Das Dynamiden-System

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1857

Dritter Abschnitt. Bewegung eines Dynamidensystems

urn:nbn:de:bsz:31-266496

DRITTER ABSCHNITT.

Bewegung eines Dynamidensystems.

A. Körperschwingungen oder Bewegung der wägbaren Atome.

AUFSTELLUNG DER BEWEGUNGSGLEICHUNGEN.

Die Schwingungen der wägbaren Atome sind schon oftmals analytisch behandelt worden, und es ist nicht meine Absicht, zu den schon vorhandenen Behandlungen dieses Gegenstandes eine neue hinzuzufügen; allein die Differenzialgleichungen der Bewegung eines Systems von wägbaren Atomen muss ich dennoch herleiten und aufstellen, theils um zu zeigen, wie diese aus dem Dynamidensystem hervorgehen, insbesondere aber, um den Unterschied zwischen Körper- und Aetherschwingungen klar hervorheben zu können, was bisher noch nicht geschehen ist, und was namentlich auch *Cauchy* nicht gethan hat.

Es ist kaum nothwendig, zu sagen, dass wir nur mässige, d. h. solche Erschütterungen betrachten werden, für welche man, wie schon in der Einleitung, Seite 25, auseinandergesetzt wurde, annehmen darf, dass Aetherschwingungen keine Körperschwingungen, und Körperschwingungen keine Aetherschwingungen hervorrufen.

Wir denken uns also, dass die Körperatome eines Dynamidensystems mit Elastizitätsaxen durch eine äussere Einwirkung in Bewegung gesetzt werden, und legen uns die Aufgabe vor, den Bewegungszustand der Körperatome nach Verlauf einer beliebigen Zeit zu bestimmen.

Die Voraussetzungen, welche wir dabei theils machen müssen, theils machen dürfen, sind folgende.

1. Da wir ein Dynamidensystem mit Elastizitätsaxen voraussetzen, so müssen wir nothwendig die Atome als kleine Körperchen von bestimmter, wenn auch unbekannter Gestalt betrachten, denn nur wenn die Atome axige Gestalt haben und nicht blose Punkte oder Kügelchen sind, kann im Gleichgewichtszustand eine ungleiche Elastizität

nach verschiedenen Richtungen vorhanden sein. *Cauchy* legt seinen Untersuchungen ein aus Körperpunkten bestehendes Medium zu Grunde, nimmt aber gleichwohl an, dass die Elastizität um jeden Punkt herum nach verschiedenen Richtungen verschieden sei. Dies ist ein Widerspruch, ist eine Unmöglichkeit, daher eine schwache Seite von *Cauchy's* Theorie.

2. Da die Masse der Aetheratome einer Hülle gegen die Masse des Kernes verschwindend klein ist, so kann diese Masse der Aetherhüllen als solche die Bewegung der Körperatome nicht merklich alteriren; wir dürfen also die Masse der Aetherhüllen ganz vernachlässigen.

3. Es ist nicht erlaubt, die Kräfte zu vernachlässigen, welche in den Aetheratomen ihren Sitz haben, denn diese Kräfte sind sehr energisch, obgleich die Masse der Aetheratome sehr klein ist. Wir müssen daher für die Kraft, mit welcher irgend eine Dynamide mit ihrem ganzen Kräftesystem auf die Masse eines Körperatoms einwirkt, die Funktion $m m_1 f(r)$ in Rechnung bringen, welche wir in Nr. 55 genauer bestimmt haben. Wollte man die Genauigkeit sehr weit treiben, so müsste man zu dem für $m m f(r)$ gefundenen Ausdruck noch ein Glied hinzufügen, welches von der Form der Körperatome abhinge und überdies noch mit der Richtung von r veränderlich wäre, denn wenn die Körperatome bestimmte Gestalten haben, richtet sich streng genommen die Wechselwirkung zweier Atome nicht nur nach der Entfernung r ihrer Schwerpunkte, sondern auch nach der Gestalt der Atome und nach ihrer Stellung gegen die Linie r.

Hiermit ist nun das Atomsystem, auf welchem die Körperschwingungen beruhen, charakterisirt, und, wie wir in der Folge sehen werden, von dem System, auf welchem die Lichtschwingungen beruhen, wesentlich verschieden.

Wir gehen nun zur Rechnung über.

Um die Position jedes Atoms angeben zu können, legen wir ein rechtwinkliges Coordinatensystem $Ox \quad Oy \quad Oz$ zu Grund.

Es seien für den Gleichgewichtszustand $x \; y \; z$, für den zur Zeit t vorhandenen Bewegungszustand $x+\xi \quad y+v \quad z+\zeta$ die Coordinaten des Schwerpunktes eines Körperatoms m; ferner für den Gleichgewichtszustand $x+\Delta x \quad y+\Delta y \quad z+\Delta z$ und für den nach Verlauf der Zeit t vorhandenen Bewegungszustand $x+\xi+\Delta(x+\xi)$, $y+v+\Delta(y+v)$, $z+\zeta+\Delta(z+\zeta)$ die Coordinaten des Schwerpunktes eines zweiten Körperatoms m_1.

Im Gleichgewichtszustand sind die nach den Richtungen $Ox \quad Oy \quad Oz$ zerlegten Kräfte, mit welchen das Atom m_1 gegen m_1 einwirkt:

$$-m m_1 f(r) \frac{\Delta x}{r} \qquad -m m_1 f(r) \frac{\Delta y}{r} \qquad -m m_1 f(r) \frac{\Delta z}{r}$$

Drei von den Bedingungen des Gleichgewichtes des Atoms m sind daher:

$$\left.\begin{aligned} S\, m\, m_1\, f(r)\, \frac{\Delta x}{r} &= 0 \\ S\, m\, m_1\, f(r)\, \frac{\Delta y}{r} &= 0 \\ S\, m\, m_1\, f(r)\, \frac{\Delta z}{r} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Zur Zeit t sind dagegen die Kräfte, mit welchen das Atom m nach den positiven Richtungen der Axen Ox Oy Oz von allen anderen Dynamiden des Systems zur Bewegung angeregt wird:

$$- S\, m\, m_1\, f(r+\varrho)\, \frac{\Delta x + \Delta \xi}{r+\varrho} \qquad - S\, m\, m_1\, f(r+\varrho)\, \frac{\Delta y + \Delta v}{r+\varrho}$$

$$- S\, m\, m_1\, f(r+\varrho)\, \frac{\Delta z + \Delta \zeta}{r+\varrho}$$

wobei $r+\varrho$ die Entfernung der Schwerpunkte der Atome m und m_1 zur Zeit t bezeichnet. Zu dieser Zeit t sind ferner diese Kräfte:

$$2\, m\, \frac{d^2 \xi}{dt^2} \qquad 2\, m\, \frac{d^2 v}{dt^2} \qquad 2\, m\, \frac{d^2 \zeta}{dt^2} \quad ^{*})$$

---

*) Ich muss hier bemerken, dass meine Differenzialgleichungen der Bewegung einer Masse von denen anderer Schriftsteller abweichen, weil ich die Masse M eines Körpers nicht durch den Quotienten aus dem Gewicht P des Körpers und der Beschleunigung g durch die Schwere, also nicht durch $\frac{P}{g}$, sondern durch $\frac{P}{2g}$ ausdrücke. Heisst also K eine in Kilogrammen ausgedrückte Kraft, welche auf einen Körper treibend einwirkt, dessen Gewicht P und dessen Masse M ist, so setze ich:

$$M = \frac{P}{2g} \qquad \frac{d^2 x}{dt^2} = g\, \frac{K}{P} = \frac{1}{2}\, \frac{K}{M}$$

Zu dieser Abweichung habe ich mich entschlossen, um für das Prinzip der lebendigen Kräfte eine einfache und naturgemässe Ausdrucksweise zu erhalten. Bezeichnet man durch V die Geschwindigkeit, die in einem Körper, dessen Gewicht P ist, eintritt, wenn auf denselben eine constante Kraft K durch einen Weg S einwirkt, so ist nach meiner Bezeichnungsart:

$$K s = \frac{P}{2g}\, V^2 = P\, \frac{V^2}{2g} = M V^2$$

Ich nenne nun ebenfalls das Produkt $M V^2$ aus Masse ($M = \frac{P}{2g}$ wie ich sie messe) in das Quadrat der Geschwindigkeit: lebendige Kraft, und das Produkt $K s$ aus Kraft und Weg: Arbeit oder Wirkung; kann aber nun sagen, dass Arbeit und lebendige Kraft äquivalente Dinge sind.

Die Differenzialgleichungen der Bewegung des Atoms m sind demnach:

$$\left.\begin{aligned} 2\frac{d^2\xi}{dt^2} + S\,m_1 f(r+\varrho)\frac{\varDelta x+\varDelta\xi}{r+\varrho} &= 0 \\ 2\frac{d^2 v}{dt^2} + S\,m_1 f(r+\varrho)\frac{\varDelta y+\varDelta v}{r+\varrho} &= 0 \\ 2\frac{d^2\zeta}{dt^2} + S\,m_1 f(r+\varrho)\frac{\varDelta z+\varDelta\zeta}{r+\varrho} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Da wir einen stabilen Gleichgewichtszustand und eine sehr schwache Erschütterung voraussetzen, so werden wir keinen merklichen Fehler begehen, wenn wir $\xi\ v\ \zeta$ und $\varDelta\xi\ \varDelta v\ \varDelta\zeta$ als sehr kleine Grössen ansehen, und uns erlauben, in allen folgenden Rechnungen diejenigen Glieder zu vernachlässigen, welche Produkte aus Potenzen dieser Grössen enthalten. Nun ist:

$$r^2 = \varDelta x^2 + \varDelta y^2 + \varDelta z^2$$

$$(r+\varrho)^2 = (\varDelta x + \varDelta\xi)^2 + (\varDelta y + \varDelta v)^2 + (\varDelta z + \varDelta\zeta)^2$$

Entwickelt man diese Potenzen, vernachlässigt die Quadrate von $\varDelta\xi\ \varDelta v\ \varDelta\zeta$ und berücksichtigt den Werth von r^2, so folgt:

$$\varrho = \frac{1}{r}\left(\varDelta x\,\varDelta\xi + \varDelta y\,\varDelta v + \varDelta z\,\varDelta\zeta\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Nach dem Taylor'schen Satz ist ferner, wenn man die Glieder, welche von den zweiten und den höheren Potenzen von ϱ abhängen, vernachlässigt:

$$\frac{f(r+\varrho)}{r+\varrho} = \frac{f(r)}{r} + \frac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{dr}\,\varrho \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Führt man diesen Werth von $\frac{f(r+\varrho)}{r+\varrho}$ in die Gleichungen (2) ein, so werden dieselben:

$$\left.\begin{aligned} 2\frac{d^2\xi}{dt^2} + S\,m_1\left[\frac{f(r)}{r} + \frac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{dr}\,\varrho\right](\varDelta x+\varDelta\xi) &= 0 \\ 2\frac{d^2 v}{dt^2} + S\,m_1\left[\frac{f(r)}{r} + \frac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{dr}\,\varrho\right](\varDelta y+\varDelta v) &= 0 \\ 2\frac{d^2\zeta}{dt^2} + S\,m_1\left[\frac{f(r)}{r} + \frac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{dr}\,\varrho\right](\varDelta z+\varDelta\zeta) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Berücksichtigt man die Gleichgewichtsgleichungen (1) und vernachlässigt die Glieder, welche mit $\varrho\,\varDelta\xi\quad\varrho\,\varDelta v\quad\varrho\,\varDelta\zeta$ multiplizirt wären, so findet man:

$$\left.\begin{aligned}
&2\,\frac{d^2\xi}{dt^2}+S\,m_1\left[\frac{f(r)}{r}\,\varDelta\xi+\frac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{dr}\,\varrho\,\varDelta x\right]=o\\
&2\,\frac{d^2 v}{dt^2}+S\,m_1\left[\frac{f(r)}{r}\,\varDelta v+\frac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{dr}\,\varrho\,\varDelta y\right]=o\\
&2\,\frac{d^2\zeta}{dt^2}+S\,m_1\left[\frac{f(r)}{r}\,\varDelta\zeta+\frac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{dr}\,\varrho\,\varDelta z\right]=o
\end{aligned}\right\}\;\ldots\ldots\;(6)$$

Führt man endlich für ϱ den Werth ein, welchen die Gleichung (3) darbietet, und setzt zur Abkürzung:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{A}_2&=\frac{m_1}{r}\left[f(r)+\frac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{dr}\,\varDelta x^2\right]\\
\mathfrak{B}_2&=\frac{m_1}{r}\left[f(r)+\frac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{dr}\,\varDelta y^2\right]\\
\mathfrak{C}_2&=\frac{m_1}{r}\left[f(r)+\frac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{dr}\,\varDelta z^2\right]
\end{aligned}\right\}\;\ldots\ldots\;(7)$$

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{D}_2&=\frac{m_1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{dr}\,\varDelta y\,\varDelta z\\
\mathfrak{E}_2&=\frac{m_1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{dr}\,\varDelta z\,\varDelta x\\
\mathfrak{F}_2&=\frac{m_1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{dr}\,\varDelta x\,\varDelta y
\end{aligned}\right\}\;\ldots\ldots\;(8)$$

so werden die Gleichungen (6):

$$\left.\begin{aligned}
&2\,\frac{d^2\xi}{dt^2}+S\,(\mathfrak{A}_2\,\varDelta\xi+\mathfrak{F}_2\,\varDelta v+\mathfrak{E}_2\,\varDelta\zeta)=o\\
&2\,\frac{d^2 v}{dt^2}+S\,(\mathfrak{F}_2\,\varDelta\xi+\mathfrak{B}_2\,\varDelta v+\mathfrak{D}_2\,\varDelta\zeta)=o\\
&2\,\frac{d^2\zeta}{dt^2}+S\,(\mathfrak{E}_2\,\varDelta\xi+\mathfrak{D}_2\,\varDelta v+\mathfrak{C}_2\,\varDelta\zeta)=o
\end{aligned}\right\}\;\ldots\ldots\;(9)$$

Dies sind also die Differenzialgleichungen der Bewegung der Körperatome. Sie sind der Form nach identisch mit denjenigen, welche *Cauchy* für ein System von Körperpunkten aufgefunden, aber auch auf Aetherschwingungen angewendet hat, was, wie wir in der Folge sehen werden, ein Missbrauch genannt werden muss.

Ich werde mich mit der Integration dieser Gleichungen aus zwei Gründen nicht befassen; 1) könnte ich, wenn ich diese Integration bewerkstelligen wollte, nichts anderes thun, als dem wohlbekannten, von *Cauchy* gelehrten Weg nachgehen; 2) werde ich in der Folge genöthigt sein, die Differenzialgleichungen, welche ich für die Bewegung des Aethers aufstelle, zu integriren, und die Gleichungen (9) sind, wie sich zeigen wird, der Form nach nur spezielle Fälle von den Aethergleichungen; die Integration dieser letzteren schliesst also auch die Integration der ersteren in sich.

Der Zweck, weshalb ich hier diese Gleichungen für die Bewegung der Körperatome aufgestellt habe, ist, wie gesagt, nur der, um den Unterschied zwischen Aether- und Körperschwingungen klar hervorheben zu können.

Ich will nun noch bemerken, dass die Grössen $\mathfrak{A}_2$ $\mathfrak{B}_2$ $\mathfrak{C}_2$ $\mathfrak{D}_2$ $\mathfrak{E}_2$ $\mathfrak{F}_2$ mit dem Wachsen von r äusserst rasch abnehmen, weil sie theilweise von gegenseitigen Anziehungen der Körperatome abhängen, Anziehungen, welche wahrscheinlich viel rascher abnehmen, als die Abstossungen der Aetheratome.

Um den Gebrauch dieser Bewegungsgleichungen und der im vorigen Abschnitt aufgestellten Gleichgewichtsgleichungen zu erklären, will ich die Schwingungen eines linearen Systems (Saite oder Kette) und die Schwingungen eines ebenen Systems (Membrane) berechnen, werde mich jedoch in die Interpretation der Resultate nicht einlassen, weil es mir nur darum zu thun ist, zu zeigen, wie man und dass man zu richtigen Resultaten gelangt.

SCHWINGUNGEN EINES LINEAREN SYSTEMS ODER EINER VOLLKOMMEN BIEGSAMEN KETTE.

Denken wir uns, eine geradlinige Reihe von Dynamiden werde zuerst ähnlich wie eine Saite durch Kräfte, welche die letzten Dynamiden der Reihe anfassen, gespannt, hierauf aus ihrer gespannten Gleichgewichtslage gebracht und sich selbst überlassen, so werden gewisse Schwingungen entstehen, die wir berechnen wollen.

