Das Dynamiden-System

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1857

A. Körperschwingungen oder Bewegungen der wägbaren Atome

urn:nbn:de:bsz:31-266496

DRITTER ABSCHNITT.

Bewegung eines Dynamidensystems.

A. Körperschwingungen oder Bewegung der wägbaren Atome.

AUFSTELLUNG DER BEWEGUNGSGLEICHUNGEN.

Die Schwingungen der wägbaren Atome sind schon oftmals analytisch behandelt worden, und es ist nicht meine Absicht, zu den schon vorhandenen Behandlungen dieses Gegenstandes eine neue hinzuzufügen; allein die Differenzialgleichungen der Bewegung eines Systems von wägbaren Atomen muss ich dennoch herleiten und aufstellen, theils um zu zeigen, wie diese aus dem Dynamidensystem hervorgehen, insbesondere aber, um den Unterschied zwischen Körper- und Aetherschwingungen klar hervorheben zu können, was bisher noch nicht geschehen ist, und was namentlich auch *Cauchy* nicht gethan hat.

Es ist kaum nothwendig, zu sagen, dass wir nur mässige, d. h. solche Erschütterungen betrachten werden, für welche man, wie schon in der Einleitung, Seite 25, auseinandergesetzt wurde, annehmen darf, dass Aetherschwingungen keine Körperschwingungen, und Körperschwingungen keine Aetherschwingungen hervorrufen.

Wir denken uns also, dass die Körperatome eines Dynamidensystems mit Elastizitätsaxen durch eine äussere Einwirkung in Bewegung gesetzt werden, und legen uns die Aufgabe vor, den Bewegungszustand der Körperatome nach Verlauf einer beliebigen Zeit zu bestimmen.

Die Voraussetzungen, welche wir dabei theils machen müssen, theils machen dürfen, sind folgende.

1. Da wir ein Dynamidensystem mit Elastizitätsaxen voraussetzen, so müssen wir nothwendig die Atome als kleine Körperchen von bestimmter, wenn auch unbekannter Gestalt betrachten, denn nur wenn die Atome axige Gestalt haben und nicht blose Punkte oder Kügelchen sind, kann im Gleichgewichtszustand eine ungleiche Elastizität

nach verschiedenen Richtungen vorhanden sein. *Cauchy* legt seinen Untersuchungen ein aus Körperpunkten bestehendes Medium zu Grunde, nimmt aber gleichwohl an, dass die Elastizität um jeden Punkt herum nach verschiedenen Richtungen verschieden sei. Dies ist ein Widerspruch, ist eine Unmöglichkeit, daher eine schwache Seite von *Cauchy's* Theorie.

2. Da die Masse der Aetheratome einer Hülle gegen die Masse des Kernes verschwindend klein ist, so kann diese Masse der Aetherhüllen als solche die Bewegung der Körperatome nicht merklich alteriren; wir dürfen also die Masse der Aetherhüllen ganz vernachlässigen.

3. Es ist nicht erlaubt, die Kräfte zu vernachlässigen, welche in den Aetheratomen ihren Sitz haben, denn diese Kräfte sind sehr energisch, obgleich die Masse der Aetheratome sehr klein ist. Wir müssen daher für die Kraft, mit welcher irgend eine Dynamide mit ihrem ganzen Kräftesystem auf die Masse eines Körperatoms einwirkt, die Funktion $m m_1 f(r)$ in Rechnung bringen, welche wir in Nr. 55 genauer bestimmt haben. Wollte man die Genauigkeit sehr weit treiben, so müsste man zu dem für $m m f(r)$ gefundenen Ausdruck noch ein Glied hinzufügen, welches von der Form der Körperatome abhinge und überdies noch mit der Richtung von r veränderlich wäre, denn wenn die Körperatome bestimmte Gestalten haben, richtet sich streng genommen die Wechselwirkung zweier Atome nicht nur nach der Entfernung r ihrer Schwerpunkte, sondern auch nach der Gestalt der Atome und nach ihrer Stellung gegen die Linie r.

Hiermit ist nun das Atomsystem, auf welchem die Körperschwingungen beruhen, charakterisirt, und, wie wir in der Folge sehen werden, von dem System, auf welchem die Lichtschwingungen beruhen, wesentlich verschieden.

Wir gehen nun zur Rechnung über.

Um die Position jedes Atoms angeben zu können, legen wir ein rechtwinkliges Coordinatensystem Ox Oy Oz zu Grund.

Es seien für den Gleichgewichtszustand x y z, für den zur Zeit t vorhandenen Bewegungszustand $x+\xi$ $y+\upsilon$ $z+\zeta$ die Coordinaten des Schwerpunktes eines Körperatoms m; ferner für den Gleichgewichtszustand $x+\Delta x$ $y+\Delta y$ $z+\Delta z$ und für den nach Verlauf der Zeit t vorhandenen Bewegungszustand $x+\xi+\Delta(x+\xi)$, $y+\upsilon+\Delta(y+\upsilon)$, $z+\zeta+\Delta(z+\zeta)$ die Coordinaten des Schwerpunktes eines zweiten Körperatoms m_1.

