

Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Das Dynamiden-System

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1857

B. Aetherschwingungen

[urn:nbn:de:bsz:31-266496](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:31-266496)

B. Aetherschwingungen.

AUFSTELLUNG DER BEWEGUNGSGLEICHUNGEN.

Wir betrachten nun abermals ein aus Dynamiden bestehendes System, dessen Atome oder Kerne Körperchen von bestimmter Gestalt sind, welches demnach im Gleichgewichtszustand nach Axenrichtungen symmetrisch gruppiert ist, daher um jeden Punkt herum nach verschiedenen Richtungen verschiedene Elastizitäten besitzt; nehmen aber nun an, dass nur allein in den Aetherhüllen Bewegungen angeregt werden, und erlauben uns, die ungemein schwache Bewegung, die in den Kernen eintreten könnte, ganz zu vernachlässigen. Unter dieser Voraussetzung wird der Bewegungszustand jeder Aetherhülle darin bestehen, dass sich dieselbe als Ganzes gegen den Kern bewegt, ohne denselben zu verlassen, und dass die Aetheratome der Aetherhülle gegen einander relative Bewegungen machen. Wir betrachten jedoch nicht die relative Bewegung der Aetheratome einer Hülle gegen einander, sondern nur die Bewegung der Aetherhülle als Ganzes, und zwar dadurch, dass wir die Bewegung des Massenmittelpunktes jeder Aetherhülle bestimmen. Dabei wird es uns allerdings auch nicht gelingen, mit absoluter Strenge zu verfahren, allein wir können doch klar aussprechen, was wir eigentlich machen und was wir vernachlässigen, und werden erkennen, dass dadurch kein erheblicher Fehler entstehen kann.

Es seien in Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem (Fig. 10), $x y z$ die Coordinaten des Schwerpunktes eines Körperatoms a , m seine Masse, $\xi v \zeta$ die relativen Coordinaten des Schwerpunktes α der zum Atom m gehörigen Hülle zur Zeit t ; $x + \Delta x$ $y + \Delta y$ $z + \Delta z$ die Coordinaten des Schwerpunktes eines andern Körperatoms a_1 , seine Masse m_1 , $\xi + \Delta \xi$ $v + \Delta v$ $\zeta + \Delta \zeta$ die relativen Coordinaten des Schwerpunktes α_1 der Hülle von m_1 gegen den Schwerpunkt des Kernes m_1 , $\mu \mu_1$ *) die Massen der beiden Aetherhüllen.

Da wir annehmen, dass sich die Körperatome nicht bewegen; so sind die Coordinaten $x y z$ $x + \Delta x$ $y + \Delta y$ $z + \Delta z$ unabhängig von der Zeit t .

Wir setzen ferner $\overline{a\alpha} = \rho$ die Entfernung des Schwerpunktes der Aetherhülle von dem Schwerpunkte des Atoms; $\overline{a_1\alpha_1} = r$ die mit der Zeit nicht veränderliche Entfernung

*) Im zweiten Abschnitt wurden durch μ und μ_1 die Massen der einzelnen Aetheratome bezeichnet.

der Schwerpunkte der Kerne; $\overline{a_1 \alpha} = r + \sigma$ die Entfernung des Schwerpunktes des zweiten Kernes a_1 vom Schwerpunkt der Hülle des ersten Kernes; $\overline{\alpha \alpha_1} = r + \sigma_1$ die Entfernung der Schwerpunkte der Hüllen; alles zur Zeit t gültig.

Wir denken uns die Aethermassen der Hüllen in ihren Mittelpunkten concentrirt und nehmen an, dass auf die in α concentrirte Aethermasse μ zur Zeit t folgende Kräfte einwirken :

1. die Anziehung des Körperatoms a gegen α ;
2. die Totalität der Anziehungen aller Körperatome gegen die in α concentrirt gedachte Aethermasse μ ;
3. die Totalität der Abstossungen aller in ihren Mittelpunkten concentrirt gedachten Aethermassen gegen die in α concentrirt gedachte Aethermasse μ .

Wir bezeichnen :

1. die Anziehung von a gegen α mit $m \mu H(\rho)$;
2. die Anziehung von a_1 gegen α mit $m_1 \mu G(r + \sigma)$;
3. die Abstossung von α_1 gegen α mit $\mu \mu_1 J(r + \sigma_1)$;

wobei $G()$ $J()$ Funktionen ausdrücken, die mit den Entfernungen der Punkte rasch abnehmen; $H()$ hingegen eine Funktion ist, die im Gegentheil mit dem Wachsen der Entfernung rasch zunimmt, denn die Kraft, mit welcher der Kern a auf seine Aetherhülle einwirkt, muss nothwendig für einen stabilen Gleichgewichtszustand mit der Entfernung $\overline{a \alpha}$ wachsen.

Dies vorausgesetzt gehen wir nun zur Rechnung über.

Die Cosinuse der Winkel, welche die Richtungen der Linien $\overline{a \alpha}$ $\overline{\alpha a_1}$ $\overline{\alpha \alpha_1}$ mit den positiven Richtungen der Coordinatenaxen bilden, sind :

	x	y	z
für $\overline{a \alpha}$. . .	$\frac{\xi}{\rho}$	$\frac{v}{\rho}$	$\frac{\zeta}{\rho}$
„ $\overline{\alpha a_1}$. . .	$\frac{\Delta x - \xi}{r + \sigma}$	$\frac{\Delta y - v}{r + \sigma}$	$\frac{\Delta z - \zeta}{r + \sigma}$
„ $\overline{\alpha \alpha_1}$. . .	$\frac{\Delta x + \Delta \xi}{r + \sigma_1}$	$\frac{\Delta y + \Delta v}{r + \sigma_1}$	$\frac{\Delta z + \Delta \zeta}{r + \sigma_1}$

Nennt man nun $X Y Z$ die Summe der Kräfte, welche auf die Masse μ nach den positiven Richtungen der Axen wirken, so erhalten wir :

$$\left. \begin{aligned} X &= -m \mu H(\rho) \frac{\xi}{\rho} + S m_1 \mu G(r + \sigma) \frac{\Delta x - \xi}{r + \sigma} - S \mu \mu_1 J(r + \sigma_1) \frac{\Delta x + \Delta \xi}{r + \sigma_1} \\ Y &= -m \mu H(\rho) \frac{v}{\rho} + S m_1 \mu G(r + \sigma) \frac{\Delta y - v}{r + \sigma} - S \mu \mu_1 J(r + \sigma_1) \frac{\Delta y + \Delta v}{r + \sigma_1} \\ Z &= -m \mu H(\rho) \frac{\zeta}{\rho} + S m_1 \mu G(r + \sigma) \frac{\Delta z - \zeta}{r + \sigma} - S \mu \mu_1 J(r + \sigma_1) \frac{\Delta z + \Delta \zeta}{r + \sigma_1} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Es ist zu bemerken, dass die Funktionen $H(\rho)$ $G(r + \sigma)$ $J(r + \sigma_1)$ essentiell positiv sind.

Diese Gleichungen können weiter umgebildet werden. Es ist zunächst :

$$(r + \sigma)^2 = [x + \Delta x - (x + \xi)]^2 + [y + \Delta y - (y + \nu)]^2 + [z + \Delta z - (z + \zeta)]^2$$

oder :

$$(r + \sigma)^2 = (\Delta x - \xi)^2 + (\Delta y - \nu)^2 + (\Delta z - \zeta)^2$$

Vernachlässigt man die Glieder, welche zweite Potenzen von ξ ν ζ enthalten, betrachtet man also nur allein unendlich kleine Schwingungen, und berücksichtigt, dass $r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$ ist, so folgt aus dieser letzten Gleichung :

$$\sigma = -\frac{1}{r} (\xi \Delta x + \nu \Delta y + \zeta \Delta z) \dots \dots \dots (2)$$

Nun ist ferner :

$$(r + \sigma_1)^2 = [x + \Delta x + \xi + \Delta \xi - (x + \xi)]^2 + [y + \Delta y + \nu + \Delta \nu - (y + \nu)]^2 + [z + \Delta z + \zeta + \Delta \zeta - (z + \zeta)]^2$$

oder :

$$(r + \sigma_1)^2 = (\Delta x + \Delta \xi)^2 + (\Delta y + \Delta \nu)^2 + (\Delta z + \Delta \zeta)^2$$

Entwickelt man und vernachlässigt dabei die Glieder, welche zweite Potenzen von $\Delta \xi$ $\Delta \nu$ $\Delta \zeta$ enthalten, berücksichtigt ferner auch hier, dass $r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$ ist, so findet man :

$$\sigma_1 = +\frac{1}{r} (\Delta x \Delta \xi + \Delta y \Delta \nu + \Delta z \Delta \zeta) \dots \dots \dots (3)$$

Nach dem Taylor'schen Satz findet man annähernd :

$$\left. \begin{aligned} \frac{G(r + \sigma)}{r + \sigma} &= \frac{G(r)}{r} + \frac{d\left(\frac{1}{r} G(r)\right)}{dr} \sigma \\ \frac{J(r + \sigma_1)}{r + \sigma_1} &= \frac{J(r)}{r} + \frac{d\left(\frac{1}{r} J(r)\right)}{dr} \sigma_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

vorausgesetzt, dass man bei dieser Entwicklung sämtliche Glieder vernachlässigt, welche zweite und höhere Potenzen von σ und σ_1 enthalten.

Mit Berücksichtigung der Resultate 2, 3, 4 findet man nun :

$$S m, \mu G(r + \sigma) \frac{\Delta x - \xi}{r + \sigma} = \mu S m, \left[\frac{G(r)}{r} - \frac{d\left(\frac{1}{r} G(r)\right)}{dr} \frac{1}{r} (\xi \Delta x + \nu \Delta y + \zeta \Delta z) \right] (\Delta x - \xi)$$

oder :

$$\left. \begin{aligned}
 S m, \mu G(r+\sigma) \frac{\Delta x - \xi}{r+\sigma} &= \mu S m, G(r) \frac{\Delta x}{r} - \mu \xi S m, \frac{G(r)}{r} - \mu \xi S m, \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} G(r) \right) \Delta x^2 \\
 &- \mu \nu S m, \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} G(r) \right) \Delta x \Delta y \\
 &- \mu \zeta S m, \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} G(r) \right) \Delta x \Delta z
 \end{aligned} \right\} (5)$$

wobei abermals die Glieder, welche $\xi^2 \nu^2 \zeta^2$ enthalten, vernachlässigt sind.

Auf ähnliche Weise findet man :

$$\left. \begin{aligned}
 S \mu \mu, \frac{J(r+\sigma_1)}{r+\sigma_1} (\Delta x + \Delta \xi) &= \mu S \mu, \frac{J(r)}{r} \Delta x + \mu \Delta \xi S \mu, \left[\frac{J(r)}{r} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} J(r) \right) \Delta x^2 \right] \\
 &+ \mu \Delta \nu S \mu, \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} J(r) \right) \Delta x \Delta y \right] \\
 &+ \mu \Delta \zeta S \mu, \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} J(r) \right) \Delta x \Delta z \right]
 \end{aligned} \right\} (6)$$

Für den Gleichgewichtszustand ist $\varrho = \varrho_0 = 0$ und wollen wir ferner annehmen, dass $H(0) = 0$ sei. Berücksichtigt man diese Bedingungen und die Resultate (5) und (6), so findet man vermittelst der ersten der Gleichungen (1) :

$$\left. \begin{aligned}
 X &= -m \mu H(\varrho) \frac{\xi}{\varrho} - \mu \xi \left[S m, \frac{G(r)}{r} + S m, \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} G(r) \right) \Delta x^2 \right] \\
 &- \mu \nu \left[S m, \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} G(r) \right) \Delta x \Delta y \right] \\
 &- \mu \zeta \left[S m, \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} G(r) \right) \Delta x \Delta z \right] \\
 &- \mu \Delta \xi \left[S \mu, \left(\frac{J(r)}{r} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} J(r) \right) \Delta x^2 \right) \right] \\
 &- \mu \Delta \nu \left[S \mu, \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} J(r) \right) \Delta x \Delta y \right] \\
 &- \mu \Delta \zeta \left[S \mu, \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} J(r) \right) \Delta x \Delta z \right]
 \end{aligned} \right\} (7)$$

