen werden kann, ohne dass der Riemen von den Rollen abfällt, müssen dieselben so gestellt werden, dass die Mittellinie irgend eines der vier geradlinigen Riemenstücke in die mittleren Ebenen der Rollen fällt, welche dieses Riemenstück berührt.

Eine dieser Anforderung entsprechende Position einer Leitrolle, z. B. c, wird auf folgende Art gefunden. Man denke sich durch die Mittelpunkte der Rollen a und b Ebenen senkrecht auf die Axen dieser Rollen gelegt, und diese Ebenen verlängert, bis sie sich in einer vertikalen Linie L (die in der Zeichnung nicht dargestellt ist) schneiden; nehme hierauf in dieser Linie L einen willkürlichen Punkt A an und ziehe von demselben aus nach den mittleren Rollenkreisen von a und b Tangenten, T und T_1. Legt man nun die Rolle c so, dass ihre mittlere Ebene in die Ebene der Tangenten T und T_1 fällt und dass ihr mittlerer Schnitt von diesen Tangenten berührt wird, so ist die Rolle in eine richtige Lage gebracht. In der Zeichnung sind für die Rollen c und d solche Positionen gewählt, dass die Riemenlänge ein Minimum ist, wodurch die Darstellung derselben etwas erleichtert wurde. Von praktischem Werth kann diese Rollenanordnung nur sehr selten sein, denn sie ist zu complicirt. Das Modell soll aber auch nur dazu dienen, das unter allen Umständen anwendbare Prinzip dieser Rollenanordnung zur klaren Anschauung zu bringen.

TAB. XV.

Fig. 1 und 2. Expansionsrolle mit geschlitzter Drehscheibe. Expansionsrollen werden bekanntlich solche Rollen genannt, deren Umfang aus einzelnen Bogensegmenten besteht, die mehr oder weniger von der Axe der Rolle entfernt werden können, so dass die Grösse der Rolle innerhalb gewisser