Im Gleichgewichtszustand sind die nach den Richtungen Ox Oy Oz zerlegten Kräfte, mit welchen das Atom m_1 gegen m_1 einwirkt:

$$-m m_1 f(r) \frac{\Delta x}{r} \qquad -m m_1 f(r) \frac{\Delta y}{r} \qquad -m m_1 f(r) \frac{\Delta z}{r}$$

Drei von den Bedingungen des Gleichgewichtes des Atoms m sind daher:

$$\left.\begin{aligned} S\,m\,m_1\,f(r)\,\frac{\varDelta x}{r} &= o \\ S\,m\,m_1\,f(r)\,\frac{\varDelta y}{r} &= o \\ S\,m\,m_1\,f(r)\,\frac{\varDelta z}{r} &= o \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Zur Zeit t sind dagegen die Kräfte, mit welchen das Atom m nach den positiven Richtungen der Axen Ox Oy Oz von allen anderen Dynamiden des Systems zur Bewegung angeregt wird:

$$-\,S\,m\,m_1\,f(r+\varrho)\,\frac{\varDelta x + \varDelta \xi}{r+\varrho} \qquad -\,S\,m\,m_1\,f(r+\varrho)\,\frac{\varDelta y + \varDelta \upsilon}{r+\varrho}$$

$$-\,S\,m\,m_1\,f(r+\varrho)\,\frac{\varDelta z + \varDelta \zeta}{r+\varrho}$$

wobei $r+\varrho$ die Entfernung der Schwerpunkte der Atome m und m_1 zur Zeit t bezeichnet. Zu dieser Zeit t sind ferner diese Kräfte:

$$2\,m\,\frac{d^2\xi}{dt^2} \qquad 2\,m\,\frac{d^2\upsilon}{dt^2} \qquad 2\,m\,\frac{d^2\zeta}{dt^2} \quad {}^{*)}$$

---

*) Ich muss hier bemerken, dass meine Differenzialgleichungen der Bewegung einer Masse von denen anderer Schriftsteller abweichen, weil ich die Masse M eines Körpers nicht durch den Quotienten aus dem Gewicht P des Körpers und der Beschleunigung g durch die Schwere, also nicht durch $\frac{P}{g}$, sondern durch $\frac{P}{2g}$ ausdrücke. Heisst also K eine in Kilogrammen ausgedrückte Kraft, welche auf einen Körper treibend einwirkt, dessen Gewicht P und dessen Masse M ist, so setze ich:

$$M = \frac{P}{2g} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = g\,\frac{K}{P} = \frac{1}{2}\,\frac{K}{M}$$

Zu dieser Abweichung habe ich mich entschlossen, um für das Prinzip der lebendigen Kräfte eine einfache und naturgemässe Ausdrucksweise zu erhalten. Bezeichnet man durch V die Geschwindigkeit, die in einem Körper, dessen Gewicht P ist, eintritt, wenn auf denselben eine constante Kraft K durch einen Weg S einwirkt, so ist nach meiner Bezeichnungsart:

$$K\,s = \frac{P}{2g}\,V^2 = P\,\frac{V^2}{2g} = M\,V^2$$

Ich nenne nun ebenfalls das Produkt MV^2 aus Masse ($M = \frac{P}{2g}$ wie ich sie messe) in das Quadrat der Geschwindigkeit: lebendige Kraft, und das Produkt Ks aus Kraft und Weg: Arbeit oder Wirkung; kann aber nun sagen, dass Arbeit und lebendige Kraft äquivalente Dinge sind.

13

Die Differenzialgleichungen der Bewegung des Atoms m sind demnach:

$$\left.\begin{aligned} 2\frac{d^2\xi}{dt^2} + S\, m_1 f(r+\varrho)\frac{\Delta x + \Delta\xi}{r+\varrho} &= 0 \\ 2\frac{d^2 v}{dt^2} + S\, m_1 f(r+\varrho)\frac{\Delta y + \Delta v}{r+\varrho} &= 0 \\ 2\frac{d^2\zeta}{dt^2} + S\, m_1 f(r+\varrho)\frac{\Delta z + \Delta\zeta}{r+\varrho} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Da wir einen stabilen Gleichgewichtszustand und eine sehr schwache Erschütterung voraussetzen, so werden wir keinen merklichen Fehler begehen, wenn wir $\xi\ v\ \zeta$ und $\Delta\xi\ \Delta v\ \Delta\zeta$ als sehr kleine Grössen ansehen, und uns erlauben, in allen folgenden Rechnungen diejenigen Glieder zu vernachlässigen, welche Produkte aus Potenzen dieser Grössen enthalten. Nun ist:

$$r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$

$$(r+\varrho)^2 = (\Delta x + \Delta\xi)^2 + (\Delta y + \Delta v)^2 + (\Delta z + \Delta\zeta)^2$$

Entwickelt man diese Potenzen, vernachlässigt die Quadrate von $\Delta\xi\ \Delta v\ \Delta\zeta$ und berücksichtigt den Werth von r^2, so folgt:

$$\varrho = \frac{1}{r}(\Delta x\,\Delta\xi + \Delta y\,\Delta v + \Delta z\,\Delta\zeta) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Nach dem Taylor'schen Satz ist ferner, wenn man die Glieder, welche von den zweiten und den höheren Potenzen von ϱ abhängen, vernachlässigt:

$$\frac{f(r+\varrho)}{r+\varrho} = \frac{f(r)}{r} + \frac{d\left(\frac{1}{r}\, f(r)\right)}{dr}\,\varrho \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Führt man diesen Werth von $\frac{f(r+\varrho)}{r+\varrho}$ in die Gleichungen (2) ein, so werden dieselben:

$$\left.\begin{aligned} 2\frac{d^2\xi}{dt^2} + S\, m_1\left[\frac{f(r)}{r} + \frac{d\left(\frac{1}{r}\, f(r)\right)}{dr}\,\varrho\right](\Delta x + \Delta\xi) &= 0 \\ 2\frac{d^2 v}{dt^2} + S\, m_1\left[\frac{f(r)}{r} + \frac{d\left(\frac{1}{r}\, f(r)\right)}{dr}\,\varrho\right](\Delta y + \Delta v) &= 0 \\ 2\frac{d^2\zeta}{dt^2} + S\, m_1\left[\frac{f(r)}{r} + \frac{d\left(\frac{1}{r}\, f(r)\right)}{dr}\,\varrho\right](\Delta z + \Delta\zeta) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Berücksichtigt man die Gleichgewichtsgleichungen (1) und vernachlässigt die Glieder, welche mit $\varrho \varDelta \xi$ $\varrho \varDelta v$ $\varrho \varDelta \zeta$ multiplizirt wären, so findet man:

