Das Dynamiden-System

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1857

Zweiter Abschnitt. Ueber das Gleichgewicht eines Dynamidensystems

urn:nbn:de:bsz:31-266496

ZWEITER ABSCHNITT.

Ueber das Gleichgewicht eines Dynamidensystems.

WECHSELWIRKUNG ZWEIER DYNAMIDEN.

Eine mathematisch genaue Berechnung der Wechselwirkung zweier Dynamiden, mit Berücksichtigung der Gestalten der Kerne und der Aethergruppirung in den Dynamiden ist mit unüberwindlichen Schwierigkeiten verbunden; wir müssen uns also mit einer Annäherung begnügen. Wir nehmen an: 1) die Entfernung der Dynamiden sei sehr gross nicht nur im Verhältniss zu den Dimensionen der Kerne, sondern selbst im Verhältniss zu den Dimensionen der Hüllen. Unter dieser Voraussetzung begehen wir keinen merklichen Fehler, wenn wir bei der Berechnung der Wechselwirkung die Kerne der Dynamiden wie materielle Punkte behandeln. 2) Die Aetherhüllen seien von kubischer Gestalt, und die Atome seien in denselben gleichförmig dicht gruppirt. Das ist in der Natur nicht möglich, aber gleichwohl werden wir auch durch diese Annahme, wenn die Entfernung der Dynamiden sehr gross ist, keinen merklichen Fehler begehen, weil überhaupt unter dieser Voraussetzung die Anziehung von der Gestalt der Hüllen und von der Gruppirung des Aethers beinahe nicht abhängt.

Es seien Fig. 7:

A und A_1 die Schwerpunkte der Kerne der beiden Dynamiden, deren Wechselwirkung berechnet werden soll;

$\overline{A A_1} = r$ die Entfernung der Schwerpunkte der Dynamiden;

a ein Aetheratom der Dynamide von A;

a_1 ein Aetheratom der Dynamide von A_1;

$\left.\begin{aligned} A\,a &= \rho \\ A_1 a_1 &= \rho_1 \end{aligned}\right\}$ die Entfernungen dieser Aetheratome von ihren Kernen;

m die Masse des Kernes der Dynamide A;

m_1 die Masse des Kernes der Dynamide A_1;

μ die Masse jedes Aetheratoms der Hüllen von A;

μ_1 die Masse jedes Aetheratoms der Hüllen von A_1.

Diese Massen μ und μ_1, so wie auch m und m_1 sind zwar gleich gross, es ist jedoch für die Rechnung angemessen, sie so zu behandeln, als wären sie ungleich.

Fällen wir von a und a_1 auf die Richtung der Verbindungslinie von A und A_1 die Perpendikel ab $a_1 b_1$ und setzen $\overline{Ab} = x$ $\overline{A_1 b_1} = x_1$. Die Wechselwirkungen zweier Atome sind gewisse Funktionen ihrer Entfernungen, die wir durch die Symbole F( ) G( ) J( ) bezeichnen wollen. Ersteres bezieht sich auf die Wechselwirkung zweier Körperatome; das zweite auf die Wechselwirkung zwischen einem Körperatom und einem Aetheratom; das dritte auf die Wechselwirkung zweier Aetheratome.

Die totale Wechselwirkung der Dynamiden können wir durch $m\, m_1 f(r)$ ausdrücken.

Dies vorausgesetzt, und die Eingangs ausgesprochene Annahme berücksichtigend, kann man nun mit ziemlicher Genauigkeit schreiben:

$$m\, m_1 f(r) = \Sigma\Sigma \mu \mu_1 J(r + x_1 - x) - m\, m_1 F(r) - \Sigma m \mu_1 G(r + x_1) - \Sigma m_1 \mu G(r - x) \qquad (1)$$

wobei $\Sigma\Sigma$ Summenzeichen sind, die sich auf sämmtliche Aetheratome der Hüllen beziehen. Die abstossenden Kräfte sind positiv, die anziehend wirkenden sind negativ in Rechnung gebracht. Fällt der Werth des ganzen Ausdruckes rechter Hand des Gleichheitszeichens positiv aus, so ist die Wechselwirkung $m\, m_1 f(r)$ eine Abstossung; fällt jener Ausdruck negativ aus, so ist die Wechselwirkung $m\, m_1 f(r)$ eine Anziehung.