Lassen wir die Axe der $o\,x$ mit der Dynamidenreihe zusammenfallen, so ist für dieselbe $\varDelta y = \varDelta z = o$, daher sind die Gleichungen der Bewegung vermöge (9):

$$\left.\begin{aligned} o &= 2\,\frac{d^2 \xi}{d t^2} + S\,\frac{m_1}{r}\left[f(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{d r}\,\varDelta x^2\right]\varDelta \xi \\ o &= 2\,\frac{d^2 v}{d t^2} + S\,\frac{m_1}{r}\,f(r)\,\varDelta v \\ o &= 2\,\frac{d^2 \zeta}{d t^2} + S\,\frac{m_1}{r}\,f(r)\,\varDelta \zeta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Die zur Zeit t vorhandenen Verschiebungen $\xi\ \upsilon\ \zeta$ sind gewisse Funktionen von x; wir können daher vermöge des Taylor'schen Satzes annähernd schreiben:

$$\left.\begin{aligned} \varDelta\xi &= \frac{d\,\xi}{d\,x}\varDelta x + \frac{1}{2}\frac{d^2\xi}{d\,x^2}\varDelta x^2 \\ \varDelta\upsilon &= \frac{d\,\upsilon}{d\,x}\varDelta x + \frac{1}{2}\frac{d^2\upsilon}{d\,x^2}\varDelta x^2 \\ \varDelta\zeta &= \frac{d\,\zeta}{d\,x}\varDelta x + \frac{1}{2}\frac{d^2\zeta}{d\,x^2}\varDelta x^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Führt man diese Werthe in (1) ein, so findet man:

$$o = 2\frac{d^2\xi}{d\,t^2} + S\,\frac{m_1}{r}\left[f(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r}f(r)\right)}{d\,r}\varDelta x^2\right]\left(\frac{d\,\xi}{d\,x}\varDelta x + \frac{1}{2}\frac{d^2\xi}{d\,x^2}\varDelta x^2\right)$$

$$o = 2\frac{d^2\upsilon}{d\,t^2} + S\,\frac{m_1}{r}f(r)\left(\frac{d\,\upsilon}{d\,x}\varDelta x + \frac{1}{2}\frac{d^2\upsilon}{d\,x^2}\varDelta x^2\right)$$

$$o = 2\frac{d^2\zeta}{d\,t^2} + S\,\frac{m_1}{r}f(r)\left(\frac{d\,\zeta}{d\,x}\varDelta x + \frac{1}{2}\frac{d^2\zeta}{d\,x^2}\varDelta x^2\right)$$

Berücksichtigt man, dass $S\,m_1\,\frac{f(r)}{r}\varDelta x = o$ ist, so werden diese Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} o &= 2\frac{d^2\xi}{d\,t^2} + \frac{d^2\xi}{d\,x^2}\,S\,\frac{m_1}{2}\left[\frac{f(r)}{r}\varDelta x^2 + \frac{1}{r}\frac{d\left(\frac{1}{r}f(r)\right)}{d\,r}\varDelta x^4\right] \\ o &= 2\frac{d^2\upsilon}{d\,t^2} + \frac{d^2\upsilon}{d\,x^2}\,S\,\frac{m_1}{2}\frac{f(r)}{r}\varDelta x^2 \\ o &= 2\frac{d^2\zeta}{d\,t^2} + \frac{d^2\zeta}{d\,x^2}\,S\,\frac{m_1}{2}\frac{f(r)}{r}\varDelta x^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3)$$

Die in diesen Gleichungen vorkommenden Summen können auf folgende Weise bestimmt werden. Nennen wir $\mathfrak{X}$ die Spannung, p das Gewicht jeder Längeneinheit, l die Länge der Kette zwischen den Angriffspunkten der spannenden Kräfte, so können wir die erste der Gleichungen (17), Seite 76, auf den vorliegenden Fall anwenden, wenn wir in derselben setzen:

$$X = o \qquad \Sigma\,m\,X_2 x_2 = \mathfrak{X}\,l \qquad \Sigma\,m = \frac{l\,p}{2\,g}$$

und dann findet man:

$$\mathfrak{T}\, l + \frac{l p}{2 g}\, S\, \frac{m_1}{2}\, \frac{f(r)}{r}\, \Delta x^2 = 0$$

oder :

$$- S\, \frac{m_1}{2}\, \frac{f(r)}{r}\, \Delta x^2 = \frac{2 g\, \mathfrak{T}}{p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Nun ist vermöge der ersten der Gleichungen (41), Seite 86 :

$$+ \mathfrak{E} = - S\, \frac{m_1}{2}\, \frac{1}{r_0}\, \frac{d\left(\frac{1}{r_0}\, f(r_0)\right)}{d r_0}\, \Delta x_0^4 = \frac{2 g\, \varepsilon}{p}$$

wobei ε den Modulus der Elastizität für den natürlichen ungespannten Zustand der Kette bedeutet; und weil sich dieser Modulus bei einer schwachen Ausdehnung nur äusserst wenig ändert, so darf man auch setzen :

$$- S\, \frac{m_1}{2}\, \frac{1}{r}\, \frac{d\left(\frac{1}{r}\, f(r)\right)}{d r}\, \Delta x^4 = \frac{2 g\, \varepsilon}{p} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Hiermit sind die Werthe der in den Gleichungen (3) vorkommenden Summen bestimmt und man erhält folglich :

$$\left.\begin{aligned} 2\, \frac{d^2 \xi}{d t^2} &= \frac{2 g}{p}\, (\mathfrak{T} + \varepsilon)\, \frac{d^2 \xi}{d x^2} \\ 2\, \frac{d^2 \upsilon}{d t^2} &= \frac{2 g}{p}\, \mathfrak{T}\, \frac{d^2 \upsilon}{d x^2} \\ 2\, \frac{d^2 \zeta}{d t^2} &= \frac{2 g}{p}\, \mathfrak{T}\, \frac{d^2 \zeta}{d x^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Setzen wir zur Abkürzung :

$$\left.\begin{aligned} c &= \sqrt{\frac{g\,(\mathfrak{T} + \varepsilon)}{p}} \\ c_1 &= \sqrt{\frac{g\, \mathfrak{T}}{p}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

so werden die Differenzialgleichungen der Bewegung :

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 \xi}{d t^2} &= c^2\, \frac{d^2 \xi}{d x^2} \\ \frac{d^2 \upsilon}{d t^2} &= c_1^2\, \frac{d^2 \upsilon}{d x^2} \\ \frac{d^2 \zeta}{d t^2} &= c_1^2\, \frac{d^2 \zeta}{d x^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Die erste derselben bestimmt die Längenschwingungen, die letzte die Querschwingungen. Da ihre Formen übereinstimmen, so genügt es, eine derselben, z. B. die erste, zu integriren. Die Integrale der beiden andern Gleichungen ergeben sich dann, wenn man c mit c_1 vertauscht.

Um die erste der Gleichungen (8) zu integriren, versuchen wir durch die Annahme

$$\xi = XT \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

zu genügen, indem wir voraussetzen, dass X nur eine Funktion von x und T nur eine Funktion von t ist. Unter dieser Voraussetzung ist:

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = X \frac{d^2 T}{dt^2} \qquad \frac{d^2 \xi}{dx^2} = T \frac{d^2 X}{dx^2}$$

Setzt man diese Werthe in die erste der Gleichungen (8), so wird dieselbe:

$$X \frac{d^2 T}{dt^2} = c^2 \; T \frac{d^2 X}{dx^2}$$

oder:

$$\frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = c^2 \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2}$$

Da t und x von einander nicht abhängen, so kann diese Gleichung nur richtig sein, wenn jedes der beiden Glieder gleich ist einer gewissen Constante, die wir mit $-\alpha^2$ bezeichnen wollen. Wir erhalten daher:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d^2 X}{dx^2} + \left(\dfrac{\alpha}{c}\right)^2 X = 0 \\[2ex] \dfrac{d^2 T}{dt^2} + \alpha^2 T \quad = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

Die Integrale dieser Gleichungen sind:

$$X = \mathfrak{A} \cos. \frac{\alpha x}{c} + \mathfrak{B} \sin. \frac{\alpha x}{c}$$

$$T = \mathfrak{C} \cos. \alpha t + \mathfrak{D} \sin. \alpha t$$

Setzen wir diese Werthe in (9), so folgt:

$$\xi = \left(\mathfrak{A} \cos. \frac{\alpha x}{c} + \mathfrak{B} \sin. \frac{\alpha x}{c}\right) (\mathfrak{C} \cos. \alpha t + \mathfrak{D} \sin. \alpha t) \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

wobei $\mathfrak{A}\ \mathfrak{B}\ \mathfrak{C}\ \mathfrak{D}\ \alpha$ constante Grössen bezeichnen. Da wir annehmen, dass die Enden des linearen Systems festgehalten werden, so muss sowohl für $x = 0$ als auch für $x = l$ der Werth von ξ verschwinden, wie gross auch t sein mag. Man hat daher:

$$o = \mathfrak{A}\,(\mathfrak{C} \cos.\alpha t + \mathfrak{D} \sin.\alpha t)$$

$$o = \left(\mathfrak{A} \cos.\frac{\alpha l}{c} + \mathfrak{B} \sin.\frac{\alpha l}{c}\right)(\mathfrak{C} \cos.\alpha t + \mathfrak{D} \sin.\alpha t)$$

Diese Gleichungen können für jeden Werth von t nur dann bestehen, wenn

$$\mathfrak{A} = o \qquad \frac{\alpha l}{c} = i\pi$$

ist, wobei i irgend eine ganze Zahl bezeichnet. Hierdurch wird nun der Ausdruck (11)

$$\xi = \left(\mathfrak{C} \cos.\frac{i\pi c}{l}t + \mathfrak{D} \sin.\frac{i\pi c}{l}t\right) \sin.\frac{i\pi x}{l} \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

Dieser Werth von ξ entspricht sowohl der ersten der Gleichungen (8), als auch der Bedingung, dass die Endpunkte des linearen Systems keine Bewegung machen sollen. Wenn x um $2\frac{l}{i}$ zunimmt, ändert sich der Werth von ξ nicht; es ist mithin $2\frac{l}{i} = \lambda$ die Wellenlänge. Wenn ferner t um $2\frac{l}{ic}$ wächst, tritt abermals für ξ der gleiche Werth ein; es ist demnach $2\frac{l}{ic} = T$ die Zeit einer Schwingung.

Nun ist $\frac{\lambda}{T} = \frac{2\frac{l}{i}}{2\frac{l}{ic}} = c$. Allein dieser Quotient $\frac{\lambda}{T}$ ist nichts anderes als die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, und diese wird also durch die Constante c gemessen. Die Längenschwingungen des linearen Systems werden nun durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$\left.\begin{array}{ll} & \xi = \left(\mathfrak{C} \cos.\frac{i\pi c}{l}t + \mathfrak{D} \sin.\frac{i\pi c}{l}t\right) \sin.\frac{i\pi x}{l} \\ \text{Wellenlänge} \ldots\ldots & \lambda = 2\frac{l}{i} \\ \text{Schwingungszeit} \ldots\ldots & T = 2\frac{l}{i}\sqrt{\frac{p}{g(\mathfrak{X}+\varepsilon)}} \\ \text{Fortpflanzungsgeschwindigkeit} & c = \sqrt{\frac{g(\mathfrak{X}+\varepsilon)}{p}} \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (13)$$

Die Gesetze der Querschwingungen ergeben sich aus (13), wenn man c mit c_1 vertauscht. Es ist daher für die Querschwingungen:

$$\left.\begin{array}{ll} \upsilon = \zeta = \left(\mathfrak{C}_1 \cos. \frac{i_1 \pi c_1}{l} t + \mathfrak{D}_1 \sin. \frac{i_1 \pi c_1}{l}\right) \sin. \frac{i_1 \pi x}{l} & \\ \text{Wellenlänge} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \lambda_1 = 2 \frac{l}{i_1} & \\ \text{Schwingungszeit} \; . \; . \; . \; . \; . \quad T_1 = 2 \frac{l}{i_1} \sqrt{\frac{p}{g \mathfrak{X}}} & \\ \text{Fortpflanzungsgeschwindigkeit} \quad c_1 = \sqrt{\frac{g \mathfrak{X}}{p}} & \end{array}\right\} \; . \; . \; . \; . \; (14)$$

Da die Ausdrücke für c und c_1 weder l noch i und i_1 enthalten, so sind die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten sowohl von der Länge des eingespannten Stückes, als auch von der Theilung der Saite ganz unabhängig. In den Gleichungen (13) kann man sich erlauben, $\mathfrak{X}$ gegen ε zu vernachlässigen, denn die Spannung einer Kette oder Saite ist jederzeit sehr klein gegen den Modulus der Elastizität. So lange also die Spannung ein gewisses Maass nicht überschreitet, sind die Längenschwingungen von der Spannung nicht abhängig.

Die Gleichungen (13) und (14) sind nur partikuläre Integrale der Gleichungen (8); die allgemeinen Integrale wären:

$$\xi = \Sigma \left(\mathfrak{C} \cos. \frac{i \pi c}{l} t + \mathfrak{D} \sin. \frac{i \pi c}{l} t\right) \sin. \frac{i \pi x}{l}$$

$$\upsilon = \zeta = \Sigma \left(\mathfrak{C}_1 \cos. \frac{i_1 \pi c_1}{l} t + \mathfrak{D}_1 \sin. \frac{i_1 \pi c_1}{l} t\right) \sin. \frac{i_1 \pi x}{l}$$

wobei Σ Summenzeichen sind, welche ausdrücken, dass man sowohl für i als auch für i_1 alle ganzen positiven Zahlen von 1 bis ∞ setzen, und die sich hierdurch ergebende Reihe von Gliedern summiren soll.

SCHWINGUNGEN EINES EBENEN DYNAMIDENSYSTEMS ODER EINER MEMBRANE.

Denken wir uns, ein ebenes Dynamidensystem sei ähnlich wie ein Trommelfell nach allen Richtungen gleichmässig gespannt, werde hierauf erschüttert und dann sich selbst überlassen. Die dadurch entstehenden Bewegungen ergeben sich aus den bereits aufgestellten Gleichungen.

Legen wir die Axen $O\,x$ und $O\,y$ in die Ebene des Systems und $O\,z$ senkrecht auf dieselbe, so ist $\Delta z = o$ und die Gleichungen (7), (8), (9), Seite 99, werden:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{A}_2 &= \frac{m_1}{r}\left[f(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{d\,r}\,\varDelta x^2\right] \\
\mathfrak{B}_2 &= \frac{m_1}{r}\left[f(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{d\,r}\,\varDelta y^2\right] \\
\mathfrak{C}_2 &= \frac{m_1}{r}\,f(r) \\
\mathfrak{D}_2 &= 0 \\
\mathfrak{E}_2 &= 0 \\
\mathfrak{F}_2 &= \frac{m_1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{d\,r}\,\varDelta x\,\varDelta y
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned}
2\,\frac{d^2\xi}{d\,t^2} + S(\mathfrak{A}_2\,\varDelta\xi + \mathfrak{F}_2\,\varDelta v) &= 0 \\
2\,\frac{d^2 v}{d\,t^2} + S(\mathfrak{F}_2\,\varDelta\xi + \mathfrak{B}_2\,\varDelta v) &= 0 \\
2\,\frac{d^2\zeta}{d\,t^2} + S\,\mathfrak{C}_2\,\varDelta\zeta &= 0
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Da die zur Zeit t stattfindenden Verschiebungen $\xi\ v\ \zeta$ Funktionen von x und y sind, so können wir vermöge des Taylor'schen Satzes annähernd schreiben:

$$\left.\begin{aligned}
\varDelta\xi &= \frac{d\,\xi}{d\,x}\,\varDelta x + \frac{d\,\xi}{d\,y}\,\varDelta y + \frac{1}{2}\,\frac{d^2\xi}{d\,x^2}\,\varDelta x^2 + \frac{d^2\xi}{d\,x\,d\,y}\,\varDelta x\,\varDelta y + \frac{1}{2}\,\frac{d^2\xi}{d\,y^2}\,\varDelta y^2 \\
\varDelta v &= \frac{d\,v}{d\,x}\,\varDelta x + \frac{d\,v}{d\,y}\,\varDelta y + \frac{1}{2}\,\frac{d^2 v}{d\,x^2}\,\varDelta x^2 + \frac{d^2 v}{d\,x\,d\,y}\,\varDelta x\,\varDelta y + \frac{1}{2}\,\frac{d^2 v}{d\,y^2}\,\varDelta y^2 \\
\varDelta\zeta &= \frac{d\,\zeta}{d\,x}\,\varDelta x + \frac{d\,\zeta}{d\,y}\,\varDelta y + \frac{1}{2}\,\frac{d^2\zeta}{d\,x^2}\,\varDelta x^2 + \frac{d^2\zeta}{d\,x\,d\,y}\,\varDelta x\,\varDelta y + \frac{1}{2}\,\frac{d^2\zeta}{d\,y^2}\,\varDelta y^2
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Führt man diese Werthe in die Gleichungen (2) ein, berücksichtigt die Ausdrücke (1), berücksichtigt ferner, dass die Differenzialquotienten vor die Summenzeichen gesetzt werden dürfen, und lässt alle Glieder weg, welche ungerade Potenzen von $\varDelta x$ und $\varDelta y$ enthalten, so findet man:

$$\left.\begin{aligned}
&2\frac{d^2\xi}{dt^2}+\frac{d^2\xi}{dx^2}\,S\,\frac{m_1}{2}\left[\frac{f(r)}{r}\,\Delta x^2+\frac{1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{dr}\,\Delta x^4\right]\\
&\qquad+\frac{d^2\xi}{dy^2}\,S\,\frac{m_1}{2}\left[\frac{f(r)}{r}\,\Delta y^2+\frac{1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{dr}\,\Delta x^2\,\Delta y^2\right]\\
&\qquad+2\,\frac{d^2\upsilon}{dx\,dy}\,S\,\frac{m_1}{2}\,\frac{1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{dr}\,\Delta x^2\,\Delta y^2
\end{aligned}\right\}=0$$

$$\left.\begin{aligned}
&2\frac{d^2\upsilon}{dt^2}+\frac{d^2\upsilon}{dy^2}\,S\,\frac{m_1}{2}\left[\frac{f(r)}{r}\,\Delta y^2+\frac{1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{dr}\,\Delta y^4\right]\\
&\qquad+\frac{d^2\upsilon}{dx^2}\,S\,\frac{m_1}{2}\left[\frac{f(r)}{r}\,\Delta x^2+\frac{1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{dr}\,\Delta x^2\,\Delta y^2\right]\\
&\qquad+2\,\frac{d^2\xi}{dx\,dy}\,S\,\frac{m_1}{2}\,\frac{1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{dr}\,\Delta x^2\,\Delta y^2
\end{aligned}\right\}=0 \qquad (4)$$

$$2\frac{d^2\zeta}{dt^2}+\frac{d^2\zeta}{dx^2}\,S\,\frac{m_1}{2}\,\frac{f(r)}{r}\,\Delta x^2+\frac{d^2\zeta}{dy^2}\,S\,\frac{m_1}{2}\,\frac{f(r)}{r}\,\Delta y^2=0$$

Dies sind die Differenzialgleichungen der Bewegung des ebenen Dynamidensystems. Es sind nur Annäherungen, weil in den Ausdrücken (3) nur bis an die dritten Dimensionen von Δx und Δy geschritten wurde.

Die letzte dieser Gleichungen, welche unabhängig von den beiden andern integrirt werden kann, bestimmt die Transversalschwingungen, und mit der Integration dieser Gleichungen wollen wir uns nun beschäftigen.

Wenn wir annehmen, dass die Membrane nach allen Richtungen gleich elastisch und gleich gespannt ist, haben die Summen

$$S\,\frac{m_1}{2}\,\frac{f(r)}{r}\,\Delta x^2 \qquad\qquad S\,\frac{m_1}{r}\,\frac{f(r)}{r}\,\Delta y^2$$

gleiche Werthe, und der Betrag derselben kann vermittelst der Ausdrücke (17), Seite 76, bestimmt werden.