$$\left.\begin{aligned}
&2\,\frac{d^2 \xi}{d t^2} + S\, m_1 \left[\frac{f(r)}{r}\,\varDelta \xi + \frac{d\left(\frac{1}{r}\, f(r)\right)}{d r}\,\varrho\,\varDelta x\right] = 0 \\
&2\,\frac{d^2 v}{d t^2} + S\, m_1 \left[\frac{f(r)}{r}\,\varDelta v + \frac{d\left(\frac{1}{r}\, f(r)\right)}{d r}\,\varrho\,\varDelta y\right] = 0 \\
&2\,\frac{d^2 \zeta}{d t^2} + S\, m_1 \left[\frac{f(r)}{r}\,\varDelta \zeta + \frac{d\left(\frac{1}{r}\, f(r)\right)}{d r}\,\varrho\,\varDelta z\right] = 0
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (6)$$

Führt man endlich für ϱ den Werth ein, welchen die Gleichung (3) darbietet, und setzt zur Abkürzung:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{A}_2 &= \frac{m_1}{r}\left[f(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r}\, f(r)\right)}{d r}\,\varDelta x^2\right] \\
\mathfrak{B}_2 &= \frac{m_1}{r}\left[f(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r}\, f(r)\right)}{d r}\,\varDelta y^2\right] \\
\mathfrak{C}_2 &= \frac{m_1}{r}\left[f(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r}\, f(r)\right)}{d r}\,\varDelta z^2\right]
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (7)$$

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{D}_2 &= \frac{m_1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\, f(r)\right)}{d r}\,\varDelta y\,\varDelta z \\
\mathfrak{E}_2 &= \frac{m_1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\, f(r)\right)}{d r}\,\varDelta z\,\varDelta x \\
\mathfrak{F}_2 &= \frac{m_1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\, f(r)\right)}{d r}\,\varDelta x\,\varDelta y
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (8)$$

so werden die Gleichungen (6):

$$\left.\begin{aligned}
&2\,\frac{d^2 \xi}{d t^2} + S\,(\mathfrak{A}_2\,\varDelta \xi + \mathfrak{F}_2\,\varDelta v + \mathfrak{E}_2\,\varDelta \zeta) = 0 \\
&2\,\frac{d^2 v}{d t^2} + S\,(\mathfrak{F}_2\,\varDelta \xi + \mathfrak{B}_2\,\varDelta v + \mathfrak{D}_2\,\varDelta \zeta) = 0 \\
&2\,\frac{d^2 \zeta}{d t^2} + S\,(\mathfrak{E}_2\,\varDelta \xi + \mathfrak{D}_2\,\varDelta v + \mathfrak{C}_2\,\varDelta \zeta) = 0
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (9)$$

Dies sind also die Differenzialgleichungen der Bewegung der Körperatome. Sie sind der Form nach identisch mit denjenigen, welche *Cauchy* für ein System von Körperpunkten aufgefunden, aber auch auf Aetherschwingungen angewendet hat, was, wie wir in der Folge sehen werden, ein Missbrauch genannt werden muss.

Ich werde mich mit der Integration dieser Gleichungen aus zwei Gründen nicht befassen; 1) könnte ich, wenn ich diese Integration bewerkstelligen wollte, nichts anderes thun, als dem wohlbekannten, von *Cauchy* gelehrten Weg nachgehen; 2) werde ich in der Folge genöthigt sein, die Differenzialgleichungen, welche ich für die Bewegung des Aethers aufstelle, zu integriren, und die Gleichungen (9) sind, wie sich zeigen wird, der Form nach nur spezielle Fälle von den Aethergleichungen; die Integration dieser letzteren schliesst also auch die Integration der ersteren in sich.

Der Zweck, weshalb ich hier diese Gleichungen für die Bewegung der Körperatome aufgestellt habe, ist, wie gesagt, nur der, um den Unterschied zwischen Aether- und Körperschwingungen klar hervorheben zu können.

Ich will nun noch bemerken, dass die Grössen $\mathfrak{A}_2$ $\mathfrak{B}_2$ $\mathfrak{C}_2$ $\mathfrak{D}_2$ $\mathfrak{E}_2$ $\mathfrak{F}_2$ mit dem Wachsen von r äusserst rasch abnehmen, weil sie theilweise von gegenseitigen Anziehungen der Körperatome abhängen, Anziehungen, welche wahrscheinlich viel rascher abnehmen, als die Abstossungen der Aetheratome.

Um den Gebrauch dieser Bewegungsgleichungen und der im vorigen Abschnitt aufgestellten Gleichgewichtsgleichungen zu erklären, will ich die Schwingungen eines linearen Systems (Saite oder Kette) und die Schwingungen eines ebenen Systems (Membrane) berechnen, werde mich jedoch in die Interpretation der Resultate nicht einlassen, weil es mir nur darum zu thun ist, zu zeigen, wie man und dass man zu richtigen Resultaten gelangt.

SCHWINGUNGEN EINES LINEAREN SYSTEMS ODER EINER VOLLKOMMEN BIEGSAMEN KETTE.

Denken wir uns, eine geradlinige Reihe von Dynamiden werde zuerst ähnlich wie eine Saite durch Kräfte, welche die letzten Dynamiden der Reihe anfassen, gespannt, hierauf aus ihrer gespannten Gleichgewichtslage gebracht und sich selbst überlassen, so werden gewisse Schwingungen entstehen, die wir berechnen wollen.