Da wir voraussetzen, dass die grössten Werthe von x und x_1 gegen r sehr klein sind, so dürfen wir vermöge des Taylor'schen Satzes schreiben:

$$J(r + x_1 - x) = J(r) + \frac{dJ(r)}{dr}(x_1 - x) + \frac{1}{2}\frac{d^2 J(r)}{dr^2}(x_1 - x)^2$$

$$G(r + x_1) = G(r) + \frac{dG(r)}{dr} x_1 + \frac{1}{2}\frac{d^2 G(r)}{dr^2} x_1^2$$

$$G(r - x) = G(r) - \frac{dG(r)}{dr} x + \frac{1}{2}\frac{d^2 G(r)}{dr^2} x^2$$

demnach auch:

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma\Sigma\mu\mu_1 J(r + x_1 - x) &= J(r)\,\Sigma\Sigma\mu\mu_1 + \frac{dJ(r)}{dr}\Sigma\Sigma\mu\mu_1(x_1 - x)\\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{d^2 J(r)}{dr^2}\Sigma\Sigma\mu\mu_1(x_1 - x)^2\\
\Sigma m \mu_1 G(r + x_1) &= G(r)\,\Sigma m \mu_1 + \frac{dG(r)}{dr}\Sigma m \mu_1 x_1\\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{d^2 G(r)}{dr^2}\Sigma m \mu_1 x_1^2\\
\Sigma m_1 \mu G(r - x) &= G(r)\,\Sigma m_1 \mu - \frac{dG(r)}{dr}\Sigma m_1 \mu x\\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{d^2 G(r)}{dr^2}\Sigma m_1 \mu x^2
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (2)$$

Bezeichnen wir durch q das Atomgewicht und durch c die Wärmecapazität des Stoffes, so ist vermöge (6), Seite 32:

$$\Sigma \mu = \Sigma \mu_1 = q c \mu$$

Da wir ferner annehmen dürfen, dass sich die Kerne im Massenmittelpunkt der Aetherhülle befinden, so ist:

$$\Sigma \mu x = \Sigma \mu_1 x_1 = 0$$

Daher werden die Ausdrücke (2):

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma\Sigma \mu \mu_1 J(r + x_1 - x) &= q^2 c^2 \mu^2 J(r) + \frac{1}{2} \frac{d^2 J(r)}{dr^2} \Sigma\Sigma \mu \mu_1 (x^2 + x_1^2) \\
\Sigma m \mu_1 G(r + x_1) &= m q c \mu G(r) + \frac{m}{2} \frac{d^2 G(r)}{dr^2} \Sigma \mu_1 x_1^2 \\
\Sigma m_1 \mu G(r - x) &= m_1 q c \mu G(r) + \frac{m_1}{2} \frac{d^2 G(r)}{dr^2} \Sigma \mu x^2
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (3)$$

Diese Summe rechter Hand des Gleichheitszeichens können wir ausrechnen, weil wir eine kubische Form der Aetherhüllen und eine gleichmässig dichte Gruppirung der Aetheratome innerhalb der Hüllen vorausgesetzt haben.

Nennen wir D die Seite von diesem Kubus, e die Entfernung zweier unmittelbar neben einander befindlichen Aetheratome, und stellen wir uns auch noch vor, dass die Aetheratome nach geradlinigen Reihen gelagert sind, wie Fig. 8 andeutet, so ist:

$\frac{D}{e}$ die Anzahl der Aetheratome einer Reihe;

$\left(\frac{D}{e}\right)^2$ die Anzahl der Aetheratome einer Schichte;

$\left(\frac{D}{e}\right)^3 = q c$ die Anzahl der Aetheratome einer ganzen Hülle.

und es ist ferner sehr nahe:

$$\begin{aligned}
\Sigma \mu x^2 &= 2 \mu \left(\frac{D}{e}\right)^2 \left[e^2 + 4 e^2 + 9 e^2 + \ldots\ldots \left(\frac{D}{2e}\right)^2 e^2\right] \\
&= 2 \mu D^2 \left[1 + 4 + 9 + \ldots\ldots \left(\frac{D}{2e}\right)^2\right] \\
&= 2 \mu D^2 \frac{\frac{D}{2e}\left(\frac{D}{2e} + 1\right)\left(\frac{D}{e} + 1\right)}{6}
\end{aligned}$$