Vertauscht man in diesem Ausdruck x und Δx mit y , und Δy mit z und Δz , so ergeben sich die Werthe von Y und Z . Man findet:

$$\begin{aligned}
 Y = & -m\mu H(\varrho) \frac{v}{\varrho} - \mu \xi \left[S m_1 \frac{1}{r} \frac{d\left(\frac{1}{r} G(r)\right)}{dr} \Delta x \Delta y \right] \\
 & - \mu v \left[S m_1 \frac{G(r)}{r} + S m_1 \frac{1}{r} \frac{d\left(\frac{1}{r} G(r)\right)}{dr} \Delta y^2 \right] \\
 & - \mu \zeta \left[S m_1 \frac{1}{r} \frac{d\left(\frac{1}{r} G(r)\right)}{dr} \Delta y \Delta z \right] \\
 & - \mu \Delta \xi \left[S \mu_1 \frac{1}{r} \frac{d\left(\frac{1}{r} J(r)\right)}{dr} \Delta x \Delta y \right] \\
 & - \mu \Delta v \left[S \mu_1 \left(\frac{J(r)}{r} + \frac{1}{r} \frac{d\left(\frac{1}{r} J(r)\right)}{dr} \Delta y^2 \right) \right] \\
 & - \mu \Delta \zeta \left[S \mu_1 \frac{1}{r} \frac{d\left(\frac{1}{r} J(r)\right)}{dr} \Delta y \Delta z \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Z = & -m\mu H(\varrho) \frac{\zeta}{\varrho} - \mu \xi \left[S m_1 \frac{1}{r} \frac{d\left(\frac{1}{r} G(r)\right)}{dr} \Delta x \Delta z \right] \\
 & - \mu v \left[S m_1 \frac{1}{r} \frac{d\left(\frac{1}{r} G(r)\right)}{dr} \Delta y \Delta z \right] \\
 & - \mu \zeta \left[S m_1 \frac{G(r)}{r} + S m_1 \frac{1}{r} \frac{d\left(\frac{1}{r} G(r)\right)}{dr} \Delta z^2 \right] \\
 & - \mu \Delta \xi \left[S \mu_1 \frac{1}{r} \frac{d\left(\frac{1}{r} J(r)\right)}{dr} \Delta x \Delta z \right] \\
 & - \mu \Delta v \left[S \mu_1 \frac{1}{r} \frac{d\left(\frac{1}{r} J(r)\right)}{dr} \Delta z \Delta y \right] \\
 & - \mu \Delta \zeta \left[S \mu_1 \left(\frac{J(r)}{r} + \frac{1}{r} \frac{d\left(\frac{1}{r} J(r)\right)}{dr} \Delta z^2 \right) \right]
 \end{aligned}$$

Setzen wir zur Abkürzung:

15.

$$\begin{aligned}
 S m_1 \left[\frac{G(r)}{r} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} G(r) \right) \Delta x^2 \right] &= \mathfrak{A} \\
 S m_1 \left[\frac{G(r)}{r} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} G(r) \right) \Delta y^2 \right] &= \mathfrak{B} \\
 S m_1 \left[\frac{G(r)}{r} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} G(r) \right) \Delta z^2 \right] &= \mathfrak{C} \\
 S m_1 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} G(r) \right) \Delta x \Delta y &= \mathfrak{D} \\
 S m_1 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} G(r) \right) \Delta x \Delta z &= \mathfrak{E} \\
 S m_1 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} G(r) \right) \Delta y \Delta z &= \mathfrak{F}
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\mu_1}{r} \left[J(r) + \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} J(r) \right) \Delta x^2 \right] &= \mathfrak{A}_1 \\
 \frac{\mu_1}{r} \left[J(r) + \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} J(r) \right) \Delta y^2 \right] &= \mathfrak{B}_1 \\
 \frac{\mu_1}{r} \left[J(r) + \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} J(r) \right) \Delta z^2 \right] &= \mathfrak{C}_1 \\
 \frac{\mu_1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} J(r) \right) \Delta x \Delta y &= \mathfrak{D}_1 \\
 \frac{\mu_1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} J(r) \right) \Delta x \Delta z &= \mathfrak{E}_1 \\
 \frac{\mu_1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} J(r) \right) \Delta y \Delta z &= \mathfrak{F}_1
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

und berücksichtigen, dass für den bewegten Zustand

$$X = 2\mu \frac{d^2 \xi}{dt^2}$$

$$Y = 2\mu \frac{d^2 \nu}{dt^2}$$

$$Z = 2\mu \frac{d^2 \zeta}{dt^2}$$

ist, so finden wir zur Bestimmung der Bewegung des Schwerpunktes der dem Punkte $x y z$ entsprechenden Aethersphäre folgende Differenzialgleichungen :

$$\left. \begin{aligned} 2 \frac{d^2 \xi}{dt^2} + m \frac{H(\rho)}{\rho} \xi + (\mathfrak{A} \xi + \mathfrak{F} v + \mathfrak{G} \zeta) + S (\mathfrak{A}_1 J \xi + \mathfrak{F}_1 J v + \mathfrak{G}_1 J \zeta) &= 0 \\ 2 \frac{d^2 v}{dt^2} + m \frac{H(\rho)}{\rho} v - (\mathfrak{B} \xi + \mathfrak{B} v + \mathfrak{D} \zeta) + S (\mathfrak{B}_1 J \xi + \mathfrak{B}_1 J v + \mathfrak{D}_1 J \zeta) &= 0 \\ 2 \frac{d^2 \zeta}{dt^2} + m \frac{H(\rho)}{\rho} \zeta + (\mathfrak{C} \xi + \mathfrak{D} v + \mathfrak{G} \zeta) + S (\mathfrak{C}_1 J \xi + \mathfrak{D}_1 J v + \mathfrak{G}_1 J \zeta) &= 0 \end{aligned} \right\} (10)$$

In diesen Gleichungen (10) drücken die mit $\xi v \zeta$ multiplizirten Glieder die Wechselwirkung des Körpermediums auf das Aethermedium, die mit $J \xi J v J \zeta$ multiplizirten Glieder dagegen die Wirkung des Aethers auf sich selbst aus; denn $H(\rho)$, so wie auch die Grössen $\mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathfrak{C} \mathfrak{D} \mathfrak{G} \mathfrak{F}$ hängen vom Körpermedium, die Grössen $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{C}_1 \mathfrak{D}_1 \mathfrak{G}_1 \mathfrak{F}_1$ dagegen vom Aethermedium ab. Vernachlässigt man den Einfluss des Körpermediums auf das Aethermedium, lässt also die mit $\xi v \zeta$ multiplizirten Glieder verschwinden, so reduzieren sich die Gleichungen (10) auf folgende :

$$\left. \begin{aligned} 2 \frac{d^2 \xi}{dt^2} + S (\mathfrak{A}_1 J \xi + \mathfrak{F}_1 J v + \mathfrak{G}_1 J \zeta) &= 0 \\ 2 \frac{d^2 v}{dt^2} + S (\mathfrak{B}_1 J \xi + \mathfrak{B}_1 J v + \mathfrak{D}_1 J \zeta) &= 0 \\ 2 \frac{d^2 \zeta}{dt^2} + S (\mathfrak{C}_1 J \xi + \mathfrak{D}_1 J v + \mathfrak{G}_1 J \zeta) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11)$$

und diese Gleichungen stimmen in der That mit denjenigen überein, welche *Cauchy* für ein einfaches Medium zuerst aufgestellt hat.

Lässt man aber in den Gleichungen (10) die mit $\xi v \zeta$ multiplizirten Glieder wegzusetzt also :

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{C} = \mathfrak{D} = \mathfrak{G} = \mathfrak{F} = 0 \quad \text{und} \quad H(\rho) = 0$$

so stimmt diese Gleichung der Form nach vollkommen mit den Gleichungen (9), Seite 99, überein, welche wir für die Schwingungen der Körperatome aufgestellt haben.

Wir werden daher die Bewegungsgesetze der Körperschwingungen erhalten, wenn wir in den Integralen der Gleichungen (10) der Aetherschwingungen

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{C} = \mathfrak{D} = \mathfrak{G} = \mathfrak{F} = 0 \quad \text{und} \quad H(\rho) = 0$$

ferner statt $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{G}, \mathfrak{F}$, beziehungsweise $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{C}_1, \mathfrak{D}_1, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{F}_1$ setzen, oder wenn wir (wie eine Vergleichung der Ausdrücke (7) und (8), Seite 99, mit den Ausdrücken (9), Seite 116 zeigt) das Zeichen J mit F vertauschen.

INTEGRATION DER GLEICHUNGEN (10).

Um die Gleichungen (10) zu integrieren, ist es unerlässlich, über die Form der Funktion $H(\rho)$, d. h. über das Gesetz der Anziehung eines Körperatoms auf seine eigene Aethersphäre eine naturgemässe Hypothese zu machen.

Die einfachste und naturgemäss scheinende Annahme ist, dass wir setzen :

$$H(\rho) = k \rho \dots \dots \dots (12)$$

wobei k eine Constante bezeichnet. Unter dieser Voraussetzung wird $m \frac{H(\rho)}{\rho} = km$ oder wenn man

$$km = \epsilon \dots \dots \dots (13)$$

setzt, so werden die Gleichungen (10) :

$$\left. \begin{aligned} 2 \frac{d^2 \xi}{dt^2} + (\mathfrak{A} + \epsilon) \xi + \mathfrak{B} v + \mathfrak{C} \zeta + \mathfrak{S} (\mathfrak{A}_1 \mathcal{A} \xi + \mathfrak{B}_1 \mathcal{A} v + \mathfrak{C}_1 \mathcal{A} \zeta) &= 0 \\ 2 \frac{d^2 v}{dt^2} + \mathfrak{B} \xi + (\mathfrak{B} + \epsilon) v + \mathfrak{D} \zeta + \mathfrak{S} (\mathfrak{B}_1 \mathcal{A} \xi + \mathfrak{B}_1 \mathcal{A} v + \mathfrak{D}_1 \mathcal{A} \zeta) &= 0 \\ 2 \frac{d^2 \zeta}{dt^2} + \mathfrak{C} \xi + \mathfrak{D} v + (\mathfrak{C} + \epsilon) \zeta + \mathfrak{S} (\mathfrak{C}_1 \mathcal{A} \xi + \mathfrak{D}_1 \mathcal{A} v + \mathfrak{C}_1 \mathcal{A} \zeta) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (14)$$

Vermöge der Fourier'schen Formel kann man setzen :

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \varphi(x y z t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \iiint \cos. u \varphi(\lambda \mu \nu t) d\alpha d\beta d\gamma d\lambda d\mu d\nu \\ v &= \psi(x y z t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \iiint \cos. u \psi(\lambda \mu \nu t) d\alpha d\beta d\gamma d\lambda d\mu d\nu \\ \zeta &= \omega(x y z t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \iiint \cos. u \omega(\lambda \mu \nu t) d\alpha d\beta d\gamma d\lambda d\mu d\nu \end{aligned} \right\} \dots (15)$$

wobei

$$u = \alpha(x - \lambda) + \beta(y - \nu) + \gamma(z - \zeta) \dots \dots \dots (16)$$

und $\varphi \psi \omega$ Funktionszeichen sind. Die Integrale sind sämmtlich von $-\infty$ bis $+\infty$ zu nehmen.