Lassen wir die Axe der $o\,x$ mit der Dynamidenreihe zusammenfallen, so ist für dieselbe $\Delta y = \Delta z = o$, daher sind die Gleichungen der Bewegung vermöge (9):

$$\left.\begin{aligned}
o &= 2\,\frac{d^2\xi}{dt^2} + S\,\frac{m_1}{r}\left[f(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{dr}\,\Delta x^2\right]\Delta\xi \\
o &= 2\,\frac{d^2 v}{dt^2} + S\,\frac{m_1}{r}\,f(r)\,\Delta v \\
o &= 2\,\frac{d^2\zeta}{dt^2} + S\,\frac{m_1}{r}\,f(r)\,\Delta\zeta
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Die zur Zeit t vorhandenen Verschiebungen $\xi\ \upsilon\ \zeta$ sind gewisse Funktionen von x; wir können daher vermöge des Taylor'schen Satzes annähernd schreiben:

$$\left.\begin{aligned} \varDelta\xi &= \frac{d\,\xi}{d\,x}\varDelta x + \frac{1}{2}\frac{d^2\,\xi}{d\,x^2}\varDelta x^2 \\ \varDelta\upsilon &= \frac{d\,\upsilon}{d\,x}\varDelta x + \frac{1}{2}\frac{d^2\,\upsilon}{d\,x^2}\varDelta x^2 \\ \varDelta\zeta &= \frac{d\,\zeta}{d\,x}\varDelta x + \frac{1}{2}\frac{d^2\,\zeta}{d\,x^2}\varDelta x^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Führt man diese Werthe in (1) ein, so findet man:

$$o = 2\,\frac{d^2\,\xi}{d\,t^2} + S\,\frac{m_1}{r}\left[f(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{d\,r}\varDelta x^2\right]\left(\frac{d\,\xi}{d\,x}\varDelta x + \frac{1}{2}\frac{d^2\,\xi}{d\,x^2}\varDelta x^2\right)$$

$$o = 2\,\frac{d^2\,\upsilon}{d\,t^2} + S\,\frac{m_1}{r}\,f(r)\left(\frac{d\,\upsilon}{d\,x}\varDelta x + \frac{1}{2}\frac{d^2\,\upsilon}{d\,x^2}\varDelta x^2\right)$$

$$o = 2\,\frac{d^2\,\zeta}{d\,t^2} + S\,\frac{m_1}{r}\,f(r)\left(\frac{d\,\zeta}{d\,x}\varDelta x + \frac{1}{2}\frac{d^2\,\zeta}{d\,x^2}\varDelta x^2\right)$$

Berücksichtigt man, dass $S\,m_1\,\frac{f(r)}{r}\varDelta x = o$ ist, so werden diese Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} o &= 2\,\frac{d^2\,\xi}{d\,t^2} + \frac{d^2\,\xi}{d\,x^2}\,S\,\frac{m_1}{2}\left[\frac{f(r)}{r}\varDelta x^2 + \frac{1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{d\,r}\varDelta x^4\right] \\ o &= 2\,\frac{d^2\,\upsilon}{d\,t^2} + \frac{d^2\,\upsilon}{d\,x^2}\,S\,\frac{m_1}{2}\,\frac{f(r)}{r}\varDelta x^2 \\ o &= 2\,\frac{d^2\,\zeta}{d\,t^2} + \frac{d^2\,\zeta}{d\,x^2}\,S\,\frac{m_1}{2}\,\frac{f(r)}{r}\varDelta x^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3)$$

Die in diesen Gleichungen vorkommenden Summen können auf folgende Weise bestimmt werden. Nennen wir $\mathfrak{X}$ die Spannung, p das Gewicht jeder Längeneinheit, l die Länge der Kette zwischen den Angriffspunkten der spannenden Kräfte, so können wir die erste der Gleichungen (17), Seite 76, auf den vorliegenden Fall anwenden, wenn wir in derselben setzen:

$$X = o \qquad \Sigma\, m\, X_2 x_2 = \mathfrak{X}\, l \qquad \Sigma\, m = \frac{l\,p}{2\,g}$$

und dann findet man:

$$\mathfrak{X}\, l + \frac{l p}{2 g}\, S\, \frac{m_1}{2}\, \frac{f(r)}{r}\, \Delta x^2 = 0$$

oder :

$$-S\, \frac{m_1}{2}\, \frac{f(r)}{r}\, \Delta x^2 = \frac{2 g\, \mathfrak{X}}{p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Nun ist vermöge der ersten der Gleichungen (41), Seite 86 :

$$+\mathfrak{E} = -S\, \frac{m_1}{2}\, \frac{1}{r_0}\, \frac{d\left(\frac{1}{r_0}\, f(r_0)\right)}{d\, r_0}\, \Delta x_0^4 = \frac{2 g\, \varepsilon}{p}$$

wobei ε den Modulus der Elastizität für den natürlichen ungespannten Zustand der Kette bedeutet; und weil sich dieser Modulus bei einer schwachen Ausdehnung nur äusserst wenig ändert, so darf man auch setzen :

$$-S\, \frac{m_1}{2}\, \frac{1}{r}\, \frac{d\left(\frac{1}{r}\, f(r)\right)}{d\, r}\, \Delta x^4 = \frac{2 g\, \varepsilon}{p} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Hiermit sind die Werthe der in den Gleichungen (3) vorkommenden Summen bestimmt und man erhält folglich :

$$\left.\begin{aligned} 2\, \frac{d^2 \xi}{d t^2} &= \frac{2 g}{p}\, (\mathfrak{X} + \varepsilon)\, \frac{d^2 \xi}{d x^2} \\ 2\, \frac{d^2 \upsilon}{d t^2} &= \frac{2 g}{p}\, \mathfrak{X}\, \frac{d^2 \upsilon}{d x^2} \\ 2\, \frac{d^2 \zeta}{d t^2} &= \frac{2 g}{p}\, \mathfrak{X}\, \frac{d^2 \zeta}{d x^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Setzen wir zur Abkürzung :

$$\left.\begin{aligned} c &= \sqrt{\frac{g\,(\mathfrak{X} + \varepsilon)}{p}} \\ c_1 &= \sqrt{\frac{g\, \mathfrak{X}}{p}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

so werden die Differenzialgleichungen der Bewegung :