Nehmen wir an, die Begrenzung der Membrane bilde ein Rechteck, dessen Dimensionen l und l_1 sind. Legen wir den Anfangspunkt der Coordinaten in einen Eckpunkt des Rechteckes, die Axe Ox in die Richtung von l, die Axe Oy in die Richtung von l_1 und bezeichnen durch $\mathfrak{S}$ die Kraft, welche auf jede Längeneinheit des Umfangs spannend wirkt, endlich durch p das Gewicht einer Flächeneinheit der Membrane, so ist in die Gleichungen (17), Seite 76, zu setzen:

$$\mathrm{S}\, m\,(X x + X_2 x_2) = \mathrm{S}\, m\,(Y y + Y_2 y_2) = \mathfrak{S}\, l\, l_1$$

$$\Sigma m = \frac{l\, l_1\, p}{2\, g}$$

und man findet :

$$\mathrm{S}\, \frac{m_1}{2}\, \frac{f(r)}{r}\, \varDelta x^2 = \mathrm{S}\, \frac{m_1}{2}\, \frac{f(r)}{r}\, \varDelta y^2 = -\, 2\, g\, \frac{\mathfrak{S}}{p}$$

Hierdurch wird die letzte der Gleichungen (4) :

$$\frac{d^2 \zeta}{d t^2} = \frac{g \mathfrak{S}}{p} \left(\frac{d^2 \zeta}{d x^2} + \frac{d^2 \zeta}{d y^2} \right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

oder wenn wir zur Abkürzung setzen :

$$c = \sqrt{\frac{g \mathfrak{S}}{p}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

$$\frac{d^2 \zeta}{d t^2} = c^2 \left(\frac{d^2 \zeta}{d x^2} + \frac{d^2 \zeta}{d y^2} \right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Es ist leicht einzusehen, dass diese Gleichung nicht nur für eine rechteckige, sondern auch für jede beliebige Begrenzung der Membrane gilt.

Um diese Gleichung zu integriren, versuchen wir zu setzen :

$$\zeta = T X Y \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

wobei T nur t, X nur x, Y nur y enthalten soll. Unter dieser Voraussetzung ist :

$$\frac{d^2 \zeta}{d t^2} = X Y \frac{d^2 T}{d t^2} \qquad \frac{d^2 \zeta}{d x^2} = T Y \frac{d^2 X}{d x^2} \qquad \frac{d^2 \zeta}{d y^2} = T X \frac{d^2 Y}{d y^2}$$

Führt man diese Werthe in (7) ein, so findet man :

$$\frac{1}{T} \frac{d^2 T}{d t^2} = c^2 \left(\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{d x^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{d y^2} \right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

Da x, y und t von einander ganz unabhängig sind, so kann diese Gleichung nur bestehen, wenn jedes ihrer Glieder einen constanten Werth hat. Diese Gleichung wird also entsprechen, wenn wir nehmen :

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{d t^2} &= -\, \alpha^2 \\ c^2 \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{d x^2} &= -\, \beta^2 \\ c^2 \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{d y^2} &= -\, \gamma^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

wobei $\alpha\ \beta\ \gamma$ Constante sind, zwischen denen jedoch die Beziehung besteht:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (11)$$

Die Integrale der Gleichungen (10) sind:

$$\left.\begin{array}{l} T = \mathfrak{A} \sin.\ \alpha t + \mathfrak{B} \cos.\ \alpha t \\ X = \mathfrak{C} \sin.\ \frac{\beta}{c} x + \mathfrak{D} \cos.\ \frac{\beta}{c} x \\ Y = \mathfrak{D} \sin.\ \frac{\beta_1}{c} y + \mathfrak{F} \cos.\ \frac{\beta_1}{c} y \end{array}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (12)$$

Setzt man diese Werthe in (8), so findet man:

$$\zeta = (\mathfrak{A} \sin. \alpha t + \mathfrak{B} \cos. \alpha t) \left(\mathfrak{C} \sin. \frac{\beta}{c} x + \mathfrak{D} \cos. \frac{\beta}{c} x\right) \left(\mathfrak{C} \sin. \frac{\beta_1}{c} y + \mathfrak{F} \cos. \frac{\beta_1}{c} y\right) \quad (13)$$

Dieser Werth von ζ ist jedoch nicht das allgemeine Integrale der Gleichung (7), sondern nur ein partikuläres.

Wenden wir den Ausdruck (13) auf den Fall an, wenn die Membrane über einen rechteckigen Rahmen gespannt ist, dann muss sein:

1. für $x = o$ $\zeta = o$ für jeden Werth von t und y; folglich ist zu setzen $\mathfrak{D} = o$;
2. für $y = o$ $\zeta = o$ für jeden Werth von t und x; folglich ist zu nehmen $\mathfrak{F} = o$;
3. für $x = l$ $\zeta = o$ für jeden Werth von t und y; folglich ist zu setzen $\sin. \frac{\beta}{c} l = o$ oder $\frac{\beta}{c} l = i\pi$, wobei i irgend eine ganze Zahl bezeichnet;
4. für $y = l_1$ $\zeta = o$ für jeden Werth von t und x; demnach hat man $\sin. \frac{\beta_1}{c} l_1 = o$ oder $\frac{\beta_1}{c} l_1 = i_1 \pi$, wobei i_1 abermals irgend eine ganze Zahl ist.

Vermöge dieser Bestimmungen findet man nun mit Berücksichtigung der Beziehung (11):

$$\zeta = \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{A} \sin. \left[\pi c \sqrt{\left(\frac{i}{l}\right)^2 + \left(\frac{i_1}{l_1}\right)^2}\, t\right] \\ + \mathfrak{B} \cos. \left[\pi c \sqrt{\left(\frac{i}{l}\right)^2 + \left(\frac{i_1}{l_1}\right)^2}\, t\right] \end{array}\right\} \sin. \frac{i \pi x}{l} \sin. \frac{i_1 \pi y}{l_1} \quad . \ . \quad (14)$$

Dieser Ausdruck bestimmt nur einen speziellen Schwingungszustand einer über einen rechteckigen Rahmen gespannten Membrane.

Für den allgemeinsten Schwingungszustand hätte man:

$$\zeta = \Sigma\Sigma \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{A} \sin. \left[\pi c \sqrt{\left(\frac{i}{l}\right)^2 + \left(\frac{i_1}{l_1}\right)^2}\, t \right] \\ + \mathfrak{B} \cos. \left[\pi c \sqrt{\left(\frac{i}{l}\right)^2 + \left(\frac{i_1}{l_1}\right)^2}\, t \right] \end{array} \right\} \sin. \frac{i \pi x}{l} \sin. \frac{i_1 \pi y}{l_1} \quad . \quad . \quad (15)$$

wobei sich die Summen $\Sigma\Sigma$ auf alle möglichen ganzen positiven Werthe von i und i_1 beziehen.

In die Interpretation der Gleichung (14) will ich mich nicht einlassen; man kann hierüber in *Lamé*, „Théorie de l'élasticité," pag. 116, nachsehen.

B. Aetherschwingungen.

AUFSTELLUNG DER BEWEGUNGSGLEICHUNGEN.

Wir betrachten nun abermals ein aus Dynamiden bestehendes System, dessen Atome oder Kerne Körperchen von bestimmter Gestalt sind, welches demnach im Gleichgewichtszustand nach Axenrichtungen symmetrisch gruppirt ist, daher um jeden Punkt herum nach verschiedenen Richtungen verschiedene Elastizitäten besitzt; nehmen aber nun an, dass nur allein in den Aetherhüllen Bewegungen angeregt werden, und erlauben uns, die ungemein schwache Bewegung, die in den Kernen eintreten könnte, ganz zu vernachlässigen. Unter dieser Voraussetzung wird der Bewegungszustand jeder Aetherhülle darin bestehen, dass sich dieselbe als Ganzes gegen den Kern bewegt, ohne denselben zu verlassen, und dass die Aetheratome der Aetherhülle gegen einander relative Bewegungen machen. Wir betrachten jedoch nicht die relative Bewegung der Aetheratome einer Hülle gegen einander, sondern nur die Bewegung der Aetherhülle als Ganzes, und zwar dadurch, dass wir die Bewegung des Massenmittelpunktes jeder Aetherhülle bestimmen. Dabei wird es uns allerdings auch nicht gelingen, mit absoluter Strenge zu verfahren, allein wir können doch klar aussprechen, was wir eigentlich machen und was wir vernachlässigen, und werden erkennen, dass dadurch kein erheblicher Fehler entstehen kann.

Es seien in Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem (Fig. 10), $x\ y\ z$ die Coordinaten des Schwerpunktes eines Körperatoms a, m seine Masse, $\xi\ v\ \zeta$ die relativen Coordinaten des Schwerpunktes α der zum Atom m gehörigen Hülle zur Zeit t; $x + \varDelta x$ $y + \varDelta y$ $z + \varDelta z$ die Coordinaten des Schwerpunktes eines andern Körperatomes a_1, seine Masse m_1, $\xi + \varDelta \xi$ $v + \varDelta v$ $\zeta + \varDelta \zeta$ die relativen Coordinaten des Schwerpunktes α_1 der Hülle von m_1 gegen den Schwerpunkt des Kernes m_1, $\mu\ \mu_1$ *) die Massen der beiden Aetherhüllen.

Da wir annehmen, dass sich die Körperatome nicht bewegen, so sind die Coordinaten $x\ y\ z$ $x + \varDelta x$ $y + \varDelta y$ $z + \varDelta z$ unabhängig von der Zeit t.

Wir setzen ferner $\overline{a\alpha} = \varrho$ die Entfernung des Schwerpunktes der Aetherhülle von dem Schwerpunkte des Atoms; $\overline{a a_1} = r$ die mit der Zeit nicht veränderliche Entfernung

*) Im zweiten Abschnitt wurden durch μ und μ_1 die Massen der einzelnen Aetheratome bezeichnet.

der Schwerpunkte der Kerne; $\overline{a_1 \alpha} = r + \sigma$ die Entfernung des Schwerpunktes des zweiten Kernes a_1 vom Schwerpunkt der Hülle des ersten Kernes; $\overline{\alpha \alpha_1} = r + \sigma_1$ die Entfernung der Schwerpunkte der Hüllen; alles zur Zeit t gültig.

Wir denken uns die Aethermassen der Hüllen in ihren Mittelpunkten concentrirt und nehmen an, dass auf die in α concentrirte Aethermasse μ zur Zeit t folgende Kräfte einwirken:

1. die Anziehung des Körperatoms a gegen α;
2. die Totalität der Anziehungen aller Körperatome gegen die in α concentrirt gedachte Aethermasse μ;
3. die Totalität der Abstossungen aller in ihren Mittelpunkten concentrirt gedachten Aethermassen gegen die in α concentrirt gedachte Aethermasse μ.

Wir bezeichnen:

1. die Anziehung von a gegen α mit $m \mu H(\varrho)$;
2. die Anziehung von a_1 gegen α mit $m_1 \mu G(r + \sigma)$;
3. die Abstossung von α_1 gegen α mit $\mu \mu_1 J(r + \sigma_1)$;

wobei $G()$ $J()$ Funktionen ausdrücken, die mit den Entfernungen der Punkte rasch abnehmen; $H()$ hingegen eine Funktion ist, die im Gegentheil mit dem Wachsen der Entfernung rasch zunimmt, denn die Kraft, mit welcher der Kern a auf seine Aetherhülle einwirkt, muss nothwendig für einen stabilen Gleichgewichtszustand mit der Entfernung $\overline{a \alpha}$ wachsen.

Dies vorausgesetzt gehen wir nun zur Rechnung über.

Die Cosinuse der Winkel, welche die Richtungen der Linien $\overline{a \alpha}$ $\overline{\alpha a_1}$ $\overline{\alpha \alpha_1}$ mit den positiven Richtungen der Coordinatenaxen bilden, sind:

	x	y	z
für $\overline{a \alpha}$ . . .	$\frac{\xi}{\varrho}$	$\frac{v}{\varrho}$	$\frac{\zeta}{\varrho}$
„ $\overline{\alpha a_1}$ . . .	$\frac{\Delta x - \xi}{r + \sigma}$	$\frac{\Delta y - v}{r + \sigma}$	$\frac{\Delta z - \zeta}{r + \sigma}$
„ $\overline{\alpha \alpha_1}$ . . .	$\frac{\Delta x + \Delta \xi}{r + \sigma_1}$	$\frac{\Delta y + \Delta v}{r + \sigma_1}$	$\frac{\Delta z + \Delta \zeta}{r + \sigma_1}$

Nennt man nun X Y Z die Summe der Kräfte, welche auf die Masse μ nach den positiven Richtungen der Axen wirken, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} X &= -m \mu H(\varrho) \frac{\xi}{\varrho} + S\, m_1 \mu G(r + \sigma) \frac{\Delta x - \xi}{r + \sigma} - S\, \mu \mu_1 J(r + \sigma_1) \frac{\Delta x + \Delta \xi}{r + \sigma_1} \\ Y &= -m \mu H(\varrho) \frac{v}{\varrho} + S\, m_1 \mu G(r + \sigma) \frac{\Delta y - v}{r + \sigma} - S\, \mu \mu_1 J(r + \sigma_1) \frac{\Delta y + \Delta v}{r + \sigma_1} \\ Z &= -m \mu H(\varrho) \frac{\zeta}{\varrho} + S\, m_1 \mu G(r + \sigma) \frac{\Delta z - \zeta}{r + \sigma} - S\, \mu \mu_1 J(r + \sigma_1) \frac{\Delta z + \Delta \zeta}{r + \sigma_1} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Es ist zu bemerken, dass die Funktionen $H(\varrho)$ $G(r + \sigma)$ $J(r + \sigma_1)$ esentiell positiv sind.

Diese Gleichungen können weiter umgebildet werden. Es ist zunächst:

$$(r+\sigma)^2 = \left[x + \varDelta x - (x+\xi)\right]^2 + \left[y + \varDelta y - (y+v)\right]^2 + \left[z + \varDelta z - (z+\zeta)\right]^2$$

oder:

$$(r+\sigma)^2 = (\varDelta x - \xi)^2 + (\varDelta y - v)^2 + (\varDelta z - \zeta)^2$$

Vernachlässigt man die Glieder, welche zweite Potenzen von $\xi\ v\ \zeta$ enthalten, betrachtet man also nur allein unendlich kleine Schwingungen, und berücksichtigt, dass $r^2 = \varDelta x^2 + \varDelta y^2 + \varDelta z^2$ ist, so folgt aus dieser letzten Gleichung:

$$\sigma = -\frac{1}{r}(\xi \varDelta x + v \varDelta y + \zeta \varDelta z) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Nun ist ferner:

$$(r+\sigma_1)^2 = \left[x + \varDelta x + \xi + \varDelta\xi - (x+\xi)\right]^2 + \left[y + \varDelta y + v + \varDelta v - (y+v)\right]^2 + \left[z + \varDelta z + \zeta + \varDelta\zeta - (z+\zeta)\right]^2$$

oder:

$$(r+\sigma_1)^2 = (\varDelta x + \varDelta\xi)^2 + (\varDelta y + \varDelta v)^2 + (\varDelta z + \varDelta\zeta)^2$$

Entwickelt man und vernachlässigt dabei die Glieder, welche zweite Potenzen von $\varDelta\xi\ \varDelta v\ \varDelta\zeta$ enthalten, berücksichtigt ferner auch hier, dass $r^2 = \varDelta x^2 + \varDelta y^2 + \varDelta z^2$ ist, so findet man:

$$\sigma_1 = +\frac{1}{r}(\varDelta x \varDelta\xi + \varDelta y \varDelta v + \varDelta z \varDelta\zeta) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Nach dem Taylor'schen Satz findet man annähernd:

$$\left.\begin{aligned} \frac{G(r+\sigma)}{r+\sigma} &= \frac{G(r)}{r} + \frac{d\left(\frac{1}{r}G(r)\right)}{dr}\sigma \\ \frac{J(r+\sigma_1)}{r+\sigma_1} &= \frac{J(r)}{r} + \frac{d\left(\frac{1}{r}J(r)\right)}{dr}\sigma_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

vorausgesetzt, dass man bei dieser Entwicklung sämmtliche Glieder vernachlässigt, welche zweite und höhere Potenzen von σ und σ_1 enthalten.

Mit Berücksichtigung der Resultate 2, 3, 4 findet man nun:

$$S\, m_1\, \mu\, G(r+\sigma)\frac{\varDelta x - \xi}{r+\sigma} = \mu\, S\, m_1 \left[\frac{G(r)}{r} - \frac{d\left(\frac{1}{r}G(r)\right)}{dr}\,\frac{1}{r}(\xi\varDelta x + v\varDelta y + \zeta\varDelta z)\right](\varDelta x - \xi)$$

oder:

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{S\,m_1\,\mu\,G\,(r+\sigma)}\,\frac{\Delta x-\xi}{r+\sigma} &= \mu\,\mathrm{S\,m_1\,G\,(r)}\,\frac{\Delta x}{r} - \mu\,\xi\,\mathrm{S\,m_1}\,\frac{\mathrm{G\,(r)}}{r} - \mu\,\xi\,\mathrm{S\,m_1}\,\frac{1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,\mathrm{G\,(r)}\right)}{d\,r}\,\Delta x^2\\ &\quad - \mu\,v\,\mathrm{S\,m_1}\,\frac{1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,\mathrm{G\,(r)}\right)}{d\,r}\,\Delta x\,\Delta y\\ &\quad - \mu\,\zeta\,\mathrm{S\,m_1}\,\frac{1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,\mathrm{G\,(r)}\right)}{d\,r^2}\,\Delta x\,\Delta z\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

wobei abermals die Glieder, welche $\xi^2\ v^2\ \zeta^2$ enthalten, vernachlässigt sind.