Aus den Gleichungen (15) folgt zunächst :

$$\left. \begin{aligned} \Delta \xi &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \iiint \cos. u \varphi(\lambda \mu \nu t) d\alpha d\beta d\gamma d\lambda d\mu d\nu \\ \Delta v &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \iiint \cos. u \psi(\lambda \mu \nu t) d\alpha d\beta d\gamma d\lambda d\mu d\nu \\ \Delta \zeta &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \iiint \cos. u \omega(\lambda \mu \nu t) d\alpha d\beta d\gamma d\lambda d\mu d\nu \end{aligned} \right\} \dots (17)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \xi}{dt^2} &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \iiint \cos. u \frac{d^2 \varphi(\lambda \mu \nu t)}{dt^2} d\alpha d\beta d\gamma d\lambda d\mu d\nu \\ \frac{d^2 v}{dt^2} &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \iiint \cos. u \frac{d^2 \psi(\lambda \mu \nu t)}{dt^2} d\alpha d\beta d\gamma d\lambda d\mu d\nu \\ \frac{d^2 \zeta}{dt^2} &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \iiint \cos. u \frac{d^2 \omega(\lambda \mu \nu t)}{dt^2} d\alpha d\beta d\gamma d\lambda d\mu d\nu \end{aligned} \right\} \dots (18)$$

Führt man die Werthe von $\xi v \zeta \Delta \xi \Delta v \Delta \zeta \frac{d^2 \xi}{dt^2} \frac{d^2 v}{dt^2} \frac{d^2 \zeta}{dt^2}$, welche die Ausdrücke (15), (17) und (18) darbieten, in (14) ein, so findet man, wenn zur Abkürzung

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\lambda \mu \nu t) &= \varphi \\ \psi(\lambda \mu \nu t) &= \psi \\ \omega(\lambda \mu \nu t) &= \omega \end{aligned} \right\} \dots (19)$$

gesetzt wird:

$$\left. \begin{aligned} o &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \iiint \left\{ \begin{aligned} &2 \cos. u \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \varphi S \mathfrak{A}_1 \cos. u + \psi S \mathfrak{B}_1 \cos. u + \omega S \mathfrak{C}_1 \cos. u \\ &+ \varphi (\mathfrak{A} + \varepsilon) \cos. u + \psi \mathfrak{B} \cos. u + \omega \mathfrak{C} \cos. u \end{aligned} \right\} d\alpha \dots d\gamma \\ o &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \iiint \left\{ \begin{aligned} &2 \cos. u \frac{d^2 \psi}{dt^2} + \varphi S \mathfrak{B}_1 \cos. u + \psi S \mathfrak{B}_1 \cos. u + \omega S \mathfrak{D}_1 \cos. u \\ &+ \varphi \mathfrak{B} \cos. u + \psi (\mathfrak{B} + \varepsilon) \cos. u + \omega \mathfrak{D} \cos. u \end{aligned} \right\} d\alpha \dots d\gamma \\ o &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \iiint \left\{ \begin{aligned} &2 \cos. u \frac{d^2 \omega}{dt^2} + \varphi S \mathfrak{C}_1 \cos. u + \psi S \mathfrak{D}_1 \cos. u + \omega S \mathfrak{C}_1 \cos. u \\ &+ \varphi \mathfrak{C} \cos. u + \psi \mathfrak{D} \cos. u + \omega (\mathfrak{C} + \varepsilon) \cos. u \end{aligned} \right\} d\alpha \dots d\gamma \end{aligned} \right\} (20)$$

Nun ist :

$$\begin{aligned} \Delta \cos. u &= \cos. (u + \Delta u) - \cos. u = \cos. u \cos. \Delta u - \sin. u \sin. \Delta u - \cos. u \\ &= \cos. u (\cos. \Delta u - 1) - \sin. u \sin. \Delta u \\ &= -2 \cos. u \left(\sin. \frac{1}{2} \Delta u \right)^2 - \sin. u \sin. \Delta u \end{aligned}$$

Bezeichnet man durch \wp irgend eine der sechs Grössen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}, \mathfrak{F}$, so hat man:

$$\begin{aligned} S \wp J \cos. u &= S \wp \left[-2 \cos. u \left(\sin. \frac{1}{2} Ju \right)^2 - \sin. u \sin. Ju \right] \\ &= -2 \cos. u S \wp \left(\sin. \frac{1}{2} Ju \right)^2 - \sin. u S \wp \sin. Ju \end{aligned}$$

Wenn wir annehmen, dass im Medium jedem Punkt ein Gegenpunkt entspricht, d. h. voraussetzen, dass für jeden Punkt, für welchen $Jx Jy Jz$ gilt, ein zweiter Punkt existirt, für welchen $-Jx -Jy -Jz$ gilt, so verschwinden alle diejenigen Summen, in welchen irgend eine der Grössen $Jx Jy Jz$ in einer ungeraden Potenz erscheint; es ist demnach unter dieser Voraussetzung:

$$S \wp \sin. Ju = S \wp \sin. (\alpha Jx + \beta Jy + \gamma Jz) = 0$$

und folglich wird:

$$S \wp J \cos. u = -2 \cos. u S \wp \left(\sin. \frac{1}{2} Ju \right)^2$$

Führt man diesen Werth in die Differenzialgleichung (20) ein, so folgt:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \iiiii \left\{ \begin{array}{l} 2 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} - 2 \varphi S \mathfrak{A}_1 \left(\sin. \frac{1}{2} Ju \right)^2 - 2 \psi S \mathfrak{F}_1 \left(\sin. \frac{1}{2} Ju \right)^2 \\ - 2 \omega S \mathfrak{C}_1 \left(\sin. \frac{1}{2} Ju \right)^2 \\ + \varphi (\mathfrak{A} + \varepsilon) + \psi \mathfrak{F} + \omega \mathfrak{C} \end{array} \right\} \cos. u d\alpha. dy \\ 0 &= \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \iiiii \left\{ \begin{array}{l} 2 \frac{d^2 \psi}{dt^2} - 2 \varphi S \mathfrak{F}_1 \left(\sin. \frac{1}{2} Ju \right)^2 - 2 \psi S \mathfrak{B}_1 \left(\sin. \frac{1}{2} Ju \right)^2 \\ - 2 \omega S \mathfrak{D}_1 \left(\sin. \frac{1}{2} Ju \right)^2 \\ + \varphi \mathfrak{F} + \psi (\mathfrak{B} + \varepsilon) + \omega \mathfrak{D} \end{array} \right\} \cos. u d\alpha. dy \quad (21) \\ 0 &= \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \iiiii \left\{ \begin{array}{l} 2 \frac{d^2 \omega}{dt^2} - 2 \varphi S \mathfrak{C}_1 \left(\sin. \frac{1}{2} Ju \right)^2 - 2 \psi S \mathfrak{D}_1 \left(\sin. \frac{1}{2} Ju \right)^2 \\ - 2 \omega S \mathfrak{E}_1 \left(\sin. \frac{1}{2} Ju \right)^2 \\ + \varphi \mathfrak{C} + \psi \mathfrak{D} + \omega (\mathfrak{E} + \varepsilon) \end{array} \right\} \cos. u d\alpha. dy \end{aligned}$$

Setzt man zur Abkürzung :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} (\mathfrak{A} + \varepsilon) - S \mathfrak{A}_1 \left(\sin. \frac{1}{2} \mathfrak{A} u \right)^2 &= l \\ \frac{1}{2} (\mathfrak{B} + \varepsilon) - S \mathfrak{B}_1 \left(\sin. \frac{1}{2} \mathfrak{A} u \right)^2 &= m \\ \frac{1}{2} (\mathfrak{G} + \varepsilon) - S \mathfrak{G}_1 \left(\sin. \frac{1}{2} \mathfrak{A} u \right)^2 &= n \\ \frac{1}{2} \mathfrak{D} - S \mathfrak{D}_1 \left(\sin. \frac{1}{2} \mathfrak{A} u \right)^2 &= p \\ \frac{1}{2} \mathfrak{E} - S \mathfrak{E}_1 \left(\sin. \frac{1}{2} \mathfrak{A} u \right)^2 &= q \\ \frac{1}{2} \mathfrak{F} - S \mathfrak{F}_1 \left(\sin. \frac{1}{2} \mathfrak{A} u \right)^2 &= r \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (22)$$

so wird den Gleichungen (21) Genüge geleistet, wenn man nimmt :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + l \varphi + r \psi + q \omega &= 0 \\ \frac{d^2 \psi}{dt^2} + r \varphi + m \psi + p \omega &= 0 \\ \frac{d^2 \omega}{dt^2} + q \varphi + p \psi + n \omega &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (23)$$

Hierdurch hat man nun zur Bestimmung der in der Fourier'schen Formel vorkommenden Funktionen $\varphi \psi \omega$ drei Differenzialgleichungen.

Um diese Gleichungen zu integriren, versuchen wir die Annahme :

$$\varphi = \mathfrak{A} T \quad \psi = \mathfrak{B} T \quad \omega = \mathfrak{P} T \dots \dots \dots (24)$$

wobei wir voraussetzen, dass T eine Funktion von t sei, dass jedoch die Grössen $\mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathfrak{P}$ kein t enthalten. Dann ist :

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \mathfrak{A} \frac{d^2 T}{dt^2} \quad \frac{d^2 \psi}{dt^2} = \mathfrak{B} \frac{d^2 T}{dt^2} \quad \frac{d^2 \omega}{dt^2} = \mathfrak{P} \frac{d^2 T}{dt^2} \dots \dots \dots (25)$$

Hierdurch werden die Gleichungen (23) :

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \frac{d^2 T}{dt^2} + (l \mathfrak{A} + r \mathfrak{B} + q \mathfrak{P}) T &= 0 \\ \mathfrak{B} \frac{d^2 T}{dt^2} + (r \mathfrak{A} + m \mathfrak{B} + p \mathfrak{P}) T &= 0 \\ \mathfrak{P} \frac{d^2 T}{dt^2} + (q \mathfrak{A} + p \mathfrak{B} + n \mathfrak{P}) T &= 0 \end{aligned}$$

und diesen Gleichungen wird Genüge geleistet, wenn man nimmt :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} &= - \frac{l \mathfrak{M} + r \mathfrak{N} + q \mathfrak{P}}{\mathfrak{M}} = - \mathfrak{g}^2 \\ \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} &= - \frac{r \mathfrak{M} + m \mathfrak{N} + p \mathfrak{P}}{\mathfrak{N}} = - \mathfrak{g}^2 \\ \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} &= - \frac{q \mathfrak{M} + p \mathfrak{N} + n \mathfrak{P}}{\mathfrak{P}} = - \mathfrak{g}^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (26)$$

Aus diesen Gleichungen folgt :

$$T = \mathfrak{G} \cos. \mathfrak{g} t + \mathfrak{H} \sin. \mathfrak{g} t \dots \dots \dots (27)$$

$$\left. \begin{aligned} (1 - \mathfrak{g}^2) \mathfrak{M} + r \mathfrak{N} + q \mathfrak{P} &= 0 \\ r \mathfrak{M} + (m - \mathfrak{g}^2) \mathfrak{N} + p \mathfrak{P} &= 0 \\ q \mathfrak{M} + p \mathfrak{N} + (n - \mathfrak{g}^2) \mathfrak{P} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (28)$$

Ferner findet man durch Elimination von $\mathfrak{M} \mathfrak{N} \mathfrak{P}$ aus diesen drei Gleichungen (28) folgende Gleichung :

$$(1 - \mathfrak{g}^2) (m - \mathfrak{g}^2) (n - \mathfrak{g}^2) - p^2 (1 - \mathfrak{g}^2) - q^2 (m - \mathfrak{g}^2) - r^2 (n - \mathfrak{g}^2) + 2 p q r = 0 \quad (29)$$

Diese Gleichung ist in Bezug auf \mathfrak{g}^2 vom dritten Grad, sie gibt also für \mathfrak{g}^2 drei Werthe, und dann geben die Gleichungen (28) für jeden der drei Werthe von \mathfrak{g}^2 bestimmte Werthe für $\mathfrak{M} \mathfrak{N} \mathfrak{P}$.

Die Gleichung (27) gibt endlich für die drei Werthe von \mathfrak{g}^2 drei Werthe von T. Vermöge (24) erhalten wir daher sowohl für φ als auch für ψ und für ω drei Werthe. Bezeichnen wir die drei Werthe von \mathfrak{g}^2 mit $\mathfrak{g}_1^2 \mathfrak{g}_2^2 \mathfrak{g}_3^2$ und die entsprechenden Werthe von $\mathfrak{M} \mathfrak{N} \mathfrak{P} \varphi \psi \omega$ dadurch, dass wir diesen Buchstaben Zahlen anhängen, so haben wir folgende zusammenhängende Grössen :

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_1^2 &\text{ gibt } \mathfrak{M}_1 \mathfrak{N}_1 \mathfrak{P}_1 & \varphi_1 \psi_1 \omega_1 \\ \mathfrak{g}_2^2 &\text{ „ } \mathfrak{M}_2 \mathfrak{N}_2 \mathfrak{P}_2 & \varphi_2 \psi_2 \omega_2 \\ \mathfrak{g}_3^2 &\text{ „ } \mathfrak{M}_3 \mathfrak{N}_3 \mathfrak{P}_3 & \varphi_3 \psi_3 \omega_3 \end{aligned}$$

Die Werthe von $\mathfrak{g}^2 \mathfrak{M} \mathfrak{N} \mathfrak{P}$ können durch eine geometrische Construction zur Anschauung gebracht werden. Vorausgesetzt, dass alle drei Wurzeln der Gleichung (29) reell sind, so bedeuten diese drei Wurzeln $\mathfrak{g}_1^2 \mathfrak{g}_2^2 \mathfrak{g}_3^2$ die drei Halbaxen eines Elypsoides, dessen Gleichung ist :

$$l x^2 + m y^2 + n z^2 + 2 p y z + 2 q x z + 2 r x y = 1$$

und die Werthe von $\mathfrak{M} \mathfrak{N} \mathfrak{P}$ sind die Cosinuse der Winkel, welche die Richtungen der Axen des Elypsoides mit den Axen $Ox Oy Oz$ bilden.