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 \xi}{d t^2} &= c^2\, \frac{d^2 \xi}{d x^2} \\ \frac{d^2 \upsilon}{d t^2} &= c_1^2\, \frac{d^2 \upsilon}{d x^2} \\ \frac{d^2 \zeta}{d t^2} &= c_1^2\, \frac{d^2 \zeta}{d x^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Die erste derselben bestimmt die Längenschwingungen, die letzte die Querschwingungen. Da ihre Formen übereinstimmen, so genügt es, eine derselben, z. B. die erste, zu integriren. Die Integrale der beiden andern Gleichungen ergeben sich dann, wenn man c mit c_1 vertauscht.

Um die erste der Gleichungen (8) zu integriren, versuchen wir durch die Annahme

$$\xi = XT \qquad (9)$$

zu genügen, indem wir voraussetzen, dass X nur eine Funktion von x und T nur eine Funktion von t ist. Unter dieser Voraussetzung ist:

$$\frac{d^2 \xi}{d t^2} = X \frac{d^2 T}{d t^2} \qquad \frac{d^2 \xi}{d x^2} = T \frac{d^2 X}{d x^2}$$

Setzt man diese Werthe in die erste der Gleichungen (8), so wird dieselbe:

$$X \frac{d^2 T}{d t^2} = c^2 \; T \frac{d^2 X}{d x^2}$$

oder:

$$\frac{1}{T} \frac{d^2 T}{d t^2} = c^2 \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{d x^2}$$

Da t und x von einander nicht abhängen, so kann diese Gleichung nur richtig sein, wenn jedes der beiden Glieder gleich ist einer gewissen Constante, die wir mit $-\alpha^2$ bezeichnen wollen. Wir erhalten daher:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 X}{d x^2} + \left(\frac{\alpha}{c}\right)^2 X &= 0 \\ \frac{d^2 T}{d t^2} + \alpha^2 T &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Die Integrale dieser Gleichungen sind:

$$X = \mathfrak{A} \cos. \frac{\alpha x}{c} + \mathfrak{B} \sin. \frac{\alpha x}{c}$$

$$T = \mathfrak{C} \cos. \alpha t + \mathfrak{D} \sin. \alpha t$$

Setzen wir diese Werthe in (9), so folgt:

$$\xi = \left(\mathfrak{A} \cos. \frac{\alpha x}{c} + \mathfrak{B} \sin. \frac{\alpha x}{c}\right) (\mathfrak{C} \cos. \alpha t + \mathfrak{D} \sin. \alpha t) \qquad (11)$$

wobei $\mathfrak{A}\ \mathfrak{B}\ \mathfrak{C}\ \mathfrak{D}\ \alpha$ constante Grössen bezeichnen. Da wir annehmen, dass die Enden des linearen Systems festgehalten werden, so muss sowohl für $x = 0$ als auch für $x = l$ der Werth von ξ verschwinden, wie gross auch t sein mag. Man hat daher:

$$o = \mathfrak{A}\,(\mathfrak{C} \cos. \alpha t + \mathfrak{D} \sin. \alpha t)$$

$$o = \left(\mathfrak{A} \cos. \frac{\alpha l}{c} + \mathfrak{B} \sin. \frac{\alpha l}{c}\right)(\mathfrak{C} \cos. \alpha t + \mathfrak{D} \sin. \alpha t)$$

Diese Gleichungen können für jeden Werth von t nur dann bestehen, wenn

$$\mathfrak{A} = o \qquad\qquad \frac{\alpha l}{c} = i\,\pi$$

ist, wobei i irgend eine ganze Zahl bezeichnet. Hierdurch wird nun der Ausdruck (11)

$$\xi = \left(\mathfrak{C} \cos. \frac{i\,\pi\,c}{l}\,t + \mathfrak{D} \sin. \frac{i\,\pi\,c}{l}\,t\right) \sin. \frac{i\,\pi\,x}{l} \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

Dieser Werth von ξ entspricht sowohl der ersten der Gleichungen (8), als auch der Bedingung, dass die Endpunkte des linearen Systems keine Bewegung machen sollen. Wenn x um $2\,\frac{l}{i}$ zunimmt, ändert sich der Werth von ξ nicht; es ist mithin $2\,\frac{l}{i} = \lambda$ die Wellenlänge. Wenn ferner t um $2\,\frac{l}{i\,c}$ wächst, tritt abermals für ξ der gleiche Werth ein; es ist demnach $2\,\frac{l}{i\,c} = T$ die Zeit einer Schwingung.