Auf ähnliche Weise findet man:

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{S}\,\mu\,\mu_1\,\frac{\mathrm{J\,(r+\sigma_1)}}{r+\sigma_1}\,(\Delta x+\Delta\xi) &= \mu\,\mathrm{S}\,\mu_1\,\frac{\mathrm{J(r)}}{r}\,\Delta x + \mu\,\Delta\xi\,\mathrm{S}\,\mu_1\left[\frac{\mathrm{J(r)}}{r}+\frac{1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,\mathrm{J\,(r)}\right)}{d\,r}\,\Delta x^2\right]\\ &\quad + \mu\,\Delta v\,\mathrm{S}\,\mu_1\left[\frac{1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,\mathrm{J\,(r)}\right)}{d\,r}\,\Delta x\,\Delta y\right]\\ &\quad + \mu\,\Delta\zeta\,\mathrm{S}\,\mu_1\left[\frac{1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,\mathrm{J\,(r)}\right)}{d\,r}\,\Delta x\,\Delta z\right]\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

Für den Gleichgewichtszustand ist $\varrho=\varrho_1=0$ und wollen wir ferner annehmen, dass $\mathrm{H}\,(0)=0$ sei. Berücksichtigt man diese Bedingungen und die Resultate (5) und (6), so findet man vermittelst der ersten der Gleichungen (1):

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{X} = -\,m\,\mu\,\mathrm{H}\,(\varrho)\,\frac{\xi}{\varrho} &- \mu\,\xi\left[\mathrm{S\,m_1}\,\frac{\mathrm{G\,(r)}}{r}+\mathrm{S\,m_1}\,\frac{1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,\mathrm{G\,(r)}\right)}{d\,r}\,\Delta x^2\right]\\ &- \mu\,v\left[\mathrm{S\,m_1}\,\frac{1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,\mathrm{G\,(r)}\right)}{d\,r}\,\Delta x\,\Delta y\right]\\ &- \mu\,\zeta\left[\mathrm{S\,m_1}\,\frac{1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,\mathrm{G\,(r)}\right)}{d\,r}\,\Delta x\,\Delta z\right]\\ &- \mu\,\Delta\xi\left[\mathrm{S}\,\mu_1\left(\frac{\mathrm{J(r)}}{r}+\frac{1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,\mathrm{J\,(r)}\right)}{d\,r}\,\Delta x^2\right)\right]\\ &- \mu\,\Delta v\left[\mathrm{S}\,\mu_1\,\frac{1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,\mathrm{J\,(r)}\right)}{d\,r}\,\Delta x\,\Delta y\right]\\ &- \mu\,\Delta\zeta\left[\mathrm{S}\,\mu_1\,\frac{1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,\mathrm{J\,(r)}\right)}{d\,r}\,\Delta x\,\Delta z\right]\end{aligned}\right\}\quad .\ .\ (7)$$

Vertauscht man in diesem Ausdruck x und $\varDelta x$ mit y, und $\varDelta y$ mit z und $\varDelta z$, so ergeben sich die Werthe von Y und Z. Man findet:

$$Y = -\,m\mu H(\varrho)\,\frac{v}{\varrho} - \mu\xi\left[S\,m_1\,\frac{1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,G(r)\right)}{dr}\,\varDelta x\,\varDelta y\right]$$

$$-\,\mu v\left[S\,m_1\,\frac{G(r)}{r} + S\,m_1\,\frac{1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,G(r)\right)}{dr}\,\varDelta y^2\right]$$

$$-\,\mu\zeta\left[S\,m_1\,\frac{1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,G(r)\right)}{dr}\,\varDelta y\,\varDelta z\right]$$

$$-\,\mu\varDelta\xi\left[S\,\mu_1\,\frac{1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,J(r)\right)}{dr}\,\varDelta x\,\varDelta y\right]$$

$$-\,\mu\varDelta v\left[S\,\mu_1\left(\frac{J(r)}{r} + \frac{1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,J(r)\right)}{dr}\,\varDelta y^2\right)\right]$$

$$-\,\mu\varDelta\zeta\left[S\,\mu_1\,\frac{1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,J(r)\right)}{dr}\,\varDelta y\,\varDelta z\right]$$

$$Z = -\,m\mu H(\varrho)\,\frac{\zeta}{\varrho} - \mu\xi\left[S\,m_1\,\frac{1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,G(r)\right)}{dr}\,\varDelta x\,\varDelta z\right]$$

$$-\,\mu v\left[S\,m_1\,\frac{1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,G(r)\right)}{dr}\,\varDelta y\,\varDelta z\right]$$

$$-\,\mu\zeta\left[S\,m_1\,\frac{G(r)}{r} + S\,m_1\,\frac{1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,G(r)\right)}{dr}\,\varDelta z^2\right]$$

$$-\,\mu\varDelta\xi\left[S\,\mu_1\,\frac{1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,J(r)\right)}{dr}\,\varDelta x\,\varDelta z\right]$$

$$-\,\mu\varDelta v\left[S\,\mu_1\,\frac{1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,J(r)\right)}{dr}\,\varDelta z\,\varDelta y\right]$$

$$-\,\mu\varDelta\zeta\left[S\,\mu_1\left(\frac{J(r)}{r} + \frac{1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,J(r)\right)}{dr}\,\varDelta z^2\right)\right]$$

Setzen wir zur Abkürzung:

$$\left.\begin{aligned}
& S\, m_1 \left[\frac{G(r)}{r} + \frac{1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,G(r)\right)}{d\,r}\,\varDelta x^2\right] = \mathfrak{A} \\
& S\, m_1 \left[\frac{G(r)}{r} + \frac{1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,G(r)\right)}{d\,r}\,\varDelta y^2\right] = \mathfrak{B} \\
& S\, m_1 \left[\frac{G(r)}{r} + \frac{1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,G(r)\right)}{d\,r}\,\varDelta z^2\right] = \mathfrak{C} \\
& S\, m_1\, \frac{1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,G(r)\right)}{d\,r}\,\varDelta x\,\varDelta y = \mathfrak{F} \\
& S\, m_1\, \frac{1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,G(r)\right)}{d\,r}\,\varDelta x\,\varDelta z = \mathfrak{E} \\
& S\, m_1\, \frac{1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,G(r)\right)}{d\,r}\,\varDelta y\,\varDelta z = \mathfrak{D}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ (8)$$

$$\left.\begin{aligned}
& \frac{\mu_1}{r}\left[J(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r}\,J(r)\right)}{d\,r}\,\varDelta x^2\right] = \mathfrak{A}_1 \\
& \frac{\mu_1}{r}\left[J(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r}\,J(r)\right)}{d\,r}\,\varDelta y^2\right] = \mathfrak{B}_1 \\
& \frac{\mu_1}{r}\left[J(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r}\,J(r)\right)}{d\,r}\,\varDelta z^2\right] = \mathfrak{C}_1 \\
& \frac{\mu_1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,J(r)\right)}{d\,r}\,\varDelta x\,\varDelta y = \mathfrak{F}_1 \\
& \frac{\mu_1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,J(r)\right)}{d\,r}\,\varDelta x\,\varDelta z = \mathfrak{E}_1 \\
& \frac{\mu_1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,J(r)\right)}{d\,r}\,\varDelta y\,\varDelta z = \mathfrak{D}_1
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ (9)$$

und berücksichtigen, dass für den bewegten Zustand

$$X = 2\mu\,\frac{d^2\xi}{d\,t^2}$$

$$Y = 2\mu\,\frac{d^2 v}{d\,t^2}$$

$$Z = 2\mu\,\frac{d^2\zeta}{d\,t^2}$$

ist, so finden wir zur Bestimmung der Bewegung des Schwerpunktes der dem Punkte x y z entsprechenden Aethersphäre folgende Differenzialgleichungen :

$$\left.\begin{aligned}
&2\,\frac{d^2\xi}{dt^2} + m\,\frac{H(\varrho)}{\varrho}\,\xi + (\mathfrak{A}\,\xi + \mathfrak{F}\,\upsilon + \mathfrak{E}\,\zeta) + S\,(\mathfrak{A}_1\,\Delta\xi + \mathfrak{F}_1\,\Delta\upsilon + \mathfrak{E}_1\,\Delta\zeta) = 0\\
&2\,\frac{d^2\upsilon}{dt^2} + m\,\frac{H(\varrho)}{\varrho}\,\upsilon + (\mathfrak{F}\,\xi + \mathfrak{B}\,\upsilon + \mathfrak{D}\,\zeta) + S\,(\mathfrak{F}_1\,\Delta\xi + \mathfrak{B}_1\,\Delta\upsilon + \mathfrak{D}_1\,\Delta\zeta) = 0\\
&2\,\frac{d^2\zeta}{dt^2} + m\,\frac{H(\varrho)}{\varrho}\,\zeta + (\mathfrak{E}\,\xi + \mathfrak{D}\,\upsilon + \mathfrak{C}\,\zeta) + S\,(\mathfrak{E}_1\,\Delta\xi + \mathfrak{D}_1\,\Delta\upsilon + \mathfrak{C}_1\,\Delta\zeta) = 0
\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

In diesen Gleichungen (10) drücken die mit $\xi\ \upsilon\ \zeta$ multiplizirten Glieder die Wechselwirkung des Körpermediums auf das Aethermedium, die mit $\Delta\xi\ \ \Delta\upsilon\ \ \Delta\zeta$ multiplizirten Glieder dagegen die Wirkung des Aethers auf sich selbst aus; denn $H(\varrho)$, so wie auch die Grössen $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}\,\mathfrak{E}\,\mathfrak{F}$ hängen vom Körpermedium, die Grössen $\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{C}_1\,\mathfrak{D}_1\,\mathfrak{E}_1\,\mathfrak{F}_1$ dagegen vom Aethermedium ab. Vernachlässigt man den Einfluss des Körpermediums auf das Aethermedium, lässt also die mit $\xi\ \upsilon\ \zeta$ multiplizirten Glieder verschwinden, so reduziren sich die Gleichungen (10) auf folgende :

$$\left.\begin{aligned}
&2\,\frac{d^2\xi}{dt^2} + S\,(\mathfrak{A}_1\,\Delta\xi + \mathfrak{F}_1\,\Delta\upsilon + \mathfrak{E}_1\,\Delta\zeta) = 0\\
&2\,\frac{d^2\upsilon}{dt^2} + S\,(\mathfrak{F}_1\,\Delta\xi + \mathfrak{B}_1\,\Delta\upsilon + \mathfrak{D}_1\,\Delta\zeta) = 0\\
&2\,\frac{d^2\zeta}{dt^2} + S\,(\mathfrak{E}_1\,\Delta\xi + \mathfrak{D}_1\,\Delta\upsilon + \mathfrak{C}_1\,\Delta\zeta) = 0
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

und diese Gleichungen stimmen in der That mit denjenigen überein, welche *Cauchy* für ein einfaches Medium zuerst aufgestellt hat.

Lässt man aber in den Gleichungen (10) die mit $\xi\ \upsilon\ \zeta$ multiplizirten Glieder weg, setzt also :

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{C} = \mathfrak{D} = \mathfrak{E} = \mathfrak{F} = 0 \quad \text{und} \quad H(\varrho) = 0$$

so stimmt diese Gleichung der Form nach vollkommen mit den Gleichungen (9), Seite 99, überein, welche wir für die Schwingungen der Körperatome aufgestellt haben.

Wir werden daher die Bewegungsgesetze der Körperschwingungen erhalten, wenn wir in den Integralen der Gleichungen (10) der Aetherschwingungen

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{C} = \mathfrak{D} = \mathfrak{E} = \mathfrak{F} = 0 \quad \text{und} \quad H(\varrho) = 0$$

ferner statt $\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{C}_1\,\mathfrak{D}_1\,\mathfrak{E}_1\,\mathfrak{F}_1$ beziehungsweise $\mathfrak{A}_2\,\mathfrak{B}_2\,\mathfrak{C}_2\,\mathfrak{D}_2\,\mathfrak{E}_2\,\mathfrak{F}_2$ setzen, oder wenn wir (wie eine Vergleichung der Ausdrücke (7) und (8), Seite 99, mit den Ausdrücken (9), Seite 116 zeigt) das Zeichen J mit F vertauschen.

INTEGRATION DER GLEICHUNGEN (10).

Um die Gleichungen (10) zu integriren, ist es unerlässlich, über die Form der Funktion $H(\varrho)$, d. h. über das Gesetz der Anziehung eines Körperatoms auf seine eigene Aethersphäre eine naturgemässe Hypothese zu machen.

Die einfachste und naturgemäss scheinende Annahme ist, dass wir setzen :

$$H(\varrho) = k\varrho \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

wobei k eine Constante bezeichnet. Unter dieser Voraussetzung wird $m\,\frac{H(\varrho)}{\varrho} = k\,m$ oder wenn man

$$k\,m = \varepsilon \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

setzt, so werden die Gleichungen (10) :

$$\left.\begin{aligned}
2\,\frac{d^2\xi}{dt^2} + (\mathfrak{A}+\varepsilon)\xi + \mathfrak{F}\upsilon + \mathfrak{E}\zeta + S(\mathfrak{A}_1\,\Delta\xi + \mathfrak{F}_1\,\Delta\upsilon + \mathfrak{E}_1\,\Delta\zeta) &= 0 \\
2\,\frac{d^2\upsilon}{dt^2} + \mathfrak{F}\xi + (\mathfrak{B}+\varepsilon)\upsilon + \mathfrak{D}\zeta + S(\mathfrak{F}_1\,\Delta\xi + \mathfrak{B}_1\,\Delta\upsilon + \mathfrak{D}_1\,\Delta\zeta) &= 0 \\
2\,\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \mathfrak{E}\xi + \mathfrak{D}\upsilon + (\mathfrak{C}+\varepsilon)\zeta + S(\mathfrak{E}_1\,\Delta\xi + \mathfrak{D}_1\,\Delta\upsilon + \mathfrak{C}_1\,\Delta\zeta) &= 0
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (14)$$

Vermöge der Fourier'schen Formel kann man setzen :

$$\left.\begin{aligned}
\xi = \varphi(x\,y\,z\,t) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \cos.u\,\varphi(\lambda\,\mu\,\nu\,t)\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma\,d\lambda\,d\mu\,d\nu \\
\upsilon = \psi(x\,y\,z\,t) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \cos.u\,\psi(\lambda\,\mu\,\nu\,t)\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma\,d\lambda\,d\mu\,d\nu \\
\zeta = \omega(x\,y\,z\,t) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \cos.u\,\omega(\lambda\,\mu\,\nu\,t)\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma\,d\lambda\,d\mu\,d\nu
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (15)$$

wobei

$$u = \alpha(x-\lambda) + \beta(y-\upsilon) + \gamma(z-\zeta) \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

und $\varphi\ \psi\ \omega$ Funktionszeichen sind. Die Integrale sind sämmtlich von $-\infty$ bis $+\infty$ zu nehmen.

Aus den Gleichungen (15) folgt zunächst :

$$\left.\begin{aligned}
\Delta \xi &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \Delta \cos. u\, \varphi(\lambda \mu \nu t)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\lambda\, d\mu\, d\nu \\
\Delta v &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \Delta \cos. u\, \psi(\lambda \mu \nu t)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\lambda\, d\mu\, d\nu \\
\Delta \zeta &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \Delta \cos. u\, \omega(\lambda \mu \nu t)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\lambda\, d\mu\, d\nu
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (17)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2 \xi}{d t^2} &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \cos. u\, \frac{d^2 \varphi(\lambda \mu \nu t)}{d t^2}\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\lambda\, d\mu\, d\nu \\
\frac{d^2 v}{d t^2} &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \cos. u\, \frac{d^2 \psi(\lambda \mu \nu t)}{d t^2}\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\lambda\, d\mu\, d\nu \\
\frac{d^2 \zeta}{d t^2} &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \cos. u\, \frac{d^2 \omega(\lambda \mu \nu t)}{d t^2}\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\lambda\, d\mu\, d\nu
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (18)$$

Führt man die Werthe von $\xi\; v\; \zeta\; \Delta\xi\; \Delta v\; \Delta\zeta\; \frac{d^2\xi}{dt^2}\; \frac{d^2 v}{dt^2}\; \frac{d^2\zeta}{dt^2}$, welche die Ausdrücke (15), (17) und (18) darbieten, in (14) ein, so findet man, wenn zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned}
\varphi(\lambda \mu \nu t) &= \varphi \\
\psi(\lambda \mu \nu t) &= \psi \\
\omega(\lambda \mu \nu t) &= \omega
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (19)$$

gesetzt wird:

$$\left.\begin{aligned}
o &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \left\{\begin{aligned} 2 \cos. u\, \frac{d^2\varphi}{dt^2} &+ \varphi\, S\, \mathfrak{A}_1\, \Delta \cos. u + \psi\, S\, \mathfrak{F}_1\, \Delta \cos. u + \omega\, S\, \mathfrak{E}_1\, \Delta \cos. u \\ &+ \varphi\, (\mathfrak{A}+\varepsilon) \cos. u + \psi\, \mathfrak{F} \cos. u \qquad + \omega\, \mathfrak{E} \cos. u \end{aligned}\right\} d\alpha \ldots d\nu \\
o &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \left\{\begin{aligned} 2 \cos. u\, \frac{d^2\psi}{dt^2} &+ \varphi\, S\, \mathfrak{F}_1\, \Delta \cos. u + \psi\, S\, \mathfrak{B}_1\, \Delta \cos. u + \omega\, S\, \mathfrak{D}_1\, \Delta \cos. u \\ &+ \varphi\, \mathfrak{F} \cos. u \qquad + \psi\, (\mathfrak{B}+\varepsilon) \cos. u + \omega\, \mathfrak{D} \cos. u \end{aligned}\right\} d\alpha \ldots d\nu \\
o &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \left\{\begin{aligned} 2 \cos. u\, \frac{d^2\omega}{dt^2} &+ \varphi\, S\, \mathfrak{E}_1\, \Delta \cos. u + \psi\, S\, \mathfrak{D}_1\, \Delta \cos. u + \omega\, S\, \mathfrak{C}_1\, \Delta \cos. u \\ &+ \varphi\, \mathfrak{E} \cos. u \qquad + \psi\, \mathfrak{D} \cos. u \qquad + \omega\, (\mathfrak{C}+\varepsilon) \cos. u \end{aligned}\right\} d\alpha \ldots d\nu
\end{aligned}\right\} (20)$$

Nun ist:

$$\begin{aligned}
\Delta \cos. u &= \cos. (u + \Delta u) - \cos. u = \cos. u \cos. \Delta u - \sin. u \sin. \Delta u - \cos. u \\
&= \cos. u\, (\cos. \Delta u - 1) - \sin. u \sin. \Delta u \\
&= -2 \cos. u \left(\sin. \frac{1}{2} \Delta u\right)^2 - \sin. u \sin. \Delta u
\end{aligned}$$

Bezeichnet man durch $\mathfrak{H}$ irgend eine der sechs Grössen $\mathfrak{A}_1\ \mathfrak{B}_1\ \mathfrak{C}_1\ \mathfrak{D}_1\ \mathfrak{E}_1\ \mathfrak{F}_1$, so hat man:

$$S\,\mathfrak{H}\,\Delta\cos. u = S\,\mathfrak{H}\left[-2\cos. u\left(\sin.\frac{1}{2}\,\Delta u\right)^2 - \sin. u \sin. \Delta u\right]$$

$$= -2\cos. u\, S\,\mathfrak{H}\left(\sin.\frac{1}{2}\,\Delta u\right)^2 - \sin. u\; S\,\mathfrak{H} \sin \Delta u$$