Die individuellen Werthe von \mathfrak{M} , \mathfrak{N} und \mathfrak{P} genügen daher den folgenden Beziehungen :

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2 + \mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_2 + \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 &= 0 \\ \mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_3 + \mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_3 + \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_3 &= 0 \\ \mathfrak{M}_2 \mathfrak{M}_3 + \mathfrak{N}_2 \mathfrak{N}_3 + \mathfrak{P}_2 \mathfrak{P}_3 &= 0 \\ \mathfrak{M}_1^2 + \mathfrak{N}_1^2 + \mathfrak{P}_1^2 &= 1 \\ \mathfrak{M}_2^2 + \mathfrak{N}_2^2 + \mathfrak{P}_2^2 &= 1 \\ \mathfrak{M}_3^2 + \mathfrak{N}_3^2 + \mathfrak{P}_3^2 &= 1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (30)$$

Vermöge der bisher gewonnenen Resultate erhalten wir nun für ξ , v , ζ folgende Ausdrücke :

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \mathfrak{E} \iiint \cos. u \mathfrak{M} (\mathfrak{G} \cos. \mathfrak{g} t + \mathfrak{H} \sin. \mathfrak{g} t) d\alpha d\beta d\gamma d\lambda d\mu d\nu \\ v &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \mathfrak{E} \iiint \cos. u \mathfrak{N} (\mathfrak{G} \cos. \mathfrak{g} t + \mathfrak{H} \sin. \mathfrak{g} t) d\alpha d\beta d\gamma d\lambda d\mu d\nu \\ \zeta &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \mathfrak{E} \iiint \cos. u \mathfrak{P} (\mathfrak{G} \cos. \mathfrak{g} t + \mathfrak{H} \sin. \mathfrak{g} t) d\alpha d\beta d\gamma d\lambda d\mu d\nu \end{aligned} \right\} (31)$$

In diesen Ausdrücken bedeutet das Zeichen \mathfrak{E} , dass die drei Wurzeln von (29) berücksichtigt werden sollen. Allein wenn $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3$ die drei Werthe von \mathfrak{g} sind, so erhält man für \mathfrak{g} selbst folgende sechs Werthe :

$$+ \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2 + \mathfrak{g}_3 \qquad - \mathfrak{g}_1 - \mathfrak{g}_2 - \mathfrak{g}_3$$

Das Summenzeichen \mathfrak{E} muss also, um die allgemeinsten Werthe von ξ , v , ζ zu erhalten, sowohl auf die positiven wie auf die negativen Wurzeln bezogen werden.

Nun ist :

$$\begin{aligned} \cos. u \cos. \mathfrak{g} t &= \frac{1}{2} \left[\cos. (u + \mathfrak{g} t) + \cos. (u - \mathfrak{g} t) \right] \\ \cos. u \sin. \mathfrak{g} t &= \frac{1}{2} \left[\sin. (u + \mathfrak{g} t) - \sin. (u - \mathfrak{g} t) \right] \end{aligned}$$

Daher wird :

$$\begin{aligned} \cos. u \mathfrak{M} (\mathfrak{G} \cos. \mathfrak{g} t + \mathfrak{H} \sin. \mathfrak{g} t) &= \frac{1}{2} \mathfrak{M} \left[\mathfrak{G} \cos. (u + \mathfrak{g} t) + \mathfrak{G} \cos. (u - \mathfrak{g} t) \right] \\ &+ \frac{1}{2} \mathfrak{M} \left[\mathfrak{H} \sin. (u + \mathfrak{g} t) - \mathfrak{H} \sin. (u - \mathfrak{g} t) \right] \end{aligned}$$

oder wegen :

$$\frac{\sin. (u + \vartheta t)}{\vartheta} = \int_0^t \cos. (u + \vartheta t) dt$$

$$\begin{aligned} \cos. u \mathfrak{R} (\mathfrak{G} \cos. \vartheta t + \mathfrak{H} \sin. \vartheta t) &= \frac{1}{2} \mathfrak{R} \left[\mathfrak{G} \cos. (u + \vartheta t) + \mathfrak{G} \cos. (u - \vartheta t) \right] \\ &+ \frac{1}{2} \mathfrak{R} \vartheta \left[\mathfrak{H} \int \cos. (u + \vartheta t) dt - \mathfrak{H} \int \cos. (u - \vartheta t) dt \right] \end{aligned}$$

Dehnt man die Summe \mathfrak{E} auf die positiven und negativen Wurzeln aus, so kann man schreiben :

$$\mathfrak{E} \cos. u \mathfrak{R} (\mathfrak{G} \cos. \vartheta t + \mathfrak{H} \sin. \vartheta t) = \frac{1}{2} \mathfrak{E} \mathfrak{R} \left[\mathfrak{G} \cos. (u - \vartheta t) + \mathfrak{G}_1 \int \cos. (u - \vartheta t) \right]$$

wobei gesetzt wurde $\vartheta \mathfrak{H} = \mathfrak{G}_1$.

Somit erhält man nun :

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{1}{16 \pi^3} \mathfrak{E} \iiiii \mathfrak{R} \left[\mathfrak{G} \cos. (u - \vartheta t) + \mathfrak{G}_1 \int_0^t \cos. (u - \vartheta t) dt \right] d\alpha d\beta d\gamma d\lambda d\mu d\nu \\ \nu &= \frac{1}{16 \pi^3} \mathfrak{E} \iiiii \mathfrak{R} \left[\mathfrak{G} \cos. (u - \vartheta t) + \mathfrak{G}_1 \int_0^t \cos. (u - \vartheta t) dt \right] d\alpha d\beta d\gamma d\lambda d\mu d\nu \\ \zeta &= \frac{1}{16 \pi^3} \mathfrak{E} \iiiii \mathfrak{R} \left[\mathfrak{G} \cos. (u - \vartheta t) + \mathfrak{G}_1 \int_0^t \cos. (u - \vartheta t) dt \right] d\alpha d\beta d\gamma d\lambda d\mu d\nu \end{aligned} \right\} (32)$$

Diesen Gleichungen kann man mit Hülfe einer geometrischen Betrachtung noch eine andere Form geben. Die hierzu dienliche Figur wird man sich vermittelst der folgenden Erklärung leicht machen können.

Betrachten wir :

$\alpha \beta \gamma$ als Coordinaten eines Punktes A ;
 $x y z$ „ „ des „ M ;
 $\lambda \mu \nu$ „ „ eines „ L ;

und verbinden die Punkte A M L mit dem Anfangspunkt O, fällen ferner von M und L auf OA die Perpendikel Mm und Ll, und setzen :

$$\begin{aligned} \overline{OL} &= \rho, & \overline{OM} &= R, & \overline{OA} &= e \\ \overline{OI} &= p, & \overline{Om} &= p \end{aligned}$$

so ist :

$$\cos. \widehat{LOI} = \frac{p_i}{e_i} = \frac{\lambda}{e_i} \frac{\alpha}{e} + \frac{\mu}{e_i} \frac{\beta}{e} + \frac{\nu}{e_i} \frac{\gamma}{e}$$

$$\cos. \widehat{MOm} = \frac{p}{R} = \frac{\alpha}{e} \frac{x}{R} + \frac{\beta}{e} \frac{y}{R} + \frac{\gamma}{e} \frac{z}{R}$$

Demnach :

$$p_i e = \alpha \lambda + \beta \mu + \gamma \nu$$

$$p e = \alpha x + \beta y + \gamma z$$

Nimmt man die Differenz dieser zwei Ausdrücke, so wird :

$$p e - p_i e = \alpha (x - \lambda) + \beta (y - \mu) + \gamma (z - \nu)$$

Man hat daher vermöge der Gleichung (16), Seite 118 :

$$p e - p_i e = u$$

und folglich :

$$\cos. (u - \mathfrak{J} t) = \cos. (p e - p_i e - \mathfrak{J} t) = \cos. (p e - \mathfrak{J} t) \cos. p_i e + \sin. (p e - \mathfrak{J} t) \sin. p_i e$$

Führt man diesen Werth von $\cos. (u - \mathfrak{J} t)$ in die Gleichungen (32) ein, so findet man :

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{1}{16 \pi^3} \mathfrak{E} \iiint \mathfrak{R} \mathfrak{G} \left[\cos. (e p - \mathfrak{J} t) \cos. e p_i + \sin. (e p - \mathfrak{J} t) \sin. e p_i \right] d \alpha \dots d \nu \\ &+ \frac{1}{16 \pi^3} \int_0^t \mathfrak{E} \iiint \mathfrak{R} \mathfrak{G}_1 \left[\cos. (e p - \mathfrak{J} t) \cos. e p_i + \sin. (e p - \mathfrak{J} t) \sin. e p_i \right] d \alpha \dots d \nu dt \\ \nu &= \frac{1}{16 \pi^3} \mathfrak{E} \iiint \mathfrak{R} \mathfrak{G} \left[\cos. (e p - \mathfrak{J} t) \cos. e p_i + \sin. (e p - \mathfrak{J} t) \sin. e p_i \right] d \alpha \dots d \nu \\ &+ \frac{1}{16 \pi^3} \int_0^t \mathfrak{E} \iiint \mathfrak{R} \mathfrak{G}_1 \left[\cos. (e p - \mathfrak{J} t) \cos. e p_i + \sin. (e p - \mathfrak{J} t) \sin. e p_i \right] d \alpha \dots d \nu dt \\ \zeta &= \frac{1}{16 \pi^3} \mathfrak{E} \iiint \mathfrak{P} \mathfrak{G} \left[\cos. (e p - \mathfrak{J} t) \cos. e p_i + \sin. (e p - \mathfrak{J} t) \sin. e p_i \right] d \alpha \dots d \nu \\ &+ \frac{1}{16 \pi^3} \int_0^t \mathfrak{E} \iiint \mathfrak{P} \mathfrak{G}_1 \left[\cos. (e p - \mathfrak{J} t) \cos. e p_i + \sin. (e p - \mathfrak{J} t) \sin. e p_i \right] d \alpha \dots d \nu dt \end{aligned} \right\} (33)$$

Denkt man sich die Integrationen in Bezug auf $\lambda \mu \nu$ ausgeführt und setzt zur Abkürzung :

$$\left. \begin{aligned} \iiint \cos. \varrho p_1 \mathfrak{G} d\lambda d\mu d\nu &= \mathfrak{R} \\ \iiint \sin. \varrho p_1 \mathfrak{G} d\lambda d\mu d\nu &= \mathfrak{R}_1 \\ \iiint \cos. \varrho p_1 \mathfrak{G}_1 d\lambda d\mu d\nu &= \mathfrak{Z} \\ \iiint \sin. \varrho p_1 \mathfrak{G}_1 d\lambda d\mu d\nu &= \mathfrak{Z}_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (34)$$

$$16 \pi^3 \Pi = \left\{ \begin{aligned} &\cos. (\varrho p - \vartheta t) \mathfrak{R} + \sin. (\varrho p - \vartheta t) \mathfrak{R}_1 + \\ &+ \int_0^t [\cos. (\varrho p - \vartheta t) \mathfrak{Z} + \sin. (\varrho p - \vartheta t) \mathfrak{Z}_1] dt \end{aligned} \right\} \dots \dots (35)$$

so erhält man endlich :

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \mathfrak{E} \iiint \mathfrak{R} \Pi d\alpha d\beta d\gamma \\ \nu &= \mathfrak{E} \iiint \mathfrak{R} \Pi d\alpha d\beta d\gamma \\ \zeta &= \mathfrak{E} \iiint \mathfrak{R} \Pi d\alpha d\beta d\gamma \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (36)$$

Dies sind nun endlich die Integrale der Gleichungen (14), und zwar in einer Form, welche eine Interpretation zulässt, so dass wir über den Bewegungszustand des Aethers im Doppelmedium eine Vorstellung erhalten.

Die Gleichung (35) kann auf folgende Weise umgestaltet werden.