oder weil die Einheit sowohl gegen $\frac{D}{2e}$ als auch gegen $\frac{D}{e}$ vernachlässigt werden kann:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma \mu x^2 &= \frac{\mu D^3}{12 e^3} = \frac{\mu D^2}{12}\left(\frac{D}{e}\right)^3 = \frac{\mu c q D^2}{12} \\ \text{Eben so ist auch:} \qquad & \\ \Sigma \mu_1 x_1^2 &= \frac{\mu c q D^2}{12} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

und endlich finden wir:

$$\begin{aligned} \Sigma\Sigma \mu \mu_1 (x^2 + x_1^2) &= \Sigma\Sigma \mu \mu_1 x^2 + \Sigma\Sigma \mu \mu_1 x_1^2 \\ &= 2\, c q \mu \frac{c q \mu}{12} D^2 \\ &= \frac{1}{6}\, c^2 q^2 \mu^2 D^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5) \end{aligned}$$

Führt man diese Rechnungsresultate (4) und (5) in (3) ein, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma\Sigma \mu \mu_1\, J(r + x_1 - x) &= c^2 q^2 \mu^2 \left[J(r) + \frac{1}{12} \frac{d^2 J(r)}{d r^2} D^2 \right] \\ \Sigma m \mu_1\, G(r + x_1) &= m c q \mu \left[G(r) + \frac{1}{24} \frac{d^2 G(r)}{d r^2} D^2 \right] \\ \Sigma m_1 \mu\, G(r - x) &= m_1 c q \mu \left[G(r) + \frac{1}{24} \frac{d^2 G(r)}{d r^2} D^2 \right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Führt man endlich diese Resultate (5) in die Gleichung (1) ein, so findet man:

$$m m_1 f(r) = \left\{ \begin{aligned} & c^2 q^2 \mu^2 J(r) - 2 m c q \mu G(r) - m m_1 F(r) \\ & + \frac{c q \mu}{12} \left[c q \mu \frac{d^2 J(r)}{d r^2} - m \frac{d^2 G(r)}{d r^2} \right] D^2 \end{aligned} \right\} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Bezeichnet man, wie üblich, mit g die Beschleunigung durch die Schwere beim freien Fall der Körper, so ist:

$$m = m_1 = \frac{q}{2 g}$$

setzt man ferner:

$$2 g \mu c = C$$

so bedeutet C eine der Wärmecapazität proportionale Grösse, und man findet mit Berücksichtigung derselben aus (6):

$$f(r) = C^2 J(r) - 2 C G(r) - F(r) + \frac{C}{12} \left[C \frac{d^2 J(r)}{d r^2} - \frac{d^2 G(r)}{d r^2} \right] D^2 \quad \ldots \quad (7)$$

Dies ist die mysteriöse Funktion, welche *Cauchy* seinen Untersuchungen über das einfache Medium zu Grunde legt. Dieselbe besteht theils aus positiven, theils aus negativen Gliedern; ihr Betrag kann daher je nach Umständen positiv oder negativ ausfallen.

Ist $f(r)$ positiv, so ist die Wechselwirkung der Dynamiden eine Abstossung; ist $f(r)$ negativ, so ist diese Wechselwirkung eine Anziehung.

Diese Wechselwirkung hängt nicht blos von der Entfernung r der Dynamidenkerne, sondern auch von der in der Gewichtseinheit des Stoffes enthaltenen Aethermasse oder von der Wärmecapazität des Stoffes, und endlich auch noch von der Temperatur des Stoffes ab; denn im schwingenden Zustand des Aethers sind die Hüllen grösser, ist also D grösser als im ruhigen Zustand. Freilich begehen wir abermals einen kleinen Fehler, wenn wir den Ausdruck (7) auch für den Fall gelten lassen, wenn sich der Aether im schwingenden Zustand befindet, allein es ist aus der Natur der Sache herauszufühlen, dass dieser Fehler von keinem Belang sein kann. Die Wechselwirkung zweier Dynamiden verschwindet, wenn $f(r) = 0$ wird, und dies ist der Fall für:

$$D_1^2 = \frac{12}{C} \frac{F(r) + 2CG(r) - C^2 J(r)}{C\frac{d^2 J(r)}{dr^2} - \frac{d^2 G(r)}{dr^2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

Da wir voraussetzen, dass die Funktionen $J(r)$ $G(r)$ $F(r)$ mit dem Wachsen von r äusserst rasch abnehmen, so sind die zweiten Differenzialquotienten dieser Funktionen im Verhältniss zu den Funktionen selbst sehr kleine Grössen; man wird sich also für gewisse Rechnungen erlauben dürfen, das mit D^2 multiplizirte Glied des Ausdruckes (7) ganz zu vernachlässigen, und dann wird:

$$f(r) = C^2 J(r) - 2CG(r) - F(r) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

GLEICHGEWICHT EINES NACH ALLEN RICHTUNGEN GLEICH ELASTISCHEN (ISOTROPEN) DYNAMIDEN-SYSTEMS.