Wenn wir annehmen, dass im Medium jedem Punkt ein Gegenpunkt entspricht, d. h. voraussetzen, dass für jeden Punkt, für welchen $\Delta x\ \Delta y\ \Delta z$ gilt, ein zweiter Punkt existirt, für welchen $-\Delta x\ -\Delta y\ -\Delta z$ gilt, so verschwinden alle diejenigen Summen, in welchen irgend eine der Grössen $\Delta x\ \Delta y\ \Delta z$ in einer ungeraden Potenz erscheint; es ist demnach unter dieser Voraussetzung:

$$S\,\mathfrak{H} \sin. \Delta u = S\,\mathfrak{H} \sin. (\alpha\,\Delta x + \beta\,\Delta y + \gamma\,\Delta z) = 0$$

und folglich wird:

$$S\,\mathfrak{H}\,\Delta\cos. u = -2\cos. u\; S\,\mathfrak{H}\left(\sin.\frac{1}{2}\,\Delta u\right)^2$$

Führt man diesen Werth in die Differenzialgleichung (20) ein, so folgt:

$$\left.\begin{aligned}
0 &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \left\{\begin{aligned} &2\frac{d^2\varphi}{dt^2} - 2\varphi\, S\,\mathfrak{A}_1\left(\sin.\frac{1}{2}\,\Delta u\right)^2 - 2\psi\, S\,\mathfrak{F}_1\left(\sin.\frac{1}{2}\,\Delta u\right)^2 \\ &\qquad - 2\omega\, S\,\mathfrak{E}_1\left(\sin.\frac{1}{2}\,\Delta u\right)^2 \\ &\qquad + \varphi(\mathfrak{A}+\varepsilon) + \psi\,\mathfrak{F} + \omega\,\mathfrak{E} \end{aligned}\right\} \cos. u\; d\alpha..d\nu \\
0 &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \left\{\begin{aligned} &2\frac{d^2\psi}{dt^2} - 2\varphi\, S\,\mathfrak{F}_1\left(\sin.\frac{1}{2}\,\Delta u\right)^2 - 2\psi\, S\,\mathfrak{B}_1\left(\sin.\frac{1}{2}\,\Delta u\right)^2 \\ &\qquad - 2\omega\, S\,\mathfrak{D}_1\left(\sin.\frac{1}{2}\,\Delta u\right)^2 \\ &\qquad + \varphi\,\mathfrak{F} + \psi(\mathfrak{B}+\varepsilon) + \omega\,\mathfrak{D} \end{aligned}\right\} \cos. u\; d\alpha..d\nu \\
0 &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \left\{\begin{aligned} &2\frac{d^2\omega}{dt^2} - 2\varphi\, S\,\mathfrak{E}_1\left(\sin.\frac{1}{2}\,\Delta u\right)^2 - 2\psi\, S\,\mathfrak{D}_1\left(\sin.\frac{1}{2}\,\Delta u\right)^2 \\ &\qquad - 2\omega\, S\,\mathfrak{C}_1\left(\sin.\frac{1}{2}\,\Delta u\right)^2 \\ &\qquad + \varphi\,\mathfrak{E} + \psi\,\mathfrak{D} + \omega(\mathfrak{C}+\varepsilon) \end{aligned}\right\} \cos. u\; d\alpha.\,d\nu
\end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{2}(\mathfrak{A}+\varepsilon) - S\,\mathfrak{A}_1 \left(\sin.\frac{1}{2}\varDelta u\right)^2 &= l \\
\frac{1}{2}(\mathfrak{B}+\varepsilon) - S\,\mathfrak{B}_1 \left(\sin.\frac{1}{2}\varDelta u\right)^2 &= m \\
\frac{1}{2}(\mathfrak{C}+\varepsilon) - S\,\mathfrak{C}_1 \left(\sin.\frac{1}{2}\varDelta u\right)^2 &= n \\
\frac{1}{2}\mathfrak{D} - S\,\mathfrak{D}_1 \left(\sin.\frac{1}{2}\varDelta u\right)^2 &= p \\
\frac{1}{2}\mathfrak{E} - S\,\mathfrak{E}_1 \left(\sin.\frac{1}{2}\varDelta u\right)^2 &= q \\
\frac{1}{2}\mathfrak{F} - S\,\mathfrak{F}_1 \left(\sin.\frac{1}{2}\varDelta u\right)^2 &= r
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (22)$$

so wird den Gleichungen (21) Genüge geleistet, wenn man nimmt:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2\varphi}{dt^2} + l\varphi + r\psi + q\omega &= o \\
\frac{d^2\psi}{dt^2} + r\varphi + m\psi + p\omega &= o \\
\frac{d^2\omega}{dt^2} + q\varphi + p\psi + n\omega &= o
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (23)$$

Hierdurch hat man nun zur Bestimmung der in der Fourier'schen Formel vorkommenden Funktionen $\varphi\ \psi\ \omega$ drei Differenzialgleichungen.

Um diese Gleichungen zu integriren, versuchen wir die Annahme:

$$\varphi = \mathfrak{M}T \qquad \psi = \mathfrak{N}T \qquad \omega = \mathfrak{P}T \quad \ldots\ldots (24)$$

wobei wir voraussetzen, dass T eine Funktion von t sei, dass jedoch die Grössen $\mathfrak{M}\ \mathfrak{N}\ \mathfrak{P}$ kein t enthalten. Dann ist:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \mathfrak{M}\frac{d^2T}{dt^2} \qquad \frac{d^2\psi}{dt^2} = \mathfrak{N}\frac{d^2T}{dt^2} \qquad \frac{d^2\omega}{dt^2} = \mathfrak{P}\frac{d^2T}{dt^2} \quad \ldots (25)$$

Hierdurch werden die Gleichungen (23):

$$\mathfrak{M}\frac{d^2T}{dt^2} + (l\,\mathfrak{M} + r\,\mathfrak{N} + q\,\mathfrak{P})\,T = o$$

$$\mathfrak{N}\frac{d^2T}{dt^2} + (r\,\mathfrak{M} + m\,\mathfrak{N} + p\,\mathfrak{P})\,T = o$$

$$\mathfrak{P}\frac{d^2T}{dt^2} + (q\,\mathfrak{M} + p\,\mathfrak{N} + n\,\mathfrak{P})\,T = o$$

und diesen Gleichungen wird Genüge geleistet, wenn man nimmt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2} &= -\frac{l\mathfrak{M}+r\mathfrak{N}+q\mathfrak{P}}{\mathfrak{M}} = -\vartheta^2 \\ \frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2} &= -\frac{r\mathfrak{M}+m\mathfrak{N}+p\mathfrak{P}}{\mathfrak{N}} = -\vartheta^2 \\ \frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2} &= -\frac{q\mathfrak{M}+p\mathfrak{N}+n\mathfrak{P}}{\mathfrak{P}} = -\vartheta^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$T = \mathfrak{G}\cos.\vartheta t + \mathfrak{H}\sin.\vartheta t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

$$\left.\begin{aligned} (l-\vartheta^2)\,\mathfrak{M} + r\,\mathfrak{N} + q\,\mathfrak{P} &= 0 \\ r\,\mathfrak{M} + (m-\vartheta^2)\,\mathfrak{N} + p\,\mathfrak{P} &= 0 \\ q\,\mathfrak{M} + p\,\mathfrak{N} + (n-\vartheta^2)\,\mathfrak{P} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

Ferner findet man durch Elimination von $\mathfrak{M}\ \mathfrak{N}\ \mathfrak{P}$ aus diesen drei Gleichungen (28) folgende Gleichung:

$$(l-\vartheta^2)(m-\vartheta^2)(n-\vartheta^2) - p^2(l-\vartheta^2) - q^2(m-\vartheta^2) - r^2(n-\vartheta^2) + 2pqr = 0 \quad (29)$$

Diese Gleichung ist in Bezug auf ϑ^2 vom dritten Grad, sie gibt also für ϑ^2 drei Werthe, und dann geben die Gleichungen (28) für jeden der drei Werthe von ϑ^2 bestimmte Werthe für $\mathfrak{M}\ \mathfrak{N}\ \mathfrak{P}$.

Die Gleichung (27) gibt endlich für die drei Werthe von ϑ^2 drei Werthe von T. Vermöge (24) erhalten wir daher sowohl für φ als auch für ψ und für ω drei Werthe. Bezeichnen wir die drei Werthe von ϑ^2 mit $\vartheta_1^2\ \vartheta_2^2\ \vartheta_3^2$ und die entsprechenden Werthe von $\mathfrak{M}\ \mathfrak{N}\ \mathfrak{P}\ \ \varphi\ \psi\ \omega$ dadurch, dass wir diesen Buchstaben Zahlen anhängen, so haben wir folgende zusammenhängende Grössen:

$$\begin{array}{llll} \vartheta_1^2 & \text{gibt} & \mathfrak{M}_1\ \mathfrak{N}_1\ \mathfrak{P}_1 & \varphi_1\ \psi_1\ \omega_1 \\ \vartheta_2^2 & \text{„} & \mathfrak{M}_2\ \mathfrak{N}_2\ \mathfrak{P}_2 & \varphi_2\ \psi_2\ \omega_2 \\ \vartheta_3^2 & \text{„} & \mathfrak{M}_3\ \mathfrak{N}_3\ \mathfrak{P}_3 & \varphi_3\ \psi_3\ \omega_3 \end{array}$$

Die Werthe von $\vartheta^2\ \mathfrak{M}\ \mathfrak{N}\ \mathfrak{P}$ können durch eine geometrische Construktion zur Anschauung gebracht werden. Vorausgesetzt, dass alle drei Wurzeln der Gleichung (29) reell sind, so bedeuten diese drei Wurzeln $\vartheta_1^2\ \vartheta_2^2\ \vartheta_3^2$ die drei Halbaxen eines Elypsoides, dessen Gleichung ist:

$$lx^2 + my^2 + nz^2 + 2pyz + 2qxz + 2rxy = 1$$

und die Werthe von $\mathfrak{M}\ \mathfrak{N}\ \mathfrak{P}$ sind die Cosinuse der Winkel, welche die Richtungen der Axen des Elypsoides mit den Axen $Ox\ Oy\ Oz$ bilden.

Die individuellen Werthe von $\mathfrak{M}$ $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{P}$ genügen daher den folgenden Beziehungen :

$$\left.\begin{array}{r}\mathfrak{M}_1\,\mathfrak{M}_2+\mathfrak{N}_1\,\mathfrak{N}_2+\mathfrak{P}_1\,\mathfrak{P}_2=0\\ \mathfrak{M}_1\,\mathfrak{M}_3+\mathfrak{N}_1\,\mathfrak{N}_3+\mathfrak{P}_1\,\mathfrak{P}_3=0\\ \mathfrak{M}_2\,\mathfrak{M}_3+\mathfrak{N}_2\,\mathfrak{N}_3+\mathfrak{P}_2\,\mathfrak{P}_3=0\\ \mathfrak{M}_1^2+\mathfrak{N}_1^2+\mathfrak{P}_1^2=1\\ \mathfrak{M}_2^2+\mathfrak{N}_2^2+\mathfrak{P}_2^2=1\\ \mathfrak{M}_3^2+\mathfrak{N}_3^2+\mathfrak{P}_3^2=1\end{array}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

Vermöge der bisher gewonnenen Resultate erhalten wir nun für ξ υ ζ folgende Ausdrücke :

$$\left.\begin{array}{l}\xi=\left(\frac{1}{2\,\pi}\right)^3 \mathfrak{S}\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \cos.\,u\;\mathfrak{M}\;(\mathfrak{G}\cos.\,\vartheta\,t+\mathfrak{H}\sin.\,\vartheta\,t)\;d\,\alpha\;d\,\beta\;d\,\gamma\;d\,\lambda\;d\,\mu\;d\,\nu\\ \upsilon=\left(\frac{1}{2\,\pi}\right)^3 \mathfrak{S}\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \cos.\,u\;\mathfrak{N}\;(\mathfrak{G}\cos.\,\vartheta\,t+\mathfrak{H}\sin.\,\vartheta\,t)\;d\,\alpha\;d\,\beta\;d\,\gamma\;d\,\lambda\;d\,\mu\;d\,\nu\\ \zeta=\left(\frac{1}{2\,\pi}\right)^3 \mathfrak{S}\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \cos.\,u\;\mathfrak{P}\;(\mathfrak{G}\cos.\,\vartheta\,t+\mathfrak{H}\sin.\,\vartheta\,t)\;d\,\alpha\;d\,\beta\;d\,\gamma\;d\,\lambda\;d\,\mu\;d\,\nu\end{array}\right\}\quad (31)$$

In diesen Ausdrücken bedeutet das Zeichen $\mathfrak{S}$, dass die drei Wurzeln von (29) berücksichtigt werden sollen. Allein wenn ϑ_1^2 ϑ_2^2 ϑ_3^2 die drei Werthe von ϑ^2 sind, so erhält man für ϑ selbst folgende sechs Werthe :

$$+\vartheta_1\quad+\vartheta_2\quad+\vartheta_3\qquad\qquad-\vartheta_1\quad-\vartheta_2\quad-\vartheta_3$$

Das Summenzeichen $\mathfrak{S}$ muss also, um die allgemeinsten Werthe von ξ υ ζ zu erhalten, sowohl auf die positiven wie auf die negativen Wurzeln bezogen werden.

Nun ist :

$$\cos.\,u\,\cos.\,\vartheta\,t=\frac{1}{2}\Big[\cos.\,(u+\vartheta\,t)+\cos.\,(u-\vartheta\,t)\Big]$$

$$\cos.\,u\,\sin.\,\vartheta\,t=\frac{1}{2}\Big[\sin.\,(u+\vartheta\,t)-\sin.\,(u-\vartheta\,t)\Big]$$

Daher wird :

$$\cos.\,u\;\mathfrak{M}\;(\mathfrak{G}\cos.\,\vartheta\,t+\mathfrak{H}\sin.\,\vartheta\,t)=\frac{1}{2}\,\mathfrak{M}\Big[\mathfrak{G}\cos.\,(u+\vartheta\,t)+\mathfrak{G}\cos.\,(u-\vartheta\,t)\Big]$$
$$+\frac{1}{2}\,\mathfrak{M}\Big[\mathfrak{H}\sin.\,(u+\vartheta\,t)-\mathfrak{H}\sin.\,(u-\vartheta\,t)\Big]$$

oder wegen:

$$\frac{\sin.(u+\vartheta t)}{\vartheta} = \int_0^t \cos.(u+\vartheta t)\,dt$$

$$\cos.u\,\mathfrak{M}(\mathfrak{G}\cos.\vartheta t + \mathfrak{H}\sin.\vartheta t) = \frac{1}{2}\mathfrak{M}\Big[\mathfrak{G}\cos.(u+\vartheta t) + \mathfrak{G}\cos.(u-\vartheta t)\Big]$$

$$+\frac{1}{2}\mathfrak{M}\vartheta\Big[\mathfrak{H}\int\cos.(u+\vartheta t)\,dt - \mathfrak{H}\int\cos.(u-\vartheta t)\,dt\Big]$$

Dehnt man die Summe $\mathfrak{S}$ auf die positiven und negativen Wurzeln aus, so kann man schreiben:

$$\mathfrak{S}\cos.u\,\mathfrak{M}(\mathfrak{G}\cos.\vartheta t + \mathfrak{H}\sin.\vartheta t) = \frac{1}{2}\mathfrak{S}\mathfrak{M}\Big[\mathfrak{G}\cos.(u-\vartheta t) + \mathfrak{G}_1\int\cos.(u-\vartheta t)\Big]$$

wobei gesetzt wurde $\vartheta\mathfrak{H} = \mathfrak{G}_1$.

Somit erhält man nun:

$$\left.\begin{aligned}
\xi &= \frac{1}{16\pi^3}\mathfrak{S}\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\mathfrak{M}\Big[\mathfrak{G}\cos.(u-\vartheta t)+\mathfrak{G}_1\int_0^t\cos.(u-\vartheta t)\,dt\Big]\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma\,d\lambda\,d\mu\,d\nu\\
\upsilon &= \frac{1}{16\pi^3}\mathfrak{S}\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\mathfrak{N}\Big[\mathfrak{G}\cos.(u-\vartheta t)+\mathfrak{G}_1\int_0^t\cos.(u-\vartheta t)\,dt\Big]\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma\,d\lambda\,d\mu\,d\nu\\
\zeta &= \frac{1}{16\pi^3}\mathfrak{S}\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\mathfrak{P}\Big[\mathfrak{G}\cos.(u-\vartheta t)+\mathfrak{G}_1\int_0^t\cos.(u-\vartheta t)\,dt\Big]\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma\,d\lambda\,d\mu\,d\nu
\end{aligned}\right\}\quad(32)$$

Diesen Gleichungen kann man mit Hülfe einer geometrischen Betrachtung noch eine andere Form geben. Die hiezu dienliche Figur wird man sich vermittelst der folgenden Erklärung leicht machen können.