Bezeichnet man mit Π_0 den Werth von Π für $t=0$, und durch Π'_t den Werth von $\frac{d\Pi}{dt}$ für $t=0$, so hat man :

$$\begin{aligned} 16 \pi^3 \Pi_0 &= \cos. \varrho p \mathfrak{R} + \sin. \varrho p \mathfrak{R}_1 \\ 16 \pi^3 \Pi'_0 &= \cos. \varrho p \mathfrak{Z} + \sin. \varrho p \mathfrak{Z}_1 \end{aligned}$$

Die Grössen $\mathfrak{R} \mathfrak{R}_1 \mathfrak{Z} \mathfrak{Z}_1$ sind Funktionen von $\alpha \beta \gamma$, aber nicht von p ; wir können daher schreiben :

$$\begin{aligned} \cos. \varrho p \mathfrak{R} + \sin. \varrho p \mathfrak{R}_1 &= F(\varrho p) \\ \cos. \varrho p \mathfrak{Z} + \sin. \varrho p \mathfrak{Z}_1 &= F'(\varrho p) \end{aligned}$$

wobei $F F'$ Funktionszeichen sind. Dann aber ist consequenter Weise zu schreiben :

$$\begin{aligned} \cos. (\varrho p - \vartheta t) \mathfrak{R} + \sin. (\varrho p - \vartheta t) \mathfrak{R}_1 &= F(\varrho p - \vartheta t) \\ \cos. (\varrho p - \vartheta t) \mathfrak{Z} + \sin. (\varrho p - \vartheta t) \mathfrak{Z}_1 &= F'(\varrho p - \vartheta t) \end{aligned}$$

Demnach wird der Ausdruck (35) :

$$16 \pi^2 \Pi = F(\rho p - \vartheta t) + \int_0^t F'(\rho p - \vartheta t) dt \dots \dots \dots (37)$$

Es ist offenbar $F(\rho p)$ der initiale Werth der Verschiebung $\mathfrak{M}\xi + \mathfrak{M}\nu + \mathfrak{M}\zeta$, und $F'(\rho p)$ die anfängliche Geschwindigkeit.

Wenn wir annehmen, dass am Anfang der Zeit eine Bewegung nur allein in einer unendlich kleinen Entfernung vom Anfangspunkt der Coordinaten erregt worden ist, haben die Funktionen F und F' nur dann endliche Werthe, wenn für die Veränderliche ein sehr kleiner Werth gesetzt wird. Daraus sieht man, dass bei einem solchen Initial-Zustand Π nur dann einen Werth hat, wenn $\rho p - \vartheta t$ sehr klein oder nahe gleich Null ist, d. h. es ist nach Verlauf der Zeit t nur an den Orten Bewegung vorhanden, für welche $\rho p - \vartheta t = 0$, oder

$$p = \frac{\vartheta}{\rho} t$$

ist; der ganze übrige Raum ist ruhig.

INTERPRETATION DER INTEGRALE.

Betrachten wir die Methode, welche uns zur Integration der Gleichungen (14), Seite 118, geführt hat, genauer, so ersieht man, dass

$$\cos u \cdot \varphi \qquad \cos u \cdot \psi \qquad \cos u \cdot \omega$$

partikuläre Integralien der genannten Gleichungen darstellen, denn die in den Klammern stehenden Ausdrücke der Gleichungen (21) wurden Null gesetzt, und daraus $\varphi \psi \omega$ bestimmt. Daraus folgt, dass $\mathfrak{M}\Pi \mathfrak{N}\Pi \mathfrak{P}\Pi$ ebenfalls partikuläre Werthe von $\xi \nu \zeta$ sind, und dass die totalen Werthe dieser Grössen aus unendlich vielen partikulären Werthen zusammengesetzt sind. Die Bewegung eines Punktes $x y z$ besteht daher aus unendlich vielen Elementarbewegungen, von denen jede möglicher Weise isolirt auftreten könnte.

Wir wollen nun eine solche Elementarbewegung

$$\mathfrak{M}\Pi \qquad \mathfrak{N}\Pi \qquad \mathfrak{P}\Pi$$

näher betrachten.

Betrachten wir zunächst die Bewegungen aller Punkte, welche in einer in m auf OA senkrechten Ebene liegen, so hat für alle Punkte dieser Ebene p den gleichen Werth. Demnach machen alle Punkte dieser Ebene identische Elementarbewegungen, denn der Grösse nach stimmen diese Bewegungen überein, weil Π nur von p abhängt, und der Richtung nach stimmen diese Bewegungen überein, weil $\mathfrak{M} \mathfrak{N} \mathfrak{P}$ nur allein von $\alpha \beta \gamma$ abhängen. Für eine zweite auf OA senkrechte Ebene hat p einen andern Werth, mithin

auch \mathcal{H} ; allein $\mathfrak{R} \mathfrak{R} \mathfrak{P}$ (die, wie gesagt, nur von $\alpha \beta \gamma$ abhängen, sich also nur ändern, wenn die Lage des Punktes Λ verändert wird) haben die gleichen Werthe wie in der ersten Ebene. Die Schwingungsrichtungen (Polarisationsrichtungen) in allen auf ΛO senkrechten Ebenen stimmen also überein.

Ändert sich ρ um $\frac{2\pi}{\rho}$, so erhält \mathcal{H} wiederum den gleichen Werth. Denkt man sich also den ganzen unendlichen Raum durch Ebenen getheilt, die auf OA senkrecht stehen, und von denen je zwei unmittelbar auf einander folgende um $\frac{2\pi}{\rho}$ absteigen, so sind für einen bestimmten Zeitmoment (für ein bestimmtes t) die Bewegungszustände in allen Schichten von der Dicke $\frac{2\pi}{\rho}$ gleich gross. Wir wollen die im schwingenden Zustand befindliche Aethermasse einer Schichte eine elementare Lichtwelle nennen, und die Dicke dieser Schichte Wellenlänge. Nennen wir diese λ , setzen also :

$$\frac{2\pi}{\rho} = \lambda \dots \dots \dots (1)$$

Ändert sich t um $\frac{2\pi}{\mathfrak{g}}$, so erhält \mathcal{H} für einen und denselben Werth von ρ wiederum den gleichen Werth, d. h. der Schwingungszustand in einer bestimmten, auf OA senkrechten Ebene ist ein periodischer nach Verlauf einer Zeit $\frac{2\pi}{\mathfrak{g}}$ wiederkehrender. $\frac{2\pi}{\mathfrak{g}}$ drückt also in einer Elementarbewegung die Schwingungszeit des Massenmittelpunktes einer Aetherhülle aus. Nennen wir diese Schwingungszeit T , setzen also :

$$T = \frac{2\pi}{\mathfrak{g}} \dots \dots \dots (2)$$

Während der Zeit T einer Schwingung rückt die ganze wandelbare Form der Welle um $\frac{2\pi}{\rho} = \lambda$ vorwärts. Die Geschwindigkeit v der Fortpflanzung dieser Bewegung ist demnach gleich dem Quotienten aus der Wellenlänge und der Schwingungszeit. Setzt man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v , so hat man :

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\frac{2\pi}{\rho}}{\frac{2\pi}{\mathfrak{g}}} = \frac{\mathfrak{g}}{\rho}$$

Jeder bestimmte Punkt des ganzen unbegrenzten Mediums veranlasst also in dem ganzen Medium einen Bewegungszustand, dem folgende Eigenschaften zukommen.

Für einen bestimmten Punkt haben $\alpha \beta \gamma$ bestimmte Werthe. Nun sind $l m n p q r$ (Ausdrücke 22, S. 121) reine Funktionen von $\alpha \beta \gamma$, daher gibt die kubische Gleichung (29) für jeden bestimmten Punkt ($\alpha \beta \gamma$) drei Werthe $\mathfrak{g}_1 \mathfrak{g}_2 \mathfrak{g}_3$ für \mathfrak{g} , und diese Werthe in die Gleichungen (28) gesetzt, so erhält man für $\mathfrak{R} \mathfrak{R} \mathfrak{P}$ die drei Systeme von Werthen :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{R}_1 & \mathfrak{R}_1 & \mathfrak{P}_1 \\ \mathfrak{R}_2 & \mathfrak{R}_2 & \mathfrak{P}_2 \\ \mathfrak{R}_3 & \mathfrak{R}_3 & \mathfrak{P}_3 \end{array}$$

Betrachten wir zunächst die Bewegung, welche einem solchen System, z. B. dem System

$$\vartheta_1 \quad \mathfrak{M}_1 \quad \mathfrak{N}_1 \quad \mathfrak{P}_1$$

entspricht, so besteht diese Bewegung aus einer Reihenfolge von auf OA senkrechten Wellen von der Länge $\lambda = \frac{2\pi}{\varrho}$. Die Schwingungszeit jedes Aethertheilchens sämtlicher Wellen ist gleich $T = \frac{2\pi}{\vartheta_1}$, und diese Wellen bewegen sich längs der Linie OA fort mit einer Geschwindigkeit $v = \frac{\vartheta_1}{\varrho}$. Die Schwingungsrichtungen stimmen für alle Aethertheilchen überein und werden durch die Werthe von $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{N}_1, \mathfrak{P}_1$ bestimmt.

Aehnliche Wellensysteme liefern die beiden andern Wurzeln ϑ_2, ϑ_3 . Wir erhalten daher drei Wellensysteme, deren Zustand durch folgendes Schema anschaulich wird.

Wellensystem für ein bestimmtes $\alpha \beta \gamma$.			
	I.	II.	III.
Wellenlänge	$\lambda = \frac{2\pi}{\varrho}$	$\lambda = \frac{2\pi}{\varrho}$	$\lambda = \frac{2\pi}{\varrho}$
Schwingungszeit.	$T_1 = \frac{2\pi}{\vartheta_1}$	$T_2 = \frac{2\pi}{\vartheta_2}$	$T_3 = \frac{2\pi}{\vartheta_3}$
Fortpflanzungsgeschwindigkeit	$v_1 = \frac{\vartheta_1}{\varrho}$	$v_2 = \frac{\vartheta_2}{\varrho}$	$v_3 = \frac{\vartheta_3}{\varrho}$
Polarisationsrichtungen	$\mathfrak{M}_1, \mathfrak{N}_1, \mathfrak{P}_1$	$\mathfrak{M}_2, \mathfrak{N}_2, \mathfrak{P}_2$	$\mathfrak{M}_3, \mathfrak{N}_3, \mathfrak{P}_3$

Es ist von grösster Wichtigkeit, zu bemerken, dass zwischen ϱ und λ oder zwischen ϱ und λ eine gewisse Abhängigkeit besteht. Denn ϱ wird durch l_{mnpqr} bestimmt, diese Grössen hängen aber von $\alpha \beta \gamma$ oder von ϱ ab. Jedes individuelle ϱ liefert demnach drei individuelle Werthe für ϱ^2 . Auch muss noch bemerkt werden, dass l_{mnpqr} von der Constitution des Mediums abhängt, dass mithin ϱ^2 eine Funktion nicht nur von $\alpha \beta \gamma$ oder von ϱ , sondern auch von der Natur des Mediums ist. Endlich ist noch in Erinnerung zu bringen, dass die drei Polarisationsrichtungen, welche durch $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{N}_1, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{N}_2, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{M}_3, \mathfrak{N}_3, \mathfrak{P}_3$ bestimmt werden, auf einander senkrecht stehen.

Mit Worten ausgesprochen, ist der Sinn des aufgestellten Schemas folgender :

1. Jeder individuelle Punkt A des Mediums veranlasst drei Systeme von Wellen.
2. Diese drei Wellensysteme stehen senkrecht auf OA, sind also zu einander parallel.
3. In jedem einzelnen der drei Wellensysteme sind die Bewegungsrichtungen (Polarisationsrichtungen) parallel.
4. Die Polarisationsrichtungen in den drei Wellensystemen stehen auf einander senkrecht.
5. Die Wellenlängen stimmen in den drei Systemen überein, und hängen nur allein von der Wahl des Punktes A ab.
6. Die Schwingungszeiten sind in den drei Wellensystemen nicht gleich gross, und hängen auch von der Natur des Mediums ab; wenn also in zwei verschiedenen Medien durch gleich grosse Werthe von ϱ Wellen erregt werden, so sind zwar

die Wellenlängen in beiden Medien gleich gross, allein die Schwingungszeiten sind ungleich.

7. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten sind in den drei Wellensystemen ungleich, und diese Fortpflanzungsgeschwindigkeiten hängen auch von der Natur des Mediums ab.
8. Die Schwingungsgeschwindigkeiten, so wie auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten, stehen in einem Zusammenhang mit der Wellenlänge und mit der Natur des Mediums.