Denken wir uns, ein nach allen Richtungen gleich elastisches Dynamidensystem befinde sich unter der Einwirkung eines äusseren Druckes im Gleichgewicht, und suchen wir die Bedingungen dieses Gleichgewichtes auszumitteln.

Wir lassen alle Bezeichnungen, die wir in der vorhergehenden Untersuchung gewählt haben, auch hier gelten, und bezeichnen noch durch N den äusseren auf Compression wirkenden Druck, der auf jede Flächeneinheit der Oberfläche des Systems ausgeübt wird.

Wenden wir auf dieses im Gleichgewicht befindliche Dynamidensystem das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeit an, so müssen wir in dem System eine den Zusammenhang desselben nicht aufhebende Verschiebung vornehmen. Da aber alle Atome vollkommen frei beweglich sind, so können wir mit jedem derselben eine ganz beliebige unendlich kleine Verschiebung vornehmen, es ist daher auch erlaubt, solche Verschiebungen eintreten zu lassen, die einer gleichmässigen Ausdehnung der ganzen Masse entsprechen, ohne dabei in den Aetherhüllen Verschiebungen der Aetheratome gegen die Kerne vorzunehmen.

Nennen wir λ die unendlich kleine Distanzänderung zweier Punkte, deren Entfernung gleich der Längeneinheit ist, so ist λr die Distanzänderung von r, demnach $\lambda r m^2 f(r)$ die virtuelle Arbeit, welche der Distanzänderung zweier Dynamiden entspricht, und

$$\lambda m^2 S r f(r) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

die Summe der virtuellen Arbeiten, welche durch die Distanzänderungen aller Dynamiden von einer bestimmten Dynamide entwickelt wird. Da $f(r)$ für alle Werthe von r verschwindet, die grösser sind, als der Radius der Wirkungssphäre, so ist es auch genügend, wenn man die Summe S nur allein auf die innerhalb einer Wirkungssphäre befindlichen Dynamiden ausdehnt. Nennen wir Q das totale Gewicht des Körpers, q das Atomengewicht der Substanz, so ist $\frac{Q}{q}$ die Anzahl der im Körper enthaltenen Dynamiden. Die totale Summe aller virtuellen Arbeiten, welche der gesammten Ausdehnung entspricht, ist daher annähernd:

$$\frac{1}{2} \frac{Q}{q} \lambda m^2 S r f(r) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Ich sage annähernd, weil für diejenigen Dynamiden, deren Entfernung von der Oberfläche kleiner ist, als der Radius einer Wirkungssphäre, nicht genau das Gleiche gilt, was für die innern Dynamiden richtig ist. Der Faktor $\frac{1}{2}$ rührt daher, weil durch die Multiplikation von (1) mit $\frac{Q}{q}$ jede virtuelle Arbeit zweimal in Rechnung gebracht wird, während sie doch nur einmal in Rechnung gebracht werden darf.

Nun ist, wenn wir das ganze Volumen mit V bezeichnen, $3 \lambda V$ die Volumsänderung desselben, demnach:

$$3 \lambda V N$$

die virtuelle Arbeit, welche den äusseren Kräften entspricht. Nach dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeit hat man daher:

$$3 \lambda V N = \frac{1}{2} \frac{Q}{q} \lambda m^2 S r f(r)$$

oder:

$$N V = \frac{1}{6} \frac{Q m^2}{q} S r f(r) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

und wenn man für $f(r)$ den Werth setzt, den die vorhergehende Untersuchung geliefert hat, und berücksichtigt, dass $m = \frac{q}{2^n g}$ ist:

$$N V = \frac{Q q}{24 \, g^2} \left\{ \begin{array}{c} C^2 S r J(r) - 2 C S r G(r) - S r F(r) \\ + \frac{C}{12} \left[C S r \frac{d^2 J(r)}{d r^2} - S r \frac{d^2 G(r)}{d r^2} \right] D^2 \end{array} \right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