Betrachten wir:

$\alpha\,\beta\,\gamma$	als Coordinaten	eines	Punktes	A;
x y z	„	des	„	M;
$\lambda\,\mu\,\nu$	„	eines	„	L;

und verbinden die Punkte A M L mit dem Anfangspunkt O, fällen ferner von M und L auf OA die Perpendikel Mm und Ll, und setzen:

$$\overline{OL} = \varrho_1 \qquad \overline{OM} = R \qquad \overline{OA} = \varrho$$

$$\overline{Ol} = p_1 \qquad \overline{Om} = p$$

so ist:

$$\cos.\ \widehat{\mathrm{L\,O\,l}} = \frac{p_1}{\varrho_1} = \frac{\lambda}{\varrho_1}\,\frac{\alpha}{\varrho} + \frac{\mu}{\varrho_1}\,\frac{\beta}{\varrho} + \frac{\nu}{\varrho_1}\,\frac{\gamma}{\varrho}$$

$$\cos.\ \widehat{\mathrm{M\,O\,m}} = \frac{p}{R} = \frac{\alpha}{\varrho}\,\frac{x}{R} + \frac{\beta}{\varrho}\,\frac{y}{R} + \frac{\gamma}{\varrho}\,\frac{z}{R}$$

Demnach :

$$p_1 \varrho = \alpha \lambda + \beta \mu + \gamma \nu$$

$$p\,\varrho = \alpha x + \beta y + \gamma z$$

Nimmt man die Differenz dieser zwei Ausdrücke, so wird :

$$p\,\varrho - p_1 \varrho = \alpha\,(x - \lambda) + \beta\,(y - \mu) + \gamma\,(z - \nu)$$

Man hat daher vermöge der Gleichung (16), Seite 118 :

$$p\,\varrho - p_1 \varrho = u$$

und folglich :

$$\cos.\ (u - \vartheta t) = \cos.\ (p\,\varrho - p_1\varrho - \vartheta t) = \cos.\ (p\,\varrho - \vartheta t)\ \cos.\ p_1\varrho + \sin.\ (p\,\varrho - \vartheta t)\ \sin.\ p_1 \varrho$$

Führt man diesen Werth von $\cos.\,(u - \vartheta t)$ in die Gleichungen (32) ein, so findet man :

$$\left.\begin{aligned}
\xi &= \frac{1}{16\,\pi^3}\ \mathfrak{S}\!\iiiint\!\!\iint \mathfrak{M}\,\mathfrak{G} \Big[\cos.(\varrho p - \vartheta t)\ \cos.\ \varrho p_1 + \sin.(\varrho p - \vartheta t)\sin.\ \varrho p_1\Big]\, d\alpha \ldots d\nu \\
&\quad + \frac{1}{16\,\pi^3}\int_0^t \mathfrak{S}\!\iiiint\!\!\iint \mathfrak{M}\,\mathfrak{G}_1 \Big[\cos.(\varrho p - \vartheta t)\ \cos.\ \varrho p_1 + \sin.(\varrho p - \vartheta t)\sin.\ \varrho p_1\Big]\, d\alpha \ldots d\nu\, dt \\
\upsilon &= \frac{1}{16\,\pi^3}\ \mathfrak{S}\!\iiiint\!\!\iint \mathfrak{N}\,\mathfrak{G} \Big[\cos.(\varrho p - \vartheta t)\ \cos.\ \varrho p_1 + \sin.(\varrho p - \vartheta t)\sin.\ \varrho p_1\Big]\, d\alpha \ldots d\nu \\
&\quad + \frac{1}{16\,\pi^3}\int_0^t \mathfrak{S}\!\iiiint\!\!\iint \mathfrak{N}\,\mathfrak{G}_1 \Big[\cos.(\varrho p - \vartheta t)\ \cos.\ \varrho p_1 + \sin.(\varrho p - \vartheta t)\sin\ \varrho p_1\Big]\, d\alpha \ldots d\nu\, dt \\
\zeta &= \frac{1}{16\,\pi^3}\ \mathfrak{S}\!\iiiint\!\!\iint \mathfrak{P}\,\mathfrak{G} \Big[\cos.(\varrho p - \vartheta t)\ \cos\ \varrho p_1 + \sin.(\varrho p - \vartheta t)\sin.\ \varrho p_1\Big]\, d\alpha \ldots d\nu \\
&\quad + \frac{1}{16\,\pi^3}\int_0^t \mathfrak{S}\!\iiiint\!\!\iint \mathfrak{P}\,\mathfrak{G}_1 \Big[\cos.(\varrho p - \vartheta t)\ \cos.\ \varrho p_1 + \sin.(\varrho p - \vartheta t)\sin.\ \varrho p_1\Big]\, d\alpha \ldots d\nu\, dt
\end{aligned}\right\}\quad (33)$$

Denkt man sich die Integrationen in Bezug auf $\lambda\ \mu\ \nu$ ausgeführt und setzt zur Abkürzung :

$$\left.\begin{aligned}\iiint \cos.\ \varrho\, p_1\ \mathfrak{G}\ d\lambda\, d\mu\, d\nu &= \mathfrak{K}\\ \iiint \sin.\ \varrho\, p_1\ \mathfrak{G}\ d\lambda\, d\mu\, d\nu &= \mathfrak{K}_1\\ \iiint \cos.\ \varrho\, p_1\ \mathfrak{G}_1\ d\lambda\, d\mu\, d\nu &= \mathfrak{J}\\ \iiint \sin.\ \varrho\, p_1\ \mathfrak{G}_1\ d\lambda\, d\mu\, d\nu &= \mathfrak{J}_1\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

$$16\,\pi^3\, \Pi = \left\{\begin{aligned}&\cos.\ (\varrho\, p - \vartheta\, t)\ \mathfrak{K} + \sin.\ (\varrho\, p - \vartheta\, t)\ \mathfrak{K}_1 + \\ &+ \int_0^t \Big[\cos.\ (\varrho\, p - \vartheta\, t)\ \mathfrak{J} + \sin.\ (\varrho\, p - \vartheta\, t)\ \mathfrak{J}_1\Big]\, d\, t\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (35)$$

so erhält man endlich :

$$\left.\begin{aligned}\xi &= \mathfrak{S}\iiint \mathfrak{M}\ \Pi\ d\alpha\, d\beta\, d\gamma\\ \upsilon &= \mathfrak{S}\iiint \mathfrak{N}\ \Pi\ d\alpha\, d\beta\, d\gamma\\ \zeta &= \mathfrak{S}\iiint \mathfrak{P}\ \Pi\ d\alpha\, d\beta\, d\gamma\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

Dies sind nun endlich die Integrale der Gleichungen (14), und zwar in einer Form, welche eine Interpretation zulässt, so dass wir über den Bewegungszustand des Aethers im Doppelmedium eine Vorstellung erhalten.

Die Gleichung (35) kann auf folgende Weise umgestaltet werden.

Bezeichnet man mit Π_0 den Werth von Π für $t = o$, und durch Π'_0 den Werth von $\frac{d\,\Pi}{d\,t}$ für $t = o$, so hat man :

$$16\,\pi^3\, \Pi_0 = \cos.\ \varrho\, p\ \mathfrak{K} + \sin.\ \varrho\, p\ \mathfrak{K}_1$$
$$16\,\pi^3\, \Pi'_0 = \cos.\ \varrho\, p\ \mathfrak{J} + \sin.\ \varrho\, p\ \mathfrak{J}_1$$

Die Grössen $\mathfrak{K}\ \mathfrak{K}_1\ \mathfrak{J}\ \mathfrak{J}_1$ sind Funktionen von $\alpha\ \beta\ \gamma$, aber nicht von p; wir können daher schreiben :

$$\cos.\ \varrho\, p\ \mathfrak{K} + \sin.\ \varrho\, p\ \mathfrak{K}_1 = F\,(\varrho\, p)$$
$$\cos.\ \varrho\, p\ \mathfrak{J} + \sin.\ \varrho\, p\ \mathfrak{J}_1 = F^1(\varrho\, p)$$

wobei $F\ F^1$ Funktionszeichen sind. Dann aber ist consequenter Weise zu schreiben :

$$\cos.\ (\varrho\, p - \vartheta\, t)\ \mathfrak{K} + \sin.\ (\varrho\, p - \vartheta\, t)\ \mathfrak{K}_1 = F\ (\varrho\, p - \vartheta\, t)$$
$$\cos.\ (\varrho\, p - \vartheta\, t)\ \mathfrak{J} + \sin.\ (\varrho\, p - \vartheta\, t)\ \mathfrak{J}_1 = F^1(\varrho\, p - \vartheta\, t)$$

Demnach wird der Ausdruck (35) :

$$16\,\pi^2\,\Pi = \mathrm{F}\,(\varrho\,\mathrm{p} - \vartheta\,\mathrm{t}) + \int_0^{\mathrm{t}} \mathrm{F}^{\prime}\,(\varrho\,\mathrm{p} - \vartheta\,\mathrm{t})\,\mathrm{d}\,\mathrm{t} \;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (37)$$

Es ist offenbar $\mathrm{F}\,(\varrho\,\mathrm{p})$ der initiale Werth der Verschiebung $\mathfrak{M}\,\xi + \mathfrak{N}\,\upsilon + \mathfrak{P}\,\zeta$, und $\mathrm{F}^{\prime}\,(\varrho\,\mathrm{p})$ die anfängliche Geschwindigkeit.

Wenn wir annehmen, dass am Anfang der Zeit eine Bewegung nur allein in einer unendlich kleinen Entfernung vom Anfangspunkt der Coordinaten erregt worden ist, haben die Funktionen F und $\mathrm{F}^{\prime}$ nur dann endliche Werthe, wenn für die Veränderliche ein sehr kleiner Werth gesetzt wird. Daraus sieht man, dass bei einem solchen Initial-Zustand Π nur dann einen Werth hat, wenn $\varrho\,\mathrm{p} - \vartheta\,\mathrm{t}$ sehr klein oder nahe gleich Null ist, d. h. es ist nach Verlauf der Zeit t nur an den Orten Bewegung vorhanden, für welche $\varrho\,\mathrm{p} - \vartheta\,\mathrm{t} = 0$, oder

$$\mathrm{p} = \frac{\vartheta}{\varrho}\,\mathrm{t}$$

ist; der ganze übrige Raum ist ruhig.

INTERPRETATION DER INTEGRALE.

Betrachten wir die Methode, welche uns zur Integration der Gleichungen (14), Seite 118, geführt hat, genauer, so ersieht man, dass

$$\cos \mathrm{u}\,.\,\varphi \qquad\qquad \cos \mathrm{u}\,.\,\psi \qquad\qquad \cos \mathrm{u}\,.\,\omega$$

partikuläre Integralien der genannten Gleichungen darstellen, denn die in den Klammern stehenden Ausdrücke der Gleichungen (21) wurden Null gesetzt, und daraus $\varphi\;\psi\;\omega$ bestimmt. Daraus folgt, dass $\mathfrak{M}\,\Pi\;\;\mathfrak{N}\,\Pi\;\;\mathfrak{P}\,\Pi$ ebenfalls partikuläre Werthe von $\xi\;\upsilon\;\zeta$ sind, und dass die totalen Werthe dieser Grössen aus unendlich vielen partikulären Werthen zusammengesetzt sind. Die Bewegung eines Punktes $\mathrm{x\;y\;z}$ besteht daher aus unendlich vielen Elementarbewegungen, von denen jede möglicher Weise isolirt auftreten könnte.

Wir wollen nun eine solche Elementarbewegung

$$\mathfrak{M}\,\Pi \qquad\qquad \mathfrak{N}\,\Pi \qquad\qquad \mathfrak{P}\,\Pi$$

näher betrachten.

Betrachten wir zunächst die Bewegungen aller Punkte, welche in einer in m auf OA senkrechten Ebene liegen, so hat für alle Punkte dieser Ebene p den gleichen Werth. Demnach machen alle Punkte dieser Ebene identische Elementarbewegungen, denn der Grösse nach stimmen diese Bewegungen überein, weil Π nur von p abhängt, und der Richtung nach stimmen diese Bewegungen überein, weil $\mathfrak{M}\;\mathfrak{N}\;\mathfrak{P}$ nur allein von $\alpha\;\beta\;\gamma$ abhängen. Für eine zweite auf OA senkrechte Ebene hat p einen andern Werth, mithin auch Π; allein $\mathfrak{M}\ \mathfrak{N}\ \mathfrak{P}$ (die, wie gesagt, nur von $\alpha\ \beta\ \gamma$ abhängen, sich also nur ändern, wenn die Lage des Punktes A verändert wird) haben die gleichen Werthe wie in der ersten Ebene. Die Schwingungsrichtungen (Polarisationsrichtungen) in allen auf AO senkrechten Ebenen stimmen also überein.

Aendert sich p um $\frac{2\pi}{\varrho}$, so erhält Π wiederum den gleichen Werth. Denkt man sich also den ganzen unendlichen Raum durch Ebenen getheilt, die auf OA senkrecht stehen, und von denen je zwei unmittelbar auf einander folgende um $\frac{2\pi}{\varrho}$ abstehen, so sind für einen bestimmten Zeitmoment (für ein bestimmtes t) die Bewegungszustände in allen Schichten von der Dicke $\frac{2\pi}{\varrho}$ gleich gross. Wir wollen die im schwingenden Zustand befindliche Aethermasse einer Schichte eine elementare Lichtwelle nennen, und die Dicke dieser Schichte Wellenlänge. Nennen wir diese λ, setzen also:

$$\frac{2\pi}{\varrho} = \lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Aendert sich t um $\frac{2\pi}{\vartheta}$, so erhält Π für einen und denselben Werth von p wiederum den gleichen Werth, d. h. der Schwingungszustand in einer bestimmten, auf OA senkrechten Ebene ist ein periodischer nach Verlauf einer Zeit $\frac{2\pi}{\vartheta}$ wiederkehrender. $\frac{2\pi}{\vartheta}$ drückt also in einer Elementarbewegung die Schwingungszeit des Massenmittelpunktes einer Aetherhülle aus. Nennen wir diese Schwingungszeit T, setzen also:

$$\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\vartheta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Während der Zeit T einer Schwingung rückt die ganze wandelbare Form der Welle um $\frac{2\pi}{\varrho} = \lambda$ vorwärts. Die Geschwindigkeit v der Fortpflanzung dieser Bewegung ist demnach gleich dem Quotienten aus der Wellenlänge und der Schwingungszeit. Setzt man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v, so hat man:

$$\mathrm{v} = \frac{\lambda}{\mathrm{T}} = \frac{\frac{2\pi}{\varrho}}{\frac{2\pi}{\vartheta}} = \frac{\vartheta}{\varrho}$$

Jeder bestimmte Punkt des ganzen unbegränzten Mediums veranlasst also in dem ganzen Medium einen Bewegungszustand, dem folgende Eigenschaften zukommen.

Für einen bestimmten Punkt haben $\alpha\ \beta\ \gamma$ bestimmte Werthe. Nun sind l m n p q r (Ausdrücke 22, S. 121) reine Funktionen von $\alpha\beta\gamma$, daher gibt die kubische Gleichung (29) für jeden bestimmten Punkt $(\alpha\ \beta\ \gamma)$ drei Werthe $\vartheta_1^2\ \vartheta_2^2\ \vartheta_3^2$ für ϑ^2, und diese Werthe in die Gleichungen (28) gesetzt, so erhält man für $\mathfrak{M}\ \mathfrak{N}\ \mathfrak{P}$ die drei Systeme von Werthen:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_1 & \mathfrak{N}_1 & \mathfrak{P}_1 \\ \mathfrak{M}_2 & \mathfrak{N}_2 & \mathfrak{P}_2 \\ \mathfrak{M}_3 & \mathfrak{N}_3 & \mathfrak{P}_3 \end{array}$$

Betrachten wir zunächst die Bewegung, welche einem solchen System, z. B. dem System

$$\vartheta_1 \quad \mathfrak{M}_1 \quad \mathfrak{N}_1 \quad \mathfrak{P}_1$$

entspricht, so besteht diese Bewegung aus einer Reihenfolge von auf OA senkrechten Wellen von der Länge $\lambda = \frac{2\pi}{\varrho}$. Die Schwingungszeit jedes Aethertheilchens sämmtlicher Wellen ist gleich $T = \frac{2\pi}{\vartheta_1}$, und diese Wellen bewegen sich längs der Linie OA fort mit einer Geschwindigkeit $v = \frac{\vartheta}{\varrho}$. Die Schwingungsrichtungen stimmen für alle Aethertheilchen überein und werden durch die Werthe von $\mathfrak{M}_1\ \mathfrak{N}_1\ \mathfrak{P}_1$ bestimmt.

Aehnliche Wellensysteme liefern die beiden andern Wurzeln $\vartheta_2\ \vartheta_3$. Wir erhalten daher drei Wellensysteme, deren Zustand durch folgendes Schema anschaulich wird.

	Wellensystem für ein bestimmtes $\alpha\,\beta\,\gamma$. I.	II.	III.
Wellenlänge	$\lambda = \frac{2\pi}{\varrho}$	$\lambda = \frac{2\pi}{\varrho}$	$\lambda = \frac{2\pi}{\varrho}$
Schwingungszeit.	$T_1 = \frac{2\pi}{\vartheta_1}$	$T_2 = \frac{2\pi}{\vartheta_2}$	$T_3 = \frac{2\pi}{\vartheta_3}$
Fortpflanzungsgeschwindigkeit .	$v_1 = \frac{\vartheta_1}{\varrho}$	$v_2 = \frac{\vartheta_2}{\varrho}$	$v_3 = \frac{\vartheta_3}{\varrho}$
Polarisationsrichtungen . . .	$\mathfrak{M}_1\,\mathfrak{N}_1\,\mathfrak{P}_1$	$\mathfrak{M}_2\,\mathfrak{N}_2\,\mathfrak{P}_2$	$\mathfrak{M}_3\,\mathfrak{N}_3\,\mathfrak{P}_3$

Es ist von grösster Wichtigkeit, zu bemerken, dass zwischen ϑ und ϱ oder zwischen ϑ und λ eine gewisse Abhängigkeit besteht. Denn ϑ wird durch $l\,m\,n\,p\,q\,r$ bestimmt, diese Grössen hängen aber von $\alpha\,\beta\,\gamma$ oder von ϱ ab. Jedes individuelle ϱ liefert demnach drei individuelle Werthe für ϑ^2. Auch muss noch bemerkt werden, dass $l\,m\,n\,p\,q\,r$ von der Constitution des Mediums abhängt, dass mithin ϑ^2 eine Funktion nicht nur von $\alpha\,\beta\,\gamma$ oder von ϱ, sondern auch von der Natur des Mediums ist. Endlich ist noch in Erinnerung zu bringen, dass die drei Polarisationsrichtungen, welche durch $\mathfrak{M}_1\,\mathfrak{N}_1\,\mathfrak{P}_1$ $\mathfrak{M}_2\,\mathfrak{N}_2\,\mathfrak{P}_2$ $\mathfrak{M}_3\,\mathfrak{N}_3\,\mathfrak{P}_3$ bestimmt werden, auf einander senkrecht stehen.

Mit Worten ausgesprochen, ist der Sinn des aufgestellten Schemas folgender:

1. Jeder individuelle Punkt A des Mediums veranlasst drei Systeme von Wellen.
2. Diese drei Wellensysteme stehen senkrecht auf OA, sind also zu einander parallel.
3. In jedem einzelnen der drei Wellensysteme sind die Bewegungsrichtungen (Polarisationsrichtungen) parallel.
4. Die Polarisationsrichtungen in den drei Wellensystemen stehen auf einander senkrecht.
5. Die Wellenlängen stimmen in den drei Systemen überein, und hängen nur allein von der Wahl des Punktes A ab.
6. Die Schwingungszeiten sind in den drei Wellensystemen nicht gleich gross, und hängen auch von der Natur des Mediums ab; wenn also in zwei verschiedenen Medien durch gleich grosse Werthe von ϱ Wellen erregt werden, so sind zwar

die Wellenlängen in beiden Medien gleich gross, allein die Schwingungszeiten sind ungleich.

7. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten sind in den drei Wellensystemen ungleich, und diese Fortpflanzungsgeschwindigkeiten hängen auch von der Natur des Mediums ab.
8. Die Schwingungsgeschwindigkeiten, so wie auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten, stehen in einem Zusammenhang mit der Wellenlänge und mit der Natur des Mediums.