Nun ist $\frac{\lambda}{T} = \frac{2\,\frac{l}{i}}{2\,\frac{l}{i\,c}} = c$. Allein dieser Quotient $\frac{\lambda}{T}$ ist nichts anderes als die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, und diese wird also durch die Constante c gemessen. Die Längenschwingungen des linearen Systems werden nun durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$\left.\begin{array}{ll} & \xi = \left(\mathfrak{C} \cos. \frac{i\,\pi\,c}{l}\,t + \mathfrak{D} \sin. \frac{i\,\pi\,c}{l}\,t\right) \sin. \frac{i\,\pi\,x}{l} \\ \text{Wellenlänge} \ldots\ldots\ldots & \lambda = 2\,\frac{l}{i} \\ \text{Schwingungszeit} \ldots\ldots & T = 2\,\frac{l}{i}\sqrt{\frac{p}{g\,(\mathfrak{X} + \varepsilon)}} \\ \text{Fortpflanzungsgeschwindigkeit} & c = \sqrt{\frac{g\,(\mathfrak{X} + \varepsilon)}{p}} \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (13)$$

Die Gesetze der Querschwingungen ergeben sich aus (13), wenn man c mit c_1 vertauscht. Es ist daher für die Querschwingungen:

$$\left.\begin{array}{ll} \upsilon = \zeta = \left(\mathfrak{C}_1 \cos. \frac{i_1 \pi c_1}{l} t + \mathfrak{D}_1 \sin. \frac{i_1 \pi c_1}{l}\right) \sin. \frac{i_1 \pi x}{l} & \\ \text{Wellenlänge} \;\ldots\ldots\ldots\; \lambda_1 = 2 \frac{l}{i_1} & \\ \text{Schwingungszeit} \;\ldots\ldots\; T_1 = 2 \frac{l}{i_1} \sqrt{\frac{p}{g \mathfrak{X}}} & \\ \text{Fortpflanzungsgeschwindigkeit} \;\; c_1 = \sqrt{\frac{g \mathfrak{X}}{p}} & \end{array}\right\} \;\ldots\ldots\; (14)$$

Da die Ausdrücke für c und c_1 weder l noch i und i_1 enthalten, so sind die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten sowohl von der Länge des eingespannten Stückes, als auch von der Theilung der Saite ganz unabhängig. In den Gleichungen (13) kann man sich erlauben, $\mathfrak{X}$ gegen ε zu vernachlässigen, denn die Spannung einer Kette oder Saite ist jederzeit sehr klein gegen den Modulus der Elastizität. So lange also die Spannung ein gewisses Maass nicht überschreitet, sind die Längenschwingungen von der Spannung nicht abhängig.

Die Gleichungen (13) und (14) sind nur partikuläre Integrale der Gleichungen (8); die allgemeinen Integrale wären :

$$\xi = \Sigma \left(\mathfrak{C} \cos. \frac{i \pi c}{l} t + \mathfrak{D} \sin. \frac{i \pi c}{l} t\right) \sin. \frac{i \pi x}{l}$$

$$\upsilon = \zeta = \Sigma \left(\mathfrak{C}_1 \cos. \frac{i_1 \pi c_1}{l} t + \mathfrak{D}_1 \sin. \frac{i_1 \pi c_1}{l} t\right) \sin. \frac{i_1 \pi x}{l}$$

wobei Σ Summenzeichen sind, welche ausdrücken, dass man sowohl für i als auch für i_1 alle ganzen positiven Zahlen von 1 bis ∞ setzen, und die sich hierdurch ergebende Reihe von Gliedern summiren soll.

SCHWINGUNGEN EINES EBENEN DYNAMIDENSYSTEMS ODER EINER MEMBRANE.

Denken wir uns, ein ebenes Dynamidensystem sei ähnlich wie ein Trommelfell nach allen Richtungen gleichmässig gespannt, werde hierauf erschüttert und dann sich selbst überlassen. Die dadurch entstehenden Bewegungen ergeben sich aus den bereits aufgestellten Gleichungen.

Legen wir die Axen $O\,x$ und $O\,y$ in die Ebene des Systems und $O\,z$ senkrecht auf dieselbe, so ist $\Delta z = o$ und die Gleichungen (7), (8), (9), Seite 99, werden :

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{A}_2 &= \frac{m_1}{r}\left[f(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{d\,r}\,\varDelta\,x^2\right] \\
\mathfrak{B}_2 &= \frac{m_1}{r}\left[f(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{d\,r}\,\varDelta\,y^2\right] \\
\mathfrak{C}_2 &= \frac{m_1}{r}\,f(r) \\
\mathfrak{D}_2 &= o \\
\mathfrak{E}_2 &= o \\
\mathfrak{F}_2 &= \frac{m_1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{d\,r}\,\varDelta x\,\varDelta y
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned}
2\,\frac{d^2\,\xi}{d\,t^2} + S\,(\mathfrak{A}_2\,\varDelta\,\xi + \mathfrak{F}_2\,\varDelta\,v) &= o \\
2\,\frac{d^2\,v}{d\,t^2} + S\,(\mathfrak{F}_2\,\varDelta\,\xi + \mathfrak{B}_2\,\varDelta\,v) &= o \\
2\,\frac{d^2\,\zeta}{d\,t^2} + S\,\mathfrak{C}_2\,\varDelta\,\zeta \qquad &= o
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Da die zur Zeit t stattfindenden Verschiebungen $\xi\ v\ \zeta$ Funktionen von x und y sind, so können wir vermöge des Taylor'schen Satzes annähernd schreiben:

$$\left.\begin{aligned}
\varDelta\,\xi &= \frac{d\,\xi}{d\,x}\,\varDelta\,x + \frac{d\,\xi}{d\,y}\,\varDelta\,y + \frac{1}{2}\,\frac{d^2\,\xi}{d\,x^2}\,\varDelta\,x^2 + \frac{d^2\,\xi}{d\,x\,d\,y}\,\varDelta\,x\,\varDelta\,y + \frac{1}{2}\,\frac{d^2\,\xi}{d\,y^2}\,\varDelta\,y^2 \\
\varDelta\,v &= \frac{d\,v}{d\,x}\,\varDelta\,x + \frac{d\,v}{d\,y}\,\varDelta\,y + \frac{1}{2}\,\frac{d^2\,v}{d\,x^2}\,\varDelta\,x^2 + \frac{d^2\,v}{d\,x\,d\,y}\,\varDelta\,x\,\varDelta\,y + \frac{1}{2}\,\frac{d^2\,v}{d\,y^2}\,\varDelta\,y^2 \\
\varDelta\,\zeta &= \frac{d\,\zeta}{d\,x}\,\varDelta\,x + \frac{d\,\zeta}{d\,y}\,\varDelta\,y + \frac{1}{2}\,\frac{d^2\,\zeta}{d\,x^2}\,\varDelta\,x^2 + \frac{d^2\,\zeta}{d\,x\,d\,y}\,\varDelta\,x\,\varDelta\,y + \frac{1}{2}\,\frac{d^2\,\zeta}{d\,y^2}\,\varDelta\,y^2
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Führt man diese Werthe in die Gleichungen (2) ein, berücksichtigt die Ausdrücke (1), berücksichtigt ferner, dass die Differenzialquotienten vor die Summenzeichen gesetzt werden dürfen, und lässt alle Glieder weg, welche ungerade Potenzen von $\varDelta x$ und $\varDelta y$ enthalten, so findet man:

$$\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
2\,\dfrac{d^2\xi}{dt^2}+\dfrac{d^2\xi}{dx^2}\,S\,\dfrac{m_1}{2}\left[\dfrac{f(r)}{r}\,\Delta x^2+\dfrac{1}{r}\,\dfrac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{dr}\,\Delta x^4\right] \\
\qquad+\dfrac{d^2\xi}{dy^2}\,S\,\dfrac{m_1}{2}\left[\dfrac{f(r)}{r}\,\Delta y^2+\dfrac{1}{r}\,\dfrac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{dr}\,\Delta x^2\,\Delta y^2\right] \\
\qquad+2\,\dfrac{d^2\upsilon}{dx\,dy}\,S\,\dfrac{m_1}{2}\,\dfrac{1}{r}\,\dfrac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{dr}\,\Delta x^2\,\Delta y^2
\end{array}\right\}=0 \\[2ex]
\left.\begin{array}{l}
2\,\dfrac{d^2\upsilon}{dt^2}+\dfrac{d^2\upsilon}{dy^2}\,S\,\dfrac{m_1}{2}\left[\dfrac{f(r)}{r}\,\Delta y^2+\dfrac{1}{r}\,\dfrac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{dr}\,\Delta y^4\right] \\
\qquad+\dfrac{d^2\upsilon}{dx^2}\,S\,\dfrac{m_1}{2}\left[\dfrac{f(r)}{r}\,\Delta x^2+\dfrac{1}{r}\,\dfrac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{dr}\,\Delta x^2\,\Delta y^2\right] \\
\qquad+2\,\dfrac{d^2\xi}{dx\,dy}\,S\,\dfrac{m_1}{2}\,\dfrac{1}{r}\,\dfrac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{dr}\,\Delta x^2\,\Delta y^2
\end{array}\right\}=0 \\[2ex]
2\,\dfrac{d^2\zeta}{dt^2}+\dfrac{d^2\zeta}{dx^2}\,S\,\dfrac{m_1}{2}\,\dfrac{f(r)}{r}\,\Delta x^2+\dfrac{d^2\zeta}{dy^2}\,S\,\dfrac{m_1}{2}\,\dfrac{f(r)}{r}\,\Delta y^2=0
\end{array}\right\} \quad (4)$$

Dies sind die Differenzialgleichungen der Bewegung des ebenen Dynamidensystems. Es sind nur Annäherungen, weil in den Ausdrücken (3) nur bis an die dritten Dimensionen von Δx und Δy geschritten wurde.

Die letzte dieser Gleichungen, welche unabhängig von den beiden andern integrirt werden kann, bestimmt die Transversalschwingungen, und mit der Integration dieser Gleichungen wollen wir uns nun beschäftigen.

Wenn wir annehmen, dass die Membrane nach allen Richtungen gleich elastisch und gleich gespannt ist, haben die Summen

$$S\,\frac{m_1}{2}\,\frac{f(r)}{r}\,\Delta x^2 \qquad\qquad S\,\frac{m_1}{r}\,\frac{f(r)}{r}\,\Delta y^2$$

gleiche Werthe, und der Betrag derselben kann vermittelst der Ausdrücke (17), Seite 76, bestimmt werden.

Nehmen wir an, die Begrenzung der Membrane bilde ein Rechteck, dessen Dimensionen l und l_1 sind. Legen wir den Anfangspunkt der Coordinaten in einen Eckpunkt des Rechteckes, die Axe Ox in die Richtung von l, die Axe Oy in die Richtung von l_1 und bezeichnen durch $\mathfrak{S}$ die Kraft, welche auf jede Längeneinheit des Umfangs spannend wirkt, endlich durch p das Gewicht einer Flächeneinheit der Membrane, so ist in die Gleichungen (17), Seite 76, zu setzen:

$$S\,m\,(X x + X_2 x_2) = S\,m\,(Y y + Y_2 y_2) = \mathfrak{S}\, l l_1$$

$$\Sigma m = \frac{l l_1 p}{2 g}$$

und man findet :

$$S\,\frac{m_1}{2}\,\frac{f(r)}{r}\,\Delta x^2 = S\,\frac{m_1}{2}\,\frac{f(r)}{r}\,\Delta y^2 = -\,2 g\,\frac{\mathfrak{S}}{p}$$

Hierdurch wird die letzte der Gleichungen (4) :

$$\frac{d^2 \zeta}{d t^2} = \frac{g \mathfrak{S}}{p}\left(\frac{d^2 \zeta}{d x^2} + \frac{d^2 \zeta}{d y^2}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

oder wenn wir zur Abkürzung setzen :

$$c = \sqrt{\frac{g \mathfrak{S}}{p}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

$$\frac{d^2 \zeta}{d t^2} = c^2 \left(\frac{d^2 \zeta}{d x^2} + \frac{d^2 \zeta}{d y^2}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Es ist leicht einzusehen, dass diese Gleichung nicht nur für eine rechteckige, sondern auch für jede beliebige Begrenzung der Membrane gilt.