Hiermit ist nun der gesammte Gehalt eines partikulären Integrales ausgesprochen. Nun besteht aber das totale Integral aus unendlich vielen partikulären Integralen, die sich ergeben, wenn man für $\alpha \beta \gamma$ alle möglichen Werthe annimmt. Die ganze Bewegung besteht also aus unendlich vielen dreifachen Wellensystemen und die Bewegungsrichtungen der Wellensysteme sind im Allgemeinen verschieden, weil sie mit der Richtung AO zusammenfallen.

Um nun diese Ergebnisse der Rechnung mit den Beobachtungen in Zusammenhang zu bringen, müssen insbesondere folgende Fragen beantwortet werden :

1. Wodurch wird die Farbe bestimmt ?
2. Wodurch wird ein Lichtstrahl bestimmt ?

Um diese Fragen zu beantworten, ist es nothwendig, die Beziehung, welche zwischen der Schwingungsgeschwindigkeit und Wellenlänge besteht, ausfindig zu machen, was wir im Folgenden wenigstens für ein einfach brechendes Medium thun werden.

ABHÄNGIGKEIT ZWISCHEN WELLENLÄNGE, FORTPFLANZUNGSGESCHWINDIGKEIT UND SCHWINGUNGSGESCHWINDIGKEIT IN EINEM EINFACH BRECHENDEN MEDIUM.

In einem einfach brechenden Medium, in welchem also die Elastizität nach allen Richtungen um jeden Punkt herum gleich ist, regen alle von dem Anfangspunkt der Coordinaten gleich weit entfernten Atome identische Elementarwellen an, es ist also in diesem Falle genügend, die Bewegungsverhältnisse irgend einer dieser Elementarwellen zu untersuchen, und wir nehmen deshalb den Erregungspunkt in der Axe Ox an, d. h. wir setzen :

$$\beta = 0 \quad \gamma = 0 \quad \text{demnach } \mathcal{A}u = \alpha \mathcal{A}x$$

Für ein Medium, das nach allen Richtungen einerlei Elastizität hat, ist vermöge der Ausdrücke (8) und (9), Seite 116 :

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{C} \quad \mathfrak{F} = \mathfrak{G} = \mathfrak{D} = 0$$

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{\mu_1}{r} \left[J(r) + \frac{d \left(\frac{1}{r} J(r) \right)}{dr} Jx^2 \right]$$

$$\mathfrak{B}_1 = \frac{\mu_1}{r} \left[J(r) + \frac{d \left(\frac{1}{r} J(r) \right)}{dr} Jy^2 \right]$$

$$\mathfrak{C}_1 = \frac{\mu_1}{r} \left[J(r) + \frac{d \left(\frac{1}{r} J(r) \right)}{dr} Jz^2 \right]$$

$$\mathfrak{F}_1 = 0 \quad \mathfrak{G}_1 = 0 \quad \mathfrak{D}_1 = 0$$

und daher werden die Ausdrücke (22), Seite 121 :

$$\left. \begin{aligned} l &= \frac{1}{2} (\mathfrak{A} + e) - 8 \frac{\mu_1}{r} \left[J(r) + \frac{d \left(\frac{1}{r} J(r) \right)}{dr} Jx^2 \right] \left(\sin. \frac{1}{2} \alpha Jx \right)^2 \\ m &= \frac{1}{2} (\mathfrak{A} + e) - 8 \frac{\mu_1}{r} \left[J(r) + \frac{d \left(\frac{1}{r} J(r) \right)}{dr} Jy^2 \right] \left(\sin. \frac{1}{2} \alpha Jx \right)^2 \\ n &= \frac{1}{2} (\mathfrak{A} + e) - 8 \frac{\mu_1}{r} \left[J(r) + \frac{d \left(\frac{1}{r} J(r) \right)}{dr} Jz^2 \right] \left(\sin. \frac{1}{2} \alpha Jx \right)^2 \end{aligned} \right\} \dots (38)$$

$$p = 0 \quad q = 0 \quad r = 0$$

Vermöge $p = q = r = 0$ wird die kubische Gleichung (29), Seite 122 :

$$(1 - \mathfrak{P}^2) (m - \mathfrak{P}^2) (n - \mathfrak{P}^2) = 0$$

Demnach hat man :

$$\mathfrak{P}_1^2 = 1 \quad \mathfrak{P}_2^2 = m \quad \mathfrak{P}_3^2 = n \quad \dots \dots \dots (39)$$

oder weil vermöge des Ausdrucks (38) $m = n$ ist :

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{P}_1^2 &= \frac{1}{2} (\mathfrak{A} + e) - 8 \frac{\mu_1}{r} \left[J(r) + \frac{d \left(\frac{1}{r} J(r) \right)}{dr} Jx^2 \right] \left(\sin. \frac{1}{2} \alpha Jx \right)^2 \\ \mathfrak{P}_2^2 = \mathfrak{P}_3^2 &= \frac{1}{2} (\mathfrak{A} + e) - 8 \frac{\mu_1}{r} \left[J(r) + \frac{d \left(\frac{1}{r} J(r) \right)}{dr} Jy^2 \right] \left(\sin. \frac{1}{2} \alpha Jx \right)^2 \end{aligned} \right\} (40)$$

In diesen Summen haben nur diejenigen Glieder einen ansehnlichen Werth, für welche Jx und r klein ist, denn wie auch α angenommen werden mag, so bleibt $\left(\sin. \frac{1}{2} \alpha Jx \right)^2$

stets kleiner als die Einheit, und die Funktionen $J(r)$ und $\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} J(r) \right)$ haben nur für sehr kleine Werthe von r einen beträchtlicheren Werth. Nun ist :

$$\left(\sin. \frac{1}{2} \alpha \Delta x \right)^2 = \frac{1}{2} (1 - \cos. \alpha \Delta x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha^2 \Delta x^2}{1.2} - \frac{\alpha^4 \Delta x^4}{1..4} + \frac{\alpha^6 \Delta x^6}{1....6} - \dots \right)$$

Daher wird :

$$\mathcal{G}_2^2 = \frac{1}{2} (\mathfrak{H} + \varepsilon) - s \frac{\mu_1}{r} \left[J(r) + \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} J(r) \right) \Delta y^2 \right] \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha^2 \Delta x^2}{1.2} - \frac{\alpha^4 \Delta x^4}{1..4} + \frac{\alpha^6 \Delta x^6}{1....6} - \dots \right)$$

oder :

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{G}_2^2 = \frac{1}{2} (\mathfrak{H} + \varepsilon) - \frac{1}{2} \alpha^2 s \frac{\mu_1}{r} \left[J(r) + \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} J(r) \right) \Delta y^2 \right] \frac{\Delta x^2}{1.2} \\ + \frac{1}{2} \alpha^4 s \frac{\mu_1}{r} \left[J(r) + \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} J(r) \right) \Delta y^2 \right] \frac{\Delta x^4}{1..4} \\ - \frac{1}{2} \alpha^6 s \frac{\mu_1}{r} \left[J(r) + \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} J(r) \right) \Delta y^2 \right] \frac{\Delta x^6}{1....6} \\ + \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (41) \text{ *)}$$

Man erhält demnach für \mathcal{G}_2^2 einen Ausdruck von der Form :

$$\mathcal{G}_2^2 = \Lambda_0 + \Lambda_2 \alpha^2 + \Lambda_4 \alpha^4 + \Lambda_6 \alpha^6 + \dots$$

wobei $\Lambda_0, \Lambda_2, \Lambda_4, \Lambda_6$ Grössen sind, die von der Beschaffenheit des Mediums abhängen. Allein Λ_0 hängt nur allein von den Körperatomen ab und $\Lambda_2, \Lambda_4, \Lambda_6$ vom Aether.

Es ist klar, dass die Coefficienten $\Lambda_2, \Lambda_4, \Lambda_6$ sehr kleine Grössen sind, denn entweder sind die Funktionen $J(r), \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} J(r) \right)$, oder es sind die Werthe von Δx sehr klein; wir dürfen uns daher wohl erlauben, nur die drei ersten Glieder der letzten Gleichung in Rechnung zu bringen, setzen also :

$$\mathcal{G}_2^2 = \Lambda_0 + \Lambda_2 \alpha^2 + \Lambda_4 \alpha^4 \dots \dots \dots (42)$$

*) Es wäre sehr wichtig, wenn man die in (41) vorkommende Summe berechnen, oder wenigstens die analytische Natur dieser Funktion angeben könnte. Wenn sich beweisen liesse, dass sie eine periodische Funktion wäre, so würde vielleicht darin der Grund zu den dunkeln Linien des Spektrums zu suchen sein.

Hiermit ist nun eine Abhängigkeit zwischen ϱ_2 und α aufgefunden, welche, wie wir bald sehen werden, die Farbenzerstreuung des Lichtes bei Brechungen erklärt. Bevor wir jedoch zur Erklärung der Dispersion schreiten, wollen wir vorerst noch die Schwingungsrichtungen in den drei Elementarwellen untersuchen.

Setzen wir in den Gleichungen (28), S. 122, $p=q=r=0$, $m=n$, so werden dieselben:

$$(1 - \varrho^2) \mathfrak{R} = 0 \quad (m - \varrho^2) \mathfrak{R} = 0 \quad (m - \varrho^2) \mathfrak{P} = 0$$

Demnach erhalten wir :

$$\left. \begin{array}{lll} (1 - \varrho_1^2) \mathfrak{R}_1 = 0 & (m - \varrho_1^2) \mathfrak{R}_1 = 0 & (m - \varrho_1^2) \mathfrak{P}_1 = 0 \\ (1 - \varrho_2^2) \mathfrak{R}_2 = 0 & (m - \varrho_2^2) \mathfrak{R}_2 = 0 & (m - \varrho_2^2) \mathfrak{P}_2 = 0 \\ (1 - \varrho_3^2) \mathfrak{R}_3 = 0 & (m - \varrho_3^2) \mathfrak{R}_3 = 0 & (m - \varrho_3^2) \mathfrak{P}_3 = 0 \end{array} \right\} \dots (43)$$

Allein es ist :

$$\varrho_1 - 1 = 0 \quad \varrho_2^2 - m = 0 \quad \varrho_3^2 - m = 0$$

Den Gleichungen (43) kann also entsprochen werden durch :

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{R}_1 \text{ unbestimmt} & \mathfrak{R}_1 = 0 & \mathfrak{P}_1 = 0 \\ \mathfrak{R}_2 = 0 & \mathfrak{R}_2 \text{ unbestimmt} & \mathfrak{P}_2 \text{ unbestimmt} \\ \mathfrak{R}_3 = 0 & \mathfrak{R}_3 \text{ unbestimmt} & \mathfrak{P}_3 \text{ unbestimmt} \end{array}$$

Berücksichtigt man noch, dass $\mathfrak{R}_1^2 + \mathfrak{R}_2^2 + \mathfrak{P}_2^2 = 1$ ist, so folgt wegen $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{P}_1 = 0$ $\mathfrak{R}_2 = 1$.

Die Schwingungsrichtung der Elementarwelle, welcher ϱ_2^2 entspricht, ist daher parallel mit der Axe der x oder senkrecht auf der Wellenebene, und die Schwingungsrichtung in den beiden andern zusammenfallenden Wellenebenen fällt daher in die Wellenebene selbst oder steht senkrecht auf der Fortpflanzungsrichtung der Welle. Nur diese letztere gibt Lichtwirkungen, daher wir auch nur die Beziehung zwischen α und ϱ_2^2 gesucht haben. Die physikalische Bedeutung der Welle, in welcher die Schwingungsrichtung mit der Fortpflanzungsrichtung zusammenfällt, ist vorläufig noch nicht enträthelt, ich vermute aber, dass sie Wärmewirkungen hervorbringt, obgleich ich wohl weiss, dass die Physiker gefunden haben wollen, dass auch die strahlende Wärme auf Transversalschwingungen beruhe.

DIE FARBE.

Bei dem Uebergang eines farbigen Lichtstrahles aus einem Medium in ein anderes tritt im Allgemeinen (wenn nämlich die Richtung des einfallenden Strahles auf der Trennungsfläche der Medien nicht senkrecht steht) eine Ablenkung der Richtung, aber keine

Aenderung der Farbe ein. Es muss also die Farbe durch diejenige Grösse bestimmt werden, welche bei dem Uebergang eines Strahles constant bleibt. Nach der von *Cauchy* entwickelten Theorie der Brechung ändert sich bei dem Uebergang eines Strahles die Wellenlänge, bleibt dagegen die Schwingungszeit constant; wir müssen also schliessen, dass die Farbe durch die Schwingungszeit und nicht durch die Wellenlänge bestimmt wird.