Hiermit ist nun der gesammte Gehalt eines partikulären Integrales ausgesprochen. Nun besteht aber das totale Integral aus unendlich vielen partikulären Integralen, die sich ergeben, wenn man für $\alpha\ \beta\ \gamma$ alle möglichen Werthe annimmt. Die ganze Bewegung besteht also aus unendlich vielen dreifachen Wellensystemen und die Bewegungsrichtungen der Wellensysteme sind im Allgemeinen verschieden, weil sie mit der Richtung $A\,O$ zusammenfallen.

Um nun diese Ergebnisse der Rechnung mit den Beobachtungen in Zusammenhang zu bringen, müssen insbesondere folgende Fragen beantwortet werden:

1. Wodurch wird die Farbe bestimmt?
2. Wodurch wird ein Lichtstrahl bestimmt?

Um diese Fragen zu beantworten, ist es nothwendig, die Beziehung, welche zwischen der Schwingungsgeschwindigkeit und Wellenlänge besteht, ausfindig zu machen, was wir im Folgenden wenigstens für ein einfach brechendes Medium thun werden.

ABHÄNGIGKEIT ZWISCHEN WELLENLÄNGE, FORTPFLANZUNGSGESCHWINDIGKEIT UND SCHWINGUNGSGESCHWINDIGKEIT IN EINEM EINFACH BRECHENDEN MEDIUM.

In einem einfach brechenden Medium, in welchem also die Elastizität nach allen Richtungen um jeden Punkt herum gleich ist, regen alle von dem Anfangspunkt der Coordinaten gleich weit entfernten Atome identische Elementarwellen an, es ist also in diesem Falle genügend, die Bewegungsverhältnisse irgend einer dieser Elementarwellen zu untersuchen, und wir nehmen deshalb den Erregungspunkt in der Axe $O\,x$ an, d. h. wir setzen:

$$\beta = 0 \qquad \gamma = 0 \qquad \text{demnach } \Delta u = \alpha\,\Delta x$$

Für ein Medium, das nach allen Richtungen einerlei Elastizität hat, ist vermöge der Ausdrücke (8) und (9), Seite 116:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{C} \qquad \mathfrak{F} = \mathfrak{G} = \mathfrak{D} = o$$

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{\mu_1}{r}\left[J(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r} J(r)\right)}{dr} \Delta x^2\right]$$

$$\mathfrak{B}_1 = \frac{\mu_1}{r}\left[J(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r} J(r)\right)}{dr} \Delta y^2\right]$$

$$\mathfrak{C}_1 = \frac{\mu_1}{r}\left[J(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r} J(r)\right)}{dr} \Delta z^2\right]$$

$$\mathfrak{F}_1 = o \qquad \mathfrak{G}_1 = o \qquad \mathfrak{D}_1 = o$$

und daher werden die Ausdrücke (22), Seite 121 :

$$\left.\begin{aligned} l &= \frac{1}{2}(\mathfrak{A} + \varepsilon) - S\,\frac{\mu_1}{r}\left[J(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r} J(r)\right)}{dr} \Delta x^2\right]\left(\sin.\frac{1}{2}\,\alpha\,\Delta x\right)^2 \\ m &= \frac{1}{2}(\mathfrak{A} + \varepsilon) - S\,\frac{\mu_1}{r}\left[J(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r} J(r)\right)}{dr} \Delta y^2\right]\left(\sin.\frac{1}{2}\,\alpha\,\Delta x\right)^2 \\ n &= \frac{1}{2}(\mathfrak{A} + \varepsilon) - S\,\frac{\mu_1}{r}\left[J(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r} J(r)\right)}{dr} \Delta z^2\right]\left(\sin.\frac{1}{2}\,\alpha\,\Delta x\right)^2 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (38)$$

$$p = o \qquad q = o \qquad r = o$$

Vermöge $p = q = r = o$ wird die kubische Gleichung (29), Seite 122 :

$$(l - \vartheta^2)(m - \vartheta^2)(n - \vartheta^2) = o$$

Demnach hat man :

$$\vartheta_1^2 = l \qquad \vartheta_2^2 = m \qquad \vartheta_3^2 = n \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (39)$$

oder weil vermöge des Ausdrucks (38) $m = n$ ist :

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_1^2 &= \frac{1}{2}(\mathfrak{A} + \varepsilon) - S\,\frac{\mu_1}{r}\left[J(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r} J(r)\right)}{dr} \Delta x^2\right]\left(\sin.\frac{1}{2}\,\alpha\,\Delta x\right)^2 \\ \vartheta_2^2 = \vartheta_3^2 &= \frac{1}{2}(\mathfrak{A} + \varepsilon) - S\,\frac{\mu_1}{r}\left[J(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r} J(r)\right)}{dr} \Delta y^2\right]\left(\sin.\frac{1}{2}\,\alpha\,\Delta x\right)^2 \end{aligned}\right\} \quad (40)$$

In diesen Summen haben nur diejenigen Glieder einen ansehnlichen Werth, für welche Δx und r klein ist, denn wie auch α angenommen werden mag, so bleibt $\left(\sin.\frac{1}{2}\,\alpha\,\Delta x\right)^2$

stets kleiner als die Einheit, und die Funktionen $J(r)$ und $\frac{d\left(\frac{1}{r} J(r)\right)}{dr}$ haben nur für sehr kleine Werthe von r einen beträchtlicheren Werth. Nun ist:

$$\left(\sin.\frac{1}{2}\alpha\,\varDelta x\right)^2 = \frac{1}{2}(1-\cos.\alpha\,\varDelta x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^2\,\varDelta x^2}{1.2} - \frac{\alpha^4\,\varDelta x^4}{1..4} + \frac{\alpha^6\,\varDelta x^6}{1....6} - \ldots\ldots\right)$$

Daher wird:

$$\vartheta_2^2 = \frac{1}{2}(\mathfrak{A}+\varepsilon) - S\frac{\mu_1}{r}\left[J(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r}J(r)\right)}{dr}\varDelta y^2\right]\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^2\,\varDelta x^2}{1.2} - \frac{\alpha^4\,\varDelta x^4}{1..4} + \frac{\alpha^6\,\varDelta x^6}{1....6} - \ldots\ldots\ldots\right)$$

oder:

$$\left.\begin{aligned}
\vartheta_2^2 = \frac{1}{2}(\mathfrak{A}+\varepsilon) &- \frac{1}{2}\alpha^2 S\frac{\mu_1}{r}\left[J(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r}J(r)\right)}{dr}\varDelta y^2\right]\frac{\varDelta x^2}{1.2}\\
&+ \frac{1}{2}\alpha^4 S\frac{\mu_1}{r}\left[J(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r}J(r)\right)}{dr}\varDelta y^2\right]\frac{\varDelta x^4}{1..4}\\
&- \frac{1}{2}\alpha^6 S\frac{\mu_1}{r}\left[J(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r}J(r)\right)}{dr}\varDelta y^2\right]\frac{\varDelta x^6}{1....6}\\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad (41)\,^{*)}$$

Man erhält demnach für ϑ_2^2 einen Ausdruck von der Form:

$$\vartheta_2^2 = A_0 + A_2\alpha^2 + A_4\alpha^4 + A_6\alpha^6 + \ldots.$$

wobei $A_0\,A_2\,A_4\,A_6$ Grössen sind, die von der Beschaffenheit des Mediums abhängen. Allein A_0 hängt nur allein von den Körperatomen ab und $A_2\,A_4\,A_6$ vom Aether.

Es ist klar, dass die Coeffizienten $A_2\,A_4\,A_6$ sehr kleine Grössen sind, denn entweder sind die Funktionen $J(r)$, $\frac{d\left(\frac{1}{r}J(r)\right)}{dr}$, oder es sind die Werthe von $\varDelta x$ sehr klein; wir dürfen uns daher wohl erlauben, nur die drei ersten Glieder der letzten Gleichung in Rechnung zu bringen, setzen also:

$$\vartheta_2^2 = A_0 + A_2\alpha^2 + A_4\alpha^4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (42)$$

---

*) Es wäre sehr wichtig, wenn man die in (41) vorkommende Summe berechnen, oder wenigstens die analytische Natur dieser Funktion angeben könnte. Wenn sich beweisen liesse, dass sie eine periodische Funktion wäre, so würde vielleicht darin der Grund zu den dunkeln Linien des Spektrums zu suchen sein.

Hiermit ist nun eine Abhängigkeit zwischen ϑ_2 und α aufgefunden, welche, wie wir bald sehen werden, die Farbenzerstreuung des Lichtes bei Brechungen erklärt. Bevor wir jedoch zur Erklärung der Dispersion schreiten, wollen wir vorerst noch die Schwingungsrichtungen in den drei Elementarwellen untersuchen.

Setzen wir in den Gleichungen (28), S. 122, $p = q = r = o$, $m = n$, so werden dieselben:

$$(l - \vartheta^2)\,\mathfrak{M} = o \qquad (m - \vartheta^2)\,\mathfrak{N} = o \qquad (m - \vartheta^2)\,\mathfrak{P} = o$$

Demnach erhalten wir:

$$\left.\begin{array}{lll} (l - \vartheta_1^2)\,\mathfrak{M}_1 = o & (m - \vartheta_1^2)\,\mathfrak{N}_1 = o & (m - \vartheta_1^2)\,\mathfrak{P}_1 = o \\ (l - \vartheta_2^2)\,\mathfrak{M}_2 = o & (m - \vartheta_2^2)\,\mathfrak{N}_2 = o & (m - \vartheta_2^2)\,\mathfrak{P}_2 = o \\ (l - \vartheta_3^2)\,\mathfrak{M}_3 = o & (m - \vartheta_3^2)\,\mathfrak{N}_3 = o & (m - \vartheta_3^2)\,\mathfrak{P}_3 = o \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (43)$$

Allein es ist:

$$\vartheta_1 - l = o \qquad \vartheta_2^2 - m = o \qquad \vartheta_3^2 - m = o$$

Den Gleichungen (43) kann also entsprochen werden durch:

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{M}_1 \text{ unbestimmt} & \mathfrak{N}_1 = o & \mathfrak{P}_1 = o \\ \mathfrak{M}_2 = o & \mathfrak{N}_2 \text{ unbestimmt} & \mathfrak{P}_2 \text{ unbestimmt} \\ \mathfrak{M}_3 = o & \mathfrak{N}_3 \text{ unbestimmt} & \mathfrak{P}_3 \text{ unbestimmt} \end{array}$$

Berücksichtigt man noch, dass $\mathfrak{M}_1^2 + \mathfrak{N}_1^2 + \mathfrak{P}_1^2 = 1$ ist, so folgt wegen $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{P}_1 = o$ $\mathfrak{M}_1 = 1$.

Die Schwingungsrichtung der Elementarwelle, welcher ϑ_1^2 entspricht, ist daher parallel mit der Axe der x oder senkrecht auf der Wellenebene, und die Schwingungsrichtung in den beiden andern zusammenfallenden Wellenebenen fällt daher in die Wellenebene selbst oder steht senkrecht auf der Fortpflanzungsrichtung der Welle. Nur diese letztere gibt Lichtwirkungen, daher wir auch nur die Beziehung zwischen α und ϑ_2^2 gesucht haben. Die physikalische Bedeutung der Welle, in welcher die Schwingungsrichtung mit der Fortpflanzungsrichtung zusammenfällt, ist vorläufig noch nicht enträthselt, ich vermuthe aber, dass sie Wärmewirkungen hervorbringt, obgleich ich wohl weiss, dass die Physiker gefunden haben wollen, dass auch die strahlende Wärme auf Transversalschwingungen beruhe.

DIE FARBE.

Bei dem Uebergang eines farbigen Lichtstrahles aus einem Medium in ein anderes tritt im Allgemeinen (wenn nämlich die Richtung des einfallenden Strahles auf der Trennungsfläche der Medien nicht senkrecht steht) eine Ablenkung der Richtung, aber keine

Aenderung der Farbe ein. Es muss also die Farbe durch diejenige Grösse bestimmt werden, welche bei dem Uebergang eines Strahles constant bleibt. Nach der von *Cauchy* entwickelten Theorie der Brechung ändert sich bei dem Uebergang eines Strahles die Wellenlänge, bleibt dagegen die Schwingungszeit constant; wir müssen also schliessen, dass die Farbe durch die Schwingungszeit und nicht durch die Wellenlänge bestimmt wird.

Es ist für einen Strahl von bestimmter Farbe in einem bestimmten Medium

$$v = \frac{\lambda\,\vartheta}{2\,\pi}$$

Für einen Strahl von anderer Farbe in einem andern Medium

$$v_1 = \frac{\lambda_1\,\vartheta_1}{2\,\pi}$$

Demnach:

$$\frac{v}{v_1} = \frac{\lambda\,\vartheta}{\lambda_1\,\vartheta_1}$$

Für einen Strahl von bestimmter Farbe in zwei verschiedenen Medien ist aber $\vartheta = \vartheta_1$, demnach:

$$\frac{v}{v_1} = \frac{\lambda}{\lambda_1} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (44)$$

d. h. die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des Lichtes von bestimmter Farbe in zwei verschiedenen Medien verhalten sich wie die Wellenlängen in den zwei Medien. Allein das Verhältniss der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten ist gleich dem Brechungsverhältniss. Bezeichnet man dieses mit $\varkappa$, so hat man:

$$\varkappa = \frac{v}{v_1} = \frac{\lambda}{\lambda_1}$$

und hieraus folgt:

$$\lambda_1 = \frac{\lambda}{\varkappa} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (45)$$

d. h. wenn ein Strahl von einer bestimmten Farbe aus einem Medium $(\lambda\,v)$ in ein Medium $(\lambda_1\,v_1)$ übergeht, findet man die Wellenlänge λ_1 in dem zweiten Medium, wenn man die Wellenlänge λ im ersten Medium durch das Brechungsverhältniss $\varkappa$ dividirt.

DIE DISPERSION DES LICHTES.

Ein in der Axe $O\,x$ liegender von O um α entfernter Punkt regt eine Elementarwelle an, deren Wellenlänge $\lambda = \frac{2\,\pi}{\alpha}$ ist und welcher eine Schwingungszeit ϑ entspricht. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser Welle ist:

$$v = \frac{\frac{2\pi}{\alpha}}{\frac{2\pi}{\vartheta}} = \frac{\vartheta}{\alpha}$$

Zwischen ϑ und α besteht aber die Beziehung (42). Eliminirt man aus derselben ϑ, indem man dafür den Werth $\vartheta = \alpha v$ setzt, so folgt aus dieser Beziehung:

$$v^2 = \frac{A_0}{\alpha^2} + A_2 + A_4 \alpha^2 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (46)$$

Dies ist also die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Elementarwelle, welche der von o um α entfernte Punkt anregt, und diese hängt von α ab. Allein die totale Bewegung besteht aus allen Wellen, welche sämmtliche Punkte des Mediums anregen; man erhält also die Totalität der Wellen, welche längs der positiven Richtung der Axe $o\,x$ fortlaufen, wenn man für α alle Werthe von 0 bis ∞ setzt. Allein vermöge der Beziehung (46) hat jede Elementarwelle dieses Wellensystems eine andere Wellenlänge, eine andere Schwingungszeit, mithin eine andere Farbe, und auch eine andere Fortpflanzungsgeschwindigkeit, vorausgesetzt, dass die Coeffizienten $A_0\,A_4$ von Null verschieden sind.

Nach den physikalischen Thatsachen muss man annehmen, dass weisses Licht zum Vorschein kommt, wenn alle farbigen Strahlen zusammenfallen, also alle gleiche Fortpflanzungsgeschwindigkeit haben. Nach den Thatsachen der Physik muss man ferner annehmen, dass sich im leeren Raum weisses Licht unzerlegt fortpflanzt, und dass selbst in der Luft kaum farbige Wirkungen auftreten, wir müssen daher schliessen, dass für den leeren Raum, so wie auch für Luft A_0 und A_4 entweder ganz genau Null, oder doch verschwindend klein sind. Für den leeren Raum ist aber wirklich nach unserer Theorie A_0 absolut gleich Null, denn im leeren Raum gibt es keine Körperatome, sondern nur Aetheratome. A_4 ist aber nicht absolut Null, wohl aber ungemein klein, wie eine Vergleichung der Ausdrücke (41) und (42) zeigt. Unsere Theorie ist also hier mit den Thatsachen in guter Uebereinstimmung, und wir können daher annehmen, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten im leeren Raum und auch in der Luft für alle Farben einerlei Werth haben. Nennen wir nun $\mathfrak{C}$ diese Fortpflanzungsgeschwindigkeit, l die Wellenlänge einer gewissen Farbe in der Luft oder im leeren Raum, $\varkappa$ das Brechungsverhältniss, das dem Uebergang des Strahles aus Luft in ein brechendes Medium entspricht, so ist vermöge (44) und (45):

$$\frac{v}{\mathfrak{C}} = \frac{\lambda}{l} = \frac{1}{\varkappa}$$

Wir erhalten demnach vermöge (46) und mit Berücksichtigung, dass $\alpha = \frac{2\pi}{\lambda}$ ist:

$$\frac{\mathfrak{C}^2}{\varkappa^2} = \frac{A_0}{(2\pi)^2}\,\frac{l^2}{\varkappa^2} + A_2 + A_4\,(2\pi)^2\,\frac{\varkappa^2}{l^2}$$

Aus dieser Gleichung folgt:

$$\frac{1}{\varkappa^4} - \frac{A_2}{\mathfrak{G}^2 - \frac{A_0}{(2\pi)^2}\, l^2}\,\frac{1}{\varkappa^2} = \frac{A_4\,(2\pi)^2}{l^2\left[\mathfrak{G}^2 - \frac{A_0}{(2\pi)^2}\, l^2\right]}$$

und hieraus ergibt sich:

$$\frac{1}{\varkappa^2} = \frac{1}{2}\,\frac{A_2}{\mathfrak{G}^2 - \frac{A_0}{(2\pi)^2}\, l^2}\left[1 + \sqrt{1 + 4\,\frac{A_4\,(2\pi)^2}{A_2^2\, l^2}\left(\mathfrak{G}^2 - \frac{A_0}{(2\pi)^2}\, l^2\right)}\right] \quad . \; . \; . \quad (47)$$

Allein da die Brechungsquotienten der verschiedenen Strahlen so wenig verschieden sind, so muss man annehmen, dass sowohl $\frac{A_0}{(2\pi)}\, l^2$, als auch $\frac{A_4\,(2\pi)^2}{l^2}$ im Verhältniss zu A_2 sehr kleine Grössen sind; es ist daher erlaubt, die Wurzelgrösse annähernd zu berechnen, und dann findet man:

$$\frac{1}{\varkappa^2} = \frac{A_2}{\mathfrak{G}^2 - \frac{A_0}{(2\pi)^2}\, l^2} + \frac{A_4}{A_2}\,\frac{(2\pi)^2}{l^2}$$

oder auch weil überhaupt $\varkappa$ mit l nur wenig veränderlich ist, also $\frac{A_0}{(2\pi)^2}\, l^2$ gegen $\mathfrak{G}^2$ klein sein muss, also annähernd

$$\frac{1}{\mathfrak{G}^2 - \frac{A_0}{(2\pi)^2}\, l^2} = \frac{1}{\mathfrak{G}^2} + \frac{A_0\, l^2}{(2\pi)^2\, \mathfrak{G}^4}$$

gesetzt werden darf:

$$\frac{1}{\varkappa^2} = \frac{A_2}{\mathfrak{G}^2} + \frac{A_0\, A_2}{(2\pi)^2\, \mathfrak{G}^4}\, l^2 + \frac{A_4}{A_2}\,\frac{(2\pi)^2}{l^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (48)$$

so ist, wenn wir zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{A_2}{\mathfrak{G}^2} \\ a_1 &= \frac{A_0\, A_2}{(2\pi)^2\, \mathfrak{G}^4} \\ a_2 &= \frac{A_4}{A_2}\,(2\pi)^2 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (49)$$

setzen:

$$\frac{1}{\varkappa^2} = a_0 + a_1\, l^2 + \frac{a_2}{l^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (50)$$

Diese Gleichung gibt die Brechungsverhältnisse verschiedenfarbiger Strahlen und sagt aus, dass in allen Medien Farbenzerstreuungen eintreten, in welchen a_1 und a_2 oder A_0 und A_4 nicht gleich Null sind, bestimmt also, wenn sie richtig ist, die Dispersion des Lichtes. Wir werden diese Formel später einer möglichst strengen Prüfung mit Thatsachen unterwerfen, zunächst wollen wir aber noch einige die Dispersion betreffende Verhältnisse berühren.