Um diese Gleichung zu integriren, versuchen wir zu setzen :

$$\zeta = T X Y \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

wobei T nur t, X nur x, Y nur y enthalten soll. Unter dieser Voraussetzung ist :

$$\frac{d^2 \zeta}{d t^2} = X Y \frac{d^2 T}{d t^2} \qquad \frac{d^2 \zeta}{d x^2} = T Y \frac{d^2 X}{d x^2} \qquad \frac{d^2 \zeta}{d y^2} = T X \frac{d^2 Y}{d y^2}$$

Führt man diese Werthe in (7) ein, so findet man :

$$\frac{1}{T}\,\frac{d^2 T}{d t^2} = c^2 \left(\frac{1}{X}\,\frac{d^2 X}{d x^2} + \frac{1}{Y}\,\frac{d^2 Y}{d y^2}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

Da x, y und t von einander ganz unabhängig sind, so kann diese Gleichung nur bestehen, wenn jedes ihrer Glieder einen constanten Werth hat. Diese Gleichung wird also entsprechen, wenn wir nehmen :

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{T}\,\frac{d^2 T}{d t^2} &= -\,\alpha^2 \\ c^2\,\frac{1}{X}\,\frac{d^2 X}{d x^2} &= -\,\beta^2 \\ c^2\,\frac{1}{Y}\,\frac{d^2 Y}{d y^2} &= -\,\gamma^2 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

wobei $\alpha\ \beta\ \gamma$ Constante sind, zwischen denen jedoch die Beziehung besteht:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Die Integrale der Gleichungen (10) sind:

$$\left.\begin{aligned} T &= \mathfrak{A} \sin.\ \alpha t + \mathfrak{B} \cos.\ \alpha t \\ X &= \mathfrak{C} \sin.\ \frac{\beta}{c} x + \mathfrak{D} \cos.\ \frac{\beta}{c} x \\ Y &= \mathfrak{D} \sin.\ \frac{\beta_1}{c} y + \mathfrak{F} \cos.\ \frac{\beta_1}{c} y \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Setzt man diese Werthe in (8), so findet man:

$$\zeta = (\mathfrak{A} \sin.\ \alpha t + \mathfrak{B} \cos.\ \alpha t) \left(\mathfrak{C} \sin.\ \frac{\beta}{c} x + \mathfrak{D} \cos.\ \frac{\beta}{c} x\right) \left(\mathfrak{C} \sin.\ \frac{\beta_1}{c} y + \mathfrak{F} \cos.\ \frac{\beta_1}{c} y\right) \quad (13)$$

Dieser Werth von ζ ist jedoch nicht das allgemeine Integrale der Gleichung (7), sondern nur ein partikuläres.

Wenden wir den Ausdruck (13) auf den Fall an, wenn die Membrane über einen rechteckigen Rahmen gespannt ist, dann muss sein:

1. für $x = o$ $\zeta = o$ für jeden Werth von t und y; folglich ist zu setzen $\mathfrak{D} = o$;
2. für $y = o$ $\zeta = o$ für jeden Werth von t und x; folglich ist zu nehmen $\mathfrak{F} = o$;
3. für $x = l$ $\zeta = o$ für jeden Werth von t und y; folglich ist zu setzen $\sin.\ \frac{\beta}{c} l = o$ oder $\frac{\beta}{c} l = i\pi$, wobei i irgend eine ganze Zahl bezeichnet;
4. für $y = l_1$ $\zeta = o$ für jeden Werth von t und x; demnach hat man $\sin.\ \frac{\beta_1}{c} l_1 = o$ oder $\frac{\beta_1}{c} l_1 = i_1 \pi$, wobei i_1 abermals irgend eine ganze Zahl ist.

Vermöge dieser Bestimmungen findet man nun mit Berücksichtigung der Beziehung (11):

$$\zeta = \left\{\begin{aligned} & \mathfrak{A} \sin.\ \left[\pi c \sqrt{\left(\frac{i}{l}\right)^2 + \left(\frac{i_1}{l_1}\right)^2}\ t\right] \\ + & \mathfrak{B} \cos.\ \left[\pi c \sqrt{\left(\frac{i}{l}\right)^2 + \left(\frac{i_1}{l_1}\right)^2}\ t\right] \end{aligned}\right\} \sin.\ \frac{i \pi x}{l} \sin.\ \frac{i_1 \pi y}{l_1} \quad \ldots \quad (14)$$

Dieser Ausdruck bestimmt nur einen speziellen Schwingungszustand einer über einen rechteckigen Rahmen gespannten Membrane.

Für den allgemeinsten Schwingungszustand hätte man:

$$\zeta = \Sigma\Sigma \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{A} \sin. \left[\pi c \sqrt{\left(\frac{i}{l}\right)^2 + \left(\frac{i_1}{l_1}\right)^2}\, t \right] \\ + \mathfrak{B} \cos. \left[\pi c \sqrt{\left(\frac{i}{l}\right)^2 + \left(\frac{i_1}{l_1}\right)^2}\, t \right] \end{array} \right\} \sin. \frac{i \pi x}{l} \sin. \frac{i_1 \pi y}{l_1} \quad . \quad . \quad (15)$$

wobei sich die Summen $\Sigma\,\Sigma$ auf alle möglichen ganzen positiven Werthe von i und i_1 beziehen.

In die Interpretation der Gleichung (14) will ich mich nicht einlassen; man kann hierüber in *Lamé*, „Théorie de l'élasticité," pag. 116, nachsehen.