oder auch, wenn wir $\frac{q}{2\,g} = m$ in die Summenzeichen nehmen und die Masse aller Körperatome mit M bezeichnen, also $M = \frac{Q}{2\,g}$ setzen:

$$N\,V = \frac{1}{6}\,M \left\{ \begin{array}{l} C^2 S\,m\,r\,J(r) - 2\,C\,S\,m\,r\,G(r) - S\,m\,r\,F(r) \\ + \frac{C}{12}\left[C\,S\,m\,r\,\frac{d^2 J(r)}{d\,r^2} - S\,m\,r\,\frac{d^2 G(r)}{d\,r^2}\right] D^2 \end{array} \right\}$$

Oder endlich, wenn wir zur Abkürzung setzen:

$$\left. \begin{array}{l} \varphi(r) = C^2 S\,m\,r\,J(r) - 2\,C\,S\,m\,r\,G(r) - S\,m\,r\,F(r) \\ \psi(r) = \frac{C}{12}\left[C\,S\,m\,r\,\frac{d^2 J(r)}{d\,r^2} - S\,m\,r\,\frac{d^2 G(r)}{d\,r^2}\right] \end{array} \right\} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

$$N\,V = \frac{1}{6}\,M\left[\varphi(r) + \psi(r)\,D^2\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

DAS MARIOTT'SCHE GESETZ.

Wir wollen nun verschiedene Gleichgewichtszustände, in welche ein Körper gebracht werden kann, mit einander vergleichen, und um von diesen Zuständen bequem sprechen zu können, nenne ich denjenigen Zustand, der in den Körper eintritt, wenn kein äusserer Druck wirkt und der Aether in den Hüllen absolut ruhig ist, also die rationelle Null-Temperatur vorhanden ist: den Nullzustand. Andere Zustände, bei welchen Aetherschwingungen (Temperaturen) vorhanden und äussere Pressungen wirksam sind, bezeichne ich mit I II… und versehe die Grössen, welche sich auf diese Zustände beziehen, mit Zahlen 1 2….

Da die Grösse D, d. h. der Durchmesser einer Aetherhülle sowohl von dem äussern Druck als auch von dem Schwingungszustand, folglich von der Temperatur abhängt, so ändert sich dieselbe bei dem Uebergang von einem Zustand in einen andern; allein ich bin nicht im Stande, diese Abhängigkeit auf rationellem Wege durch Rechnung zu bestimmen, und sehe mich gezwungen, hinsichtlich des Werthes von D oder von D^2 eine naturgemäss scheinende Annahme oder Hypothese zu machen. Ich setze für irgend einen Zustand I

$$D_1^2 = D_0^2\,(1 - f\,\lambda_1 + h\,T_1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

wobei die in diesem Ausdruck erscheinenden Grössen folgende Bedeutung haben:

D_0 der Durchmesser einer Aetherhülle, wenn der Aether in absoluter Ruhe ist, und auf den Körper kein äusserer Druck wirkt, d. h. D_0 ist der Durchmesser einer Hülle im Nullzustand des Körpers;

T_1 die rationelle Temperatur, welche der im Zustande I vorhandenen Aetherschwingung entspricht;

λ_1 die lineare Zusammendrückung des Körpers, welche dem Uebergang aus dem Nullzustand in den Zustand I entspricht;

f und h zwei von der Natur aber nicht von den Zuständen des Körpers abhängige Grössen.

Diese Hypothese scheint der Natur der Sache annähernd zu entsprechen, denn es ist klar, dass der Durchmesser einer Aetherhülle mit der Temperatur wächst, dagegen mit der Zusammendrückung des Körpers abnimmt, was bei dem Ausdruck (7) auch der Fall ist.