WARUM GIBT ES KEINE DISPERSION DER KÖRPER-SCHWINGUNGEN ?

Legen wir uns die interessante Frage zur Beantwortung vor, warum es in dem Schwingungssysteme der Körperatome keine der Dispersion analoge Erscheinung gibt.

Es ist bereits Seite 117 bemerkt worden, dass wir die Schwingungsgesetze eines Körpermediums erhalten, wenn wir in die Rechnungsresultate, welche die Aetherschwingungen ausdrücken, die Grössen

$$H(\varrho) = \mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{C} = \mathfrak{D} = \mathfrak{E} = \mathfrak{F} = \varepsilon = 0$$

setzen und das Symbol $J(r)$ mit $f(r)$ und μ mit m_1 vertauschen.

Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Elementarätherwelle haben wir gefunden, Gleichung (46), Seite 135 :

$$v^2 = \frac{A_0}{\alpha^2} + A_2 + A_4 \alpha^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (51)$$

wobei ist :

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2} (\mathfrak{A} + \varepsilon) \\ A_2 &= -\frac{1}{2} S \frac{\mu_1}{r} \left[J(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r} J(r)\right)}{dr} \Delta y^2 \right] \frac{\Delta x^2}{1.2} \\ A_4 &= +\frac{1}{2} S \frac{\mu_1}{r} \left[J(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r} J(r)\right)}{dr} \Delta y^2 \right] \frac{\Delta x^4}{1.2.3.4} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (52)$$

Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v einer elementaren Körperatom-Welle haben wir demnach einen Ausdruck von der Form :

$$V^2 = B_2 + B_4 \alpha^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (53)$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} B_2 &= -\frac{1}{2} S \frac{m_1}{r} \left[f(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r} f(r)\right)}{dr} \Delta y^2 \right] \frac{\Delta x^2}{1.2} \\ B_4 &= +\frac{1}{2} S \frac{m_1}{r} \left[f(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r} f(r)\right)}{dr} \Delta y^2 \right] \frac{\Delta x^4}{1.2.3.4} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (54)$$

Wenn wir berücksichtigen : 1) dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Aetherwelle ungefähr 4000 Meilen beträgt, die des Schalles aber nur 400 Meter; 2) dass der Unterschied der Brechbarkeit der Lichtstrahlen von verschiedener Farbe nicht gross ist; 3) dass in dem System der Körperatomwellen die Erscheinung der Dispersion entweder gar nicht oder doch nur in einem äusserst schwachen Maasse stattfindet, so können wir aus den Gleichungen (51) bis (54) mehrere interessante Folgerungen ziehen.

Aus der Thatsache, dass V gegen v beinahe verschwindend klein ist, folgt zunächst, dass der Coeffizient B_2 im Vergleich zu A_2 verschwindend klein ist, obgleich die Masse m_1 eines Körperatoms viel grösser ist als die Masse μ einer Aetherhülle. Dies folgt auch aus unserer Theorie, wie aus folgenden Bemerkungen erhellen wird.

Es ist die Wechselwirkung $J(r)$ zweier Aetheratome stets abstossend; in den Ausdrücken (52) haben daher alle Glieder der Summe einerlei Zeichen, und der Gesammtbetrag dieser Glieder und insbesondere der Werth von A_2 kann also, namentlich wenn $J(r)$, d. h. die Kraft, mit welcher sich zwei Aethermasseneinheiten in der Entfernung r abstossen, verhältnissmässig sehr gross ist, sehr beträchtlich werden. Anders verhält es sich mit dem Werth von B_2. Vermöge der Gleichung (21), S. 77, ist $S\, m_1 \frac{f(r)}{r} \Delta x^2 = o$, der Werth von B_2 wird demnach:

$$B_2 = -\frac{1}{2} S\, m_1 \frac{d\left(\frac{1}{r} f(r)\right)}{dr} \frac{\Delta y^2 \, \Delta x^2}{r}$$

Allein $f(r)$, d. h. die Wechselwirkung zweier Dynamiden ist, wie wir Seite 55, Gleichung (7) gezeigt haben, je nach dem Werth von r positiv oder negativ; von den Gliedern der obigen Summe ist daher eine Parthie positiv, eine andere Parthie negativ; diese Summe ist also die Differenz einer Reihe von positiven und einer Reihe von negativen Zahlen, diese Differenz kann also sehr klein ausfallen und wird es wohl auch, weil der stets positiv bleibende Faktor $\frac{\Delta y^2 \, \Delta x^2}{r}$ eine sehr kleine Grösse ist. Die rasche Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Aetherwelle und langsame Fortpflanzung der Schallwelle findet also ihre Erklärung vorzugsweise in dem Umstand, dass alle Glieder der Summe in dem Ausdruck für A_2 einerlei Zeichen haben, dass dagegen für ein Körpermedium

$$S\, m_1 \frac{f(r)}{r} \Delta x^2 = o$$

ist.

Ob in den Körpermedien Dispersion stattfindet oder nicht, und wenn sie stattfindet, in welchem Maasse sie auftritt, hängt von dem Werth von B_4 ab. Wäre B_4 absolut gleich Null, so wäre $V^2 = B_2$, d. h. die Fortpflanzungsgeschwindigkeit wäre dann unabhängig von der Wellenlänge und es gäbe dann gar keine Dispersion. Ist dagegen B_4 zwar nicht Null, aber doch sehr klein, so ist eine sehr schwache Dispersion vorhanden. Nun ist:

$$B_4 = \frac{1}{2} S \frac{m_1}{r} \left[f(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r} f(r)\right)}{dr} \Delta y^2 \right] \frac{\Delta x^4}{1.2.3.4}$$

wohl nicht Null, gewiss aber eine äusserst kleine Grösse, weil die Glieder der Summe nicht immer einerlei Zeichen haben, weil ferner der Faktor Δx^4 eine ungemein kleine Grösse ist, weil endlich $f(r)$ mit dem Wachsen von r sehr rasch abnimmt.

Die später folgenden numerischen Rechnungen werden zeigen, dass die Coeffizienten a_0 und a_1 positiv sind, der Coeffizient a_2 dagegen negativ ist. A_0 und A_2 sind daher vermöge (49) positiv, A_4 dagegen ist negativ.

Allein es ist:

$$A_4 = -\frac{1}{2} S \frac{\mu_1}{r}\left[J(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r} J(r)\right)}{d r} \Delta y^2\right] \frac{\Delta x^2}{1.2}$$

Dieser Ausdruck kann daher, weil r, $J(r)$ und Δx^2 stets positiv ist, nur dann positiv werden, wenn $\frac{d\left(\frac{1}{r} J(r)\right)}{d r} \Delta y^2$ negativ und wenigstens für eine gewisse Reihe von Werthen von r numerisch grösser als $J(r)$ ausfällt.

Aus der Formel (50) ergibt sich das interessante Resultat, dass zweierlei Ursachen vorhanden sind, welche Dispersion veranlassen; denn es sind in dieser Formel zwei von der Wellenlänge abhängige Glieder vorhanden. Das Glied $\frac{a_2}{l^2}$ hängt nur von der Wirkung des Aethers auf sich selbst ab, das Glied $a_1 l^2$ drückt dagegen die Einwirkung des Körpermediums auf das Aethermedium aus, denn vermöge (8), Seite 116, ist:

$$A_0 = \frac{1}{2}(\mathfrak{A} + \varepsilon) = \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2} S m_1 \left[\frac{G(r)}{r} + \frac{1}{r}\frac{d\left(\frac{1}{r} G(r)\right)}{d r} \Delta x^2\right]$$

Ich habe zuerst vermuthet, dass die Dispersion $a_1 l^2$, welche das Körpermedium verursacht, beträchtlicher sein würde als jene, welche das Aethermedium hervorbringt; allein so ist es nicht. Die numerischen Rechnungen zeigen, dass die Werthe von $\frac{a_2}{l^2}$ grösser ausfallen als die Werthe von $a_1 l^2$.

PRÜFUNG DER FORMEL (50).

Die von *Frauenhofer* durch Beobachtungen und Rechnungen aufgefundenen Werthe der Wellenlängen und Brechungsverhältnisse für Lichtstrahlen von verschiedenen Farben setzen uns in den Stand, die Formel (50), nämlich:

$$\frac{1}{\varkappa^2} = a_0 + a_1 l^2 + \frac{a_2}{l^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (55)$$

einer numerischen Prüfung zu unterwerfen.

Frauenhofer hat bekanntlich die Wellenlängen und Brechungsverhältnisse derjenigen farbigen Strahlen bestimmt, welche gewissen im Spektrum sich zeigenden dunkeln Linien zunächst liegen.

Nach diesen Messungen haben die Strahlen, welche den von *Frauenhofer* mit B C D E F G H bezeichneten dunkeln Linien entsprechen, bei ihrem Durchgang durch Luft folgende Werthe, in Pariser Zollen ausgedrückt:

	B	C	D	E	F	G	H
$10^8\, l =$	2541	2425	2175	1943	1789	1585	1451
demnach $10^{16}\, l^2 =$	6492304	5880625	4730625	3775249	3200521	2512225	2105401
und $\frac{1}{l^2} =$	$15402 \,.\, 10^5$	$17005 \,.\, 10^5$	$21138 \,.\, 10^5$	$26488 \,.\, 10^5$	$31244 \,.\, 10^5$	$39805 \,.\, 10^5$	$47496 \,.\, 10^5$

Für den Durchgang dieser Strahlen durch ein mit Wasser gefülltes Prisma hat *Frauenhofer* folgende Brechungsverhältnisse gefunden :

	B	C	D	E	F	G	H
$x =$	1·330935	1·331712	1·333577	1·335851	1·337818	1·341293	1·344177

Hieraus findet man :

$\frac{1}{x^2} =$	0·56453	0·56387	0·56223	0·56038	0·55873	0·55580	0·55346

Setzt man die den Strahlen B E H entsprechenden Zahlen in die zu prüfende Formel (55), so erhält man zur Bestimmung der Constanten a_0 a_1 a_2 folgende drei Gleichungen

$$\text{B)} \quad 0{\cdot}56453 = a_0 + \frac{6492304}{10^{16}}\, a_1 + 15402 \,.\, 10^5\, a_2$$

$$\text{E)} \quad 0{\cdot}56038 = a_0 + \frac{3775249}{10^{16}}\, a_1 + 26488 \,.\, 10^5\, a_2$$

$$\text{H)} \quad 0{\cdot}55346 = a_0 + \frac{2105401}{10^{16}}\, a_1 + 47496 \,.\, 10^5\, a_2$$

Hieraus findet man folgende Werthe :

$$a_0 = +\, 0{\cdot}56751$$

$$a_1 = +\, 2713898$$

$$a_2 = -\, \frac{3{\cdot}078286}{10^{12}}$$

Für den Durchgang durch Wasser hat man also :

$$\frac{1}{x^2} = 0{\cdot}56751 + 2713898\, l^2 - \frac{3{\cdot}078286}{10^{12}} \cdot \frac{1}{l^2}$$

Berechnet man mit dieser Formel die Werthe von $\frac{1}{x^2}$ für sämmtliche Strahlen B C D E F G H und vergleicht die Rechnungsresultate mit den Beobachtungsresultaten, so erhält man folgende Tabelle :

		B	C	D	E	F	G	H
$\frac{1}{x^2}$	Rechnung	0·56453	0·56395	0·56229	0·56038	0·55876	0·55594	0·55346
	Beobachtung	0·56453	0·56387	0·56223	0·56038	0·55873	0·55580	0·55346

Man sieht, dass die Zahlen der Rechnung mit den Zahlen der Beobachtung beinahe identisch sind. Wir dürfen also wohl sagen, dass unsere Theorie mit den Thatsachen gut harmonirt.

DAS FARBENZERSTREUUNGS-VERMÖGEN.

Das Farbenzerstreuungsvermögen einer Substanz kann durch den Winkel gemessen werden, welchen die den dunkeln Linien B und H entsprechenden Strahlen zusammen bilden.

Nennen wir l_1 $\varkappa_1$ und l_2 $\varkappa_2$ die den Strahlen B und H entsprechenden Wellenlängen und Brechungsverhältnisse, so ist vermöge der Gleichung (50):

$$\frac{1}{\varkappa_1^2} = a_0 + a_1 l_1^2 + \frac{a_2}{l_1^2}$$

$$\frac{1}{\varkappa_2^2} = a_0 + a_1 l_2^2 + \frac{a_2}{l_2^2}$$

oder:

$$\frac{1}{\varkappa_1} = a_0^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{a_1}{a_0} l_1^2 + \frac{a_2}{a_0} \frac{1}{l_1^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{\varkappa_2} = a_0^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{a_1}{a_0} l_2^2 + \frac{a_2}{a_0} \frac{1}{l_2^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Nennt man α den Winkel des einfallenden Strahles mit dem Einfallsloth, α_1 α_2 die Winkel, welche die Strahlen B und H mit dem Einfallsloth bilden, so ist:

$$\frac{1}{\varkappa_1} = \frac{\sin.\alpha_1}{\sin.\alpha}$$

$$\frac{1}{\varkappa_2} = \frac{\sin.\alpha_2}{\sin.\alpha}$$

$$\frac{\sin.\alpha_1}{\sin.\alpha} = a_0^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{a_1}{a_0} l_1^2 + \frac{a_2}{a_0} \frac{1}{l_1^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\sin.\alpha_2}{\sin.\alpha} = a_0^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{a_1}{a_0} l_2^2 + \frac{a_2}{a_0} \frac{1}{l_2^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Allein der Betrag der Glieder, welche in den Klammern auf die Einheit folgen, ist gegen die Einheit ungemein klein; man kann daher diese Ausdrücke vermittelst der Binomialformel entwickeln und die auf das zweite Glied folgenden Glieder vernachlässigen. Dann findet man:

$$\frac{\sin.\alpha_1 - \sin.\alpha_2}{\sin.\alpha} = a_0^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{2} \frac{a_1}{a_0} (l_1^2 - l_2^2) + \frac{1}{2} \frac{a_2}{a_0} \left(\frac{1}{l_1^2} - \frac{1}{l_2^2} \right) \right]$$

Diesen Ausdruck kann man als das Maass des Farbenzerstreuungsvermögens gelten lassen.

Dieser Ausdruck bestimmt nun wiederum einen wesentlichen Unterschied zwischen der Lichttheorie von *Cauchy* und der hier entwickelten. Vermöge der Ausdrücke (49) und (52) ist:

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{1}{(2\pi)^2 \mathfrak{G}^2} A_0 = \frac{\frac{1}{2}(\mathfrak{A} + \varepsilon)}{(2\pi)^2 \mathfrak{G}^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^2 \mathfrak{G}^2} \left\{ \varepsilon + S\, m_1 \left[\frac{G(r)}{r} + \frac{1}{r} \frac{d\left(\frac{1}{r} G(r)\right)}{d\, r} \Delta x^2 \right] \right\}$$

$$\frac{a_2}{a_0} = (2\pi)^2 \mathfrak{G}^2 \frac{A_4}{A_2^2} = (2\pi)^2 \mathfrak{G}^2 \frac{\frac{1}{2} S \frac{\mu_1}{r} \left[J(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r} J(r)\right)}{d\, r} \Delta y^2 \right] \frac{\Delta x^4}{1.2.3.4}}{\frac{1}{4} \left\{ S \frac{\mu_1}{r} \left[J(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r} J(r)\right)}{d\, r} \Delta y^2 \right] \frac{\Delta x^2}{1.2} \right\}^2}$$

Für die Theorie von *Cauchy*, welche die Wechselwirkung zwischen den Aether- und Körperatomen nicht berücksichtigt, ist ε und $G(r)$ gleich Null zu setzen, ist daher das mit $\frac{a_1}{a_0}$ multiplizirte Glied ganz wegzulassen, und ist demnach das Farbenzerstreuungsvermögen $\frac{\sin.\alpha_1 - \sin.\alpha_2}{\sin.\alpha}$ von der Natur der Körperatome des brechenden Mediums ganz unabhängig, d. h. *Cauchy's* Theorie gibt für alle Medien einerlei Farbenzerstreuungsvermögen, was der Thatsache grob widerspricht.

Bei unserer Theorie dagegen ist ε und $G(r)$ nicht gleich Null, sondern es hat der Quotient $\frac{a_1}{a_0}$ für jedes besondere brechende Medium einen individuellen Werth, richtet sich also das Farbenzerstreuungsvermögen nach der Natur der brechenden Substanz, wie es die Thatsachen fordern.