Es ist für einen Strahl von bestimmter Farbe in einem bestimmten Medium

$$v = \frac{\lambda \vartheta}{2 \pi}$$

Für einen Strahl von anderer Farbe in einem andern Medium

$$v_1 = \frac{\lambda_1 \vartheta_1}{2 \pi}$$

Demnach :

$$\frac{v}{v_1} = \frac{\lambda \vartheta}{\lambda_1 \vartheta_1}$$

Für einen Strahl von bestimmter Farbe in zwei verschiedenen Medien ist aber $\vartheta = \vartheta_1$, demnach :

$$\frac{v}{v_1} = \frac{\lambda}{\lambda_1} \dots \dots \dots (44)$$

d. h. die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des Lichtes von bestimmter Farbe in zwei verschiedenen Medien verhalten sich wie die Wellenlängen in den zwei Medien. Allein das Verhältniss der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten ist gleich dem Brechungsverhältniss. Bezeichnet man dieses mit x , so hat man :

$$x = \frac{v}{v_1} = \frac{\lambda}{\lambda_1}$$

und hieraus folgt :

$$\lambda_1 = \frac{\lambda}{x} \dots \dots \dots (45)$$

d. h. wenn ein Strahl von einer bestimmten Farbe aus einem Medium (λv) in ein Medium ($\lambda_1 v_1$) übergeht, findet man die Wellenlänge λ_1 in dem zweiten Medium, wenn man die Wellenlänge λ im ersten Medium durch das Brechungsverhältniss x dividirt.

DIE DISPERSION DES LICHTES.

Ein in der Axe Ox liegender von O um α entfernter Punkt regt eine Elementarwelle an, deren Wellenlänge $\lambda = \frac{2 \pi}{\alpha}$ ist und welcher eine Schwingungszeit ϑ entspricht. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser Welle ist :

$$v = \frac{\frac{2\pi}{\alpha}}{\frac{2\pi}{\vartheta}} = \frac{\vartheta}{\alpha}$$

Zwischen ϑ und α besteht aber die Beziehung (42). Eliminirt man aus derselben ϑ , indem man dafür den Werth $\vartheta = \alpha v$ setzt, so folgt aus dieser Beziehung :

$$v^2 = \frac{A_0}{\alpha^2} + A_1 + A_2 \alpha^2 \dots \dots \dots (46)$$

Dies ist also die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Elementarwelle, welche der von 0 um α entfernte Punkt anregt, und diese hängt von α ab. Allein die totale Bewegung besteht aus allen Wellen, welche sämmtliche Punkte des Mediums anregen; man erhält also die Totalität der Wellen, welche längs der positiven Richtung der Axe Ox fortlaufen, wenn man für α alle Werthe von 0 bis ∞ setzt. Allein vermöge der Beziehung (46) hat jede Elementarwelle dieses Wellensystems eine andere Wellenlänge, eine andere Schwingungszeit, mithin eine andere Farbe, und auch eine andere Fortpflanzungsgeschwindigkeit, vorausgesetzt, dass die Coefficienten A_0, A_1 von Null verschieden sind.

Nach den physikalischen Thatsachen muss man annehmen, dass weisses Licht zum Vorschein kommt, wenn alle farbigen Strahlen zusammenfallen, also alle gleiche Fortpflanzungsgeschwindigkeit haben. Nach den Thatsachen der Physik muss man ferner annehmen, dass sich im leeren Raum weisses Licht unzerlegt fortpflanzt, und dass selbst in der Luft kaum farbige Wirkungen auftreten, wir müssen daher schliessen, dass für den leeren Raum, so wie auch für Luft A_0 und A_1 entweder ganz genau Null, oder doch verschwindend klein sind. Für den leeren Raum ist aber wirklich nach unserer Theorie A_0 absolut gleich Null, denn im leeren Raum gibt es keine Körperatome, sondern nur Aetheratome. A_1 ist aber nicht absolut Null, wohl aber ungemein klein, wie eine Vergleichung der Ausdrücke (41) und (42) zeigt. Unsere Theorie ist also hier mit den Thatsachen in guter Uebereinstimmung, und wir können daher annehmen, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten im leeren Raum und auch in der Luft für alle Farben einerlei Werth haben. Nennen wir nun ϱ diese Fortpflanzungsgeschwindigkeit, λ die Wellenlänge einer gewissen Farbe in der Luft oder im leeren Raum, κ das Brechungsverhältniss, das dem Uebergang des Strahles aus Luft in ein brechendes Medium entspricht, so ist vermöge (44) und (45) :

$$\frac{v}{\varrho} = \frac{\lambda}{1} = \frac{1}{\kappa}$$

Wir erhalten demnach vermöge (46) und mit Berücksichtigung, dass $\alpha = \frac{2\pi}{\lambda}$ ist :

$$\frac{\varrho^2}{\kappa^2} = \frac{A_0}{(2\pi)^2} \frac{1^2}{\lambda^2} + A_1 + A_2 (2\pi)^2 \frac{\lambda^2}{1^2}$$

Aus dieser Gleichung folgt :

$$\frac{1}{x^4} - \frac{\Lambda_2}{G^2 - \frac{\Lambda_0}{(2\pi)^2} l^2} \frac{1}{x^2} = \frac{\Lambda_1 (2\pi)^2}{l^2 \left[G^2 - \frac{\Lambda_0}{(2\pi)^2} l^2 \right]}$$

und hieraus ergibt sich :

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{2} \frac{\Lambda_2}{G^2 - \frac{\Lambda_0}{(2\pi)^2} l^2} \left[1 + \sqrt{1 + 4 \frac{\Lambda_1 (2\pi)^2}{\Lambda_2^2 l^2} \left(G^2 - \frac{\Lambda_0}{(2\pi)^2} l^2 \right)} \right] \dots (47)$$

Allein da die Brechungsquotienten der verschiedenen Strahlen so wenig verschieden sind, so muss man annehmen, dass sowohl $\frac{\Lambda_0}{(2\pi)^2} l^2$, als auch $\frac{\Lambda_1 (2\pi)^2}{\Lambda_2^2 l^2}$ im Verhältniss zu Λ_2 sehr kleine Grössen sind; es ist daher erlaubt, die Wurzelgrösse annähernd zu berechnen, und dann findet man :

$$\frac{1}{x^2} = \frac{\Lambda_2}{G^2 - \frac{\Lambda_0}{(2\pi)^2} l^2} + \frac{\Lambda_1 (2\pi)^2}{\Lambda_2 l^2}$$

oder auch weil überhaupt x mit l nur wenig veränderlich ist, also $\frac{\Lambda_0}{(2\pi)^2} l^2$ gegen G^2 klein sein muss, also annähernd

$$\frac{1}{G^2 - \frac{\Lambda_0}{(2\pi)^2} l^2} = \frac{1}{G^2} + \frac{\Lambda_0 l^2}{(2\pi)^2 G^4}$$

gesetzt werden darf :

$$\frac{1}{x^2} = \frac{\Lambda_2}{G^2} + \frac{\Lambda_0 \Lambda_2}{(2\pi)^2 G^4} l^2 + \frac{\Lambda_1 (2\pi)^2}{\Lambda_2 l^2} \dots (48)$$

so ist, wenn wir zur Abkürzung

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{\Lambda_2}{G^2} \\ a_1 &= \frac{\Lambda_0 \Lambda_2}{(2\pi)^2 G^4} \\ a_2 &= \frac{\Lambda_1 (2\pi)^2}{\Lambda_2} \end{aligned} \right\} \dots (49)$$

setzen :

$$\frac{1}{x^2} = a_0 + a_1 l^2 + \frac{a_2}{l^2} \dots (50)$$

Diese Gleichung gibt die Brechungsverhältnisse verschiedenfarbiger Strahlen und sagt aus, dass in allen Medien Farbenzerstreuungen eintreten, in welchen a_1 und a_2 , oder Λ_0 und Λ_1 nicht gleich Null sind, bestimmt also, wenn sie richtig ist, die Dispersion des Lichtes. Wir werden diese Formel später einer möglichst strengen Prüfung mit That-sachen unterwerfen, zunächst wollen wir aber noch einige die Dispersion betreffende Ver-hältnisse berühren.

WARUM GIBT ES KEINE DISPERSION DER KÖRPER-
SCHWINGUNGEN ?

Legen wir uns die interessante Frage zur Beantwortung vor, warum es in dem Schwingungssysteme der Körperatome keine der Dispersion analoge Erscheinung gibt.

Es ist bereits Seite 117 bemerkt worden, dass wir die Schwingungsgesetze eines Körpermediums erhalten, wenn wir in die Rechnungsresultate, welche die Aetherschwingungen ausdrücken, die Grössen

$$H(\rho) = \mathfrak{K} = \mathfrak{B} = \mathfrak{C} = \mathfrak{D} = \mathfrak{E} = \mathfrak{F} = \varepsilon = 0$$

setzen und das Symbol $J(r)$ mit $f(r)$ und μ mit m , vertauschen.

Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Elementarätherwelle haben wir gefunden, Gleichung (46), Seite 135 :

$$v^2 = \frac{A_0}{\alpha^2} + A_2 + A_4 \alpha^2 \dots \dots \dots (51)$$

wobei ist :

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2} (\mathfrak{K} + \varepsilon) \\ A_2 &= -\frac{1}{2} s \frac{\mu_1}{r} \left[J(r) + \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} J(r) \right) \Delta y^2 \right] \frac{\Delta x^2}{1.2} \\ A_4 &= +\frac{1}{2} s \frac{\mu_1}{r} \left[J(r) + \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} J(r) \right) \Delta y^2 \right] \frac{\Delta x^4}{1.2.3.4} \end{aligned} \right\} \dots \dots (52)$$

Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v einer elementaren Körperatom-Welle haben wir demnach einen Ausdruck von der Form :

$$V^2 = B_2 + B_4 \alpha^2 \dots \dots \dots (53)$$

wobei

$$\left. \begin{aligned} B_2 &= -\frac{1}{2} s \frac{m_1}{r} \left[f(r) + \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} f(r) \right) \Delta y^2 \right] \frac{\Delta x^2}{1.2} \\ B_4 &= +\frac{1}{2} s \frac{m_1}{r} \left[f(r) + \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} f(r) \right) \Delta y^2 \right] \frac{\Delta x^4}{1.2.3.4} \end{aligned} \right\} \dots \dots (54)$$

Wenn wir berücksichtigen : 1) dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Aetherwelle ungefähr 4000 Meilen beträgt, die des Schalles aber nur 400 Meter ; 2) dass der Unterschied der Brechbarkeit der Lichtstrahlen von verschiedener Farbe nicht gross ist ; 3) dass in dem System der Körperatomwellen die Erscheinung der Dispersion entweder

gar nicht oder doch nur in einem äusserst schwachen Maasse stattfindet, so können wir aus den Gleichungen (51) bis (54) mehrere interessante Folgerungen ziehen.

Aus der Thatsache, dass v gegen v beinahe verschwindend klein ist, folgt zunächst, dass der Coefficient B_2 im Vergleich zu A_2 verschwindend klein ist, obgleich die Masse m_1 eines Körperatoms viel grösser ist als die Masse μ einer Aetherhülle. Dies folgt auch aus unserer Theorie, wie aus folgenden Bemerkungen erhellen wird.

Es ist die Wechselwirkung $J(r)$ zweier Aetheratome stets abstossend; in den Ausdrücken (52) haben daher alle Glieder der Summe einerlei Zeichen, und der Gesamtbetrag dieser Glieder und insbesondere der Werth von A_2 kann also, namentlich wenn $J(r)$, d. h. die Kraft, mit welcher sich zwei Aethermasseneinheiten in der Entfernung r abstossen, verhältnissmässig sehr gross ist, sehr beträchtlich werden. Anders verhält es sich mit dem Werth von B_2 . Vermöge der Gleichung (21), S. 77, ist $8 m_1 \frac{f(r)}{r} \Delta x^2 = 0$, der Werth von B_2 wird demnach:

$$B_2 = -\frac{1}{2} 8 m_1 \frac{d \left(\frac{1}{r} f(r) \right)}{d r} \frac{\Delta y^2 \Delta x^2}{r}$$

Allein $f(r)$, d. h. die Wechselwirkung zweier Dynamiden ist, wie wir Seite 55, Gleichung (7) gezeigt haben, je nach dem Werth von r positiv oder negativ; von den Gliedern der obigen Summe ist daher eine Parthie positiv, eine andere Parthie negativ; diese Summe ist also die Differenz einer Reihe von positiven und einer Reihe von negativen Zahlen, diese Differenz kann also sehr klein ausfallen und wird es wohl auch, weil der stets positiv bleibende Faktor $\frac{\Delta y^2 \Delta x^2}{r}$ eine sehr kleine Grösse ist. Die rasche Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Aetherwelle und langsame Fortpflanzung der Schallwelle findet also ihre Erklärung vorzugsweise in dem Umstand, dass alle Glieder der Summe in dem Ausdruck für A_2 einerlei Zeichen haben, dass dagegen für ein Körpermedium

$$8 m_1 \frac{f(r)}{r} \Delta x^2 = 0$$

ist.

Ob in den Körpermedien Dispersion stattfindet oder nicht, und wenn sie stattfindet, in welchem Maasse sie auftritt, hängt von dem Werth von B_1 ab. Wäre B_1 absolut gleich Null, so wäre $v^2 = B_2$, d. h. die Fortpflanzungsgeschwindigkeit wäre dann unabhängig von der Wellenlänge und es gäbe dann gar keine Dispersion. Ist dagegen B_1 zwar nicht Null, aber doch sehr klein, so ist eine sehr schwache Dispersion vorhanden. Nun ist:

$$B_1 = \frac{1}{2} 8 \frac{m_1}{r} \left[f(r) + \frac{d \left(\frac{1}{r} f(r) \right)}{d r} \Delta y^2 \right] \frac{\Delta x^4}{1.2.3.4}$$

wohl nicht Null, gewiss aber eine äusserst kleine Grösse, weil die Glieder der Summe nicht immer einerlei Zeichen haben, weil ferner der Faktor Δx^4 eine ungemein kleine Grösse ist, weil endlich $f(r)$ mit dem Wachsen von r sehr rasch abnimmt.

Die später folgenden numerischen Rechnungen werden zeigen, dass die Coefficienten a_0 und a_1 positiv sind, der Coefficient a_2 dagegen negativ ist. Λ_0 und Λ_1 sind daher vermöge (49) positiv, Λ_2 dagegen ist negativ.

Allein es ist :

$$\Lambda_2 = -\frac{1}{2} S \frac{\mu_1}{r} \left[J(r) + \frac{d \left(\frac{1}{r} J(r) \right)}{d r} \Delta x^2 \right] \frac{\Delta x^2}{1.2}$$

Dieser Ausdruck kann daher, weil r , $J(r)$ und Δx^2 stets positiv ist, nur dann positiv werden, wenn $\frac{d \left(\frac{1}{r} J(r) \right)}{d r} \Delta x^2$ negativ und wenigstens für eine gewisse Reihe von Werthen von r numerisch grösser als $J(r)$ ausfällt.

Aus der Formel (50) ergibt sich das interessante Resultat, dass zweierlei Ursachen vorhanden sind, welche Dispersion veranlassen; denn es sind in dieser Formel zwei von der Wellenlänge abhängige Glieder vorhanden. Das Glied $\frac{a_2}{1^2}$ hängt nur von der Wirkung des Aethers auf sich selbst ab, das Glied $a_1 1^2$ drückt dagegen die Einwirkung des Körpermediums auf das Aethermedium aus, denn vermöge (8), Seite 116, ist :

$$\Lambda_0 = \frac{1}{2} (\mathfrak{A} + \varepsilon) = \frac{1}{2} \varepsilon + \frac{1}{2} S m_1 \left[\frac{G(r)}{r} + \frac{1}{r} \frac{d \left(\frac{1}{r} G(r) \right)}{d r} \Delta x^2 \right]$$

Ich habe zuerst vermuthet, dass die Dispersion $a_1 1^2$, welche das Körpermedium verursacht, beträchtlicher sein würde als jene, welche das Aethermedium hervorbringt; allein so ist es nicht. Die numerischen Rechnungen zeigen, dass die Werthe von $\frac{a_2}{1^2}$ grösser ausfallen als die Werthe von $a_1 1^2$.

PRÜFUNG DER FORMEL (50).

Die von *Fraunhofer* durch Beobachtungen und Rechnungen aufgefundenen Werthe der Wellenlängen und Brechungsverhältnisse für Lichtstrahlen von verschiedenen Farben setzen uns in den Stand, die Formel (50), nämlich :

$$\frac{1}{x^2} = a_0 + a_1 1^2 + \frac{a_2}{1^2} \dots \dots \dots (55)$$

einer numerischen Prüfung zu unterwerfen.

Fraunhofer hat bekanntlich die Wellenlängen und Brechungsverhältnisse derjenigen farbigen Strahlen bestimmt, welche gewissen im Spektrum sich zeigenden dunkeln Linien zunächst liegen.

Nach diesen Messungen haben die Strahlen, welche den von *Fraunhofer* mit B C D E F G H bezeichneten dunkeln Linien entsprechen, bei ihrem Durchgang durch Luft folgende Werthe, in Pariser Zollen ausgedrückt :

	B	C	D	E	F	G	H
$10^3 l =$	2541	2425	2175	1943	1789	1585	1451
demnach $10^{12} l^3 =$	6492304	5880625	4730625	3775249	3200521	2512225	2105401
und $\frac{1}{l^3} =$	$15402 \cdot 10^3$	$17005 \cdot 10^3$	$21138 \cdot 10^3$	$26488 \cdot 10^3$	$31244 \cdot 10^3$	$39805 \cdot 10^3$	$47496 \cdot 10^3$

Für den Durchgang dieser Strahlen durch ein mit Wasser gefülltes Prisma hat *Fraunhofer* folgende Brechungsverhältnisse gefunden :

	B	C	D	E	F	G	H
$n =$	1·330935	1·331712	1·333577	1·335851	1·337818	1·341293	1·344177

Hieraus findet man :

$\frac{1}{n^2} =$	0·56453	0·56387	0·56223	0·56038	0·55873	0·55580	0·55346
-------------------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------

Setzt man die den Strahlen B E H entsprechenden Zahlen in die zu prüfende Formel (55), so erhält man zur Bestimmung der Constanten a_0, a_1, a_2 folgende drei Gleichungen

$$B) \quad 0·56453 = a_0 + \frac{6492304}{10^{12}} a_1 + 15402 \cdot 10^3 a_2$$

$$E) \quad 0·56038 = a_0 + \frac{3775249}{10^{12}} a_1 + 26488 \cdot 10^3 a_2$$

$$H) \quad 0·55346 = a_0 + \frac{2105401}{10^{12}} a_1 + 47496 \cdot 10^3 a_2$$

Hieraus findet man folgende Werthe :

$$\begin{aligned} a_0 &= + 0·56751 \\ a_1 &= + 2713898 \\ a_2 &= - \frac{3·078286}{10^{12}} \end{aligned}$$

Für den Durchgang durch Wasser hat man also :

$$\frac{1}{n^2} = 0·56751 + 2713898 l^2 - \frac{3·078286}{10^{12}} \cdot \frac{1}{l^3}$$

Berechnet man mit dieser Formel die Werthe von $\frac{1}{n^2}$ für sämtliche Strahlen B C D E F G H und vergleicht die Rechnungsergebnisse mit den Beobachtungsergebnissen, so erhält man folgende Tabelle :

	B	C	D	E	F	G	H	
$\frac{1}{n^2}$	Rechnung	0·56453	0·56395	0·56229	0·56038	0·55876	0·55594	0·55346
	Beobachtung	0·56453	0·56387	0·56223	0·56038	0·55873	0·55580	0·55346

Man sieht, dass die Zahlen der Rechnung mit den Zahlen der Beobachtung beinahe identisch sind. Wir dürfen also wohl sagen, dass unsere Theorie mit den Thatsachen gut harmonirt.

DAS FARBENZERSTREUUNGS-VERMÖGEN.

Das Farbenzerstreungsvermögen einer Substanz kann durch den Winkel gemessen werden, welchen die den dunkeln Linien B und H entsprechenden Strahlen zusammen bilden.

Nennen wir l_1, κ_1 und l_2, κ_2 die den Strahlen B und H entsprechenden Wellenlängen und Brechungsverhältnisse, so ist vermöge der Gleichung (50) :

$$\frac{1}{\kappa_1^2} = a_0 + a_1 l_1^2 + \frac{a_2}{l_1^2}$$

$$\frac{1}{\kappa_2^2} = a_0 + a_1 l_2^2 + \frac{a_2}{l_2^2}$$

oder :

$$\frac{1}{\kappa_1} = a_0 \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a_1}{a_0} l_1^2 + \frac{a_2}{a_0} \frac{1}{l_1^2} \right) \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{\kappa_2} = a_0 \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a_1}{a_0} l_2^2 + \frac{a_2}{a_0} \frac{1}{l_2^2} \right) \frac{1}{2}$$

Nennt man α den Winkel des einfallenden Strahles mit dem Einfallslot, α_1, α_2 die Winkel, welche die Strahlen B und H mit dem Einfallslot bilden, so ist :

$$\frac{1}{\kappa_1} = \frac{\sin. \alpha_1}{\sin. \alpha}$$

$$\frac{1}{\kappa_2} = \frac{\sin. \alpha_2}{\sin. \alpha}$$

$$\frac{\sin. \alpha_1}{\sin. \alpha} = a_0 \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a_1}{a_0} l_1^2 + \frac{a_2}{a_0} \frac{1}{l_1^2} \right) \frac{1}{2}$$

$$\frac{\sin. \alpha_2}{\sin. \alpha} = a_0 \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a_1}{a_0} l_2^2 + \frac{a_2}{a_0} \frac{1}{l_2^2} \right) \frac{1}{2}$$

Allein der Betrag der Glieder, welche in den Klammern auf die Einheit folgen, ist gegen die Einheit ungemein klein; man kann daher diese Ausdrücke mittelst der Binomialformel entwickeln und die auf das zweite Glied folgenden Glieder vernachlässigen. Dann findet man :

$$\frac{\sin. \alpha_1 - \sin. \alpha_2}{\sin. \alpha} = n_0 \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \frac{n_1}{n_0} (1_1^2 - 1_2^2) + \frac{1}{2} \frac{n_2}{n_0} \left(\frac{1}{1_1^2} - \frac{1}{1_2^2} \right) \right]$$

Diesen Ausdruck kann man als das Maass des Farbenzerstreuungsvermögens gelten lassen.

Dieser Ausdruck bestimmt nun wiederum einen wesentlichen Unterschied zwischen der Lichttheorie von *Cauchy* und der hier entwickelten. Vermöge der Ausdrücke (49) und (52) ist :

$$\frac{n_1}{n_0} = \frac{1}{(2\pi)^2 G^2} A_0 = \frac{1}{(2\pi)^2 G^2} (\mathfrak{K} + \varepsilon) = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^2 G^2} \left\{ \varepsilon + S m_1 \left[\frac{G(r)}{r} + \frac{1}{r} \frac{d \left(\frac{1}{r} G(r) \right)}{d r} J x^2 \right] \right\}$$

$$\frac{n_2}{n_0} = (2\pi)^2 G^2 \frac{A_1}{A_2^2} = (2\pi)^2 G^2 \frac{\frac{1}{2} S \frac{\mu_1}{r} \left[J(r) + \frac{d \left(\frac{1}{r} J(r) \right)}{d r} J y^2 \right] \frac{J x^4}{1.2.3.4}}{\frac{1}{4} \left\{ S \frac{\mu_1}{r} \left[J(r) + \frac{d \left(\frac{1}{r} J(r) \right)}{d r} J y^2 \right] \frac{J x^2}{1.2} \right\}^2}$$

Für die Theorie von *Cauchy*, welche die Wechselwirkung zwischen den Aether- und Körperatomen nicht berücksichtigt, ist ε und $G(r)$ gleich Null zu setzen, ist daher das mit $\frac{n_1}{n_0}$ multiplizierte Glied ganz wegzulassen, und ist demnach das Farbenzerstreuungsvermögen $\frac{\sin. \alpha_1 - \sin. \alpha_2}{\sin. \alpha}$ von der Natur der Körperatome des brechenden Mediums ganz unabhängig, d. h. *Cauchy's* Theorie gibt für alle Medien einerlei Farbenzerstreuungsvermögen, was der Thatsache grob widerspricht.

Bei unserer Theorie dagegen ist ε und $G(r)$ nicht gleich Null, sondern es hat der Quotient $\frac{n_1}{n_0}$ für jedes besondere brechende Medium einen individuellen Werth, richtet sich also das Farbenzerstreuungsvermögen nach der Natur der brechenden Substanz, wie es die Thatsachen fordern.