Dies vorausgesetzt, gibt uns die Gleichung (6) für den Nullzustand und für zwei Zustände I und II

$$\left.\begin{aligned} o = N_0 V_0 &= \frac{1}{6} M \left[\varphi(r_0) + \psi(r_0) D_0^2 \right] \\ N_1 V_1 &= \frac{1}{6} M \left[\varphi(r_1) + \psi(r_1) D_0^2 (1 - f \lambda_1 + h T_1) \right] \\ N_2 V_2 &= \frac{1}{6} M \left[\varphi(r_2) + \psi(r_2) D_0^2 (1 - f \lambda_2 + h T_2) \right] \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= r_0 (1 - \lambda_1) \\ r_2 &= r_0 (1 - \lambda_2) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Sind die Zustände I und II von dem Nullzustande nicht viel verschieden, so kann man nach dem Taylor'schen Satz schreiben:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(r_1) &= \varphi(r_0 - \lambda_1 r_0) = \varphi(r_0) - r_0 \frac{d\varphi(r_0)}{d r_0} \lambda_1 \\ \psi(r_1) &= \psi(r_0 - \lambda_1 r_0) = \psi(r_0) - r_0 \frac{d\psi(r_0)}{d r_0} \lambda_1 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Führt man diese Werthe in (8) ein, so ergibt sich:

$$o = N_0 V_0 = \frac{1}{6} M \left[\varphi(r_0) + \psi(r_0) D_0^2 \right]$$

$$N_1 V_1 = \frac{1}{6} M \left[\varphi(r_0) - r_0 \frac{d\varphi(r_0)}{d r_0} \lambda_1 + \left(\psi(r_0) - r_0 \frac{d\psi(r_0)}{d r_0} \lambda_1 \right) (1 - f \lambda_1 + h T_1) D_0^2 \right]$$

$$N_2 V_2 = \frac{1}{6} M \left[\varphi(r_0) - r_0 \frac{d\varphi(r_0)}{d r_0} \lambda_2 + \left(\psi(r_0) - r_0 \frac{d\psi(r_0)}{d r_0} \lambda_2 \right) (1 - f \lambda_2 + h T_2) D_0^2 \right]$$

Da wir annehmen, dass λ_1 λ_2 $f\lambda_1$ hT_1 sehr kleine Grössen sind, so dürfen wir die Cylinder, welche Produkte dieser Grössen enthalten, vernachlässigen, und dann erhalten wir:

$$o = N_0 V_0 = \frac{1}{6} M \left[\varphi(r_0) + \psi(r_0) D_0^2\right]$$

$$N_1 V_1 = \frac{1}{6} M \left[\varphi(r_0) + \psi(r_0) D_0^2\right] - \frac{1}{6} M \left[r_0 \frac{d\varphi(r_0)}{d r_0} + \left(r_0 \frac{d\psi(r_0)}{d r_0} + f\psi(r_0)\right) D_0^2\right] \lambda_1 + \frac{1}{6} M h \psi(r_0) T_1$$

$$N_2 V_2 = \frac{1}{6} M \left[\varphi(r_0) + \psi(r_0) D_0^2\right] - \frac{1}{6} M \left[r_0 \frac{d\varphi(r_0)}{d r_0} + \left(r_0 \frac{d\psi(r_0)}{d r_0} + f\psi(r_0)\right) D_0^2\right] \lambda_2 + \frac{1}{6} M h \psi(r_0) T_2$$

Setzt man:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{6}\left[r_0 \frac{d\varphi(r_0)}{d r_0} + \left(r_0 \frac{d\psi(r_0)}{d r_0} + f\psi(r_0)\right) D_0^2\right] &= a_0 \\ \frac{1}{6} h \psi(r_0) &= b_0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

so folgt aus den letzten drei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} N_1 V_1 &= M(-a_0 \lambda_1 + b_0 T_1) \\ N_2 V_2 &= M(-a_0 \lambda_2 + b_0 T_2) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

In diesen Ausdrücken sind a_0 und b_0 von der Natur des Stoffes abhängige Grössen, die durch Versuche bestimmt werden können; sind ferner T_1 und T_2 die rationellen Temperaturen. Nennt man t_1 und t_2 die mit dem hunderttheiligen Thermometer gemessenen Temperaturen und Δ die rationelle Temperatur, welche dem Nullpunkt der Thermometerscala entspricht, so hat man:

$$T_1 = \Delta + t_1$$

$$T_2 = \Delta + t_2$$

daher erhält man auch statt der Gleichung (12):

$$\left.\begin{aligned} N_1 V_1 &= M(b_0 \Delta - a_0 \lambda_1 + b_0 t_1) \\ N_2 V_2 &= M(b_0 \Delta - a_0 \lambda_2 + b_0 t_2) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Durch Division dieser Ausdrücke folgt:

$$\frac{N_1 V_1}{N_2 V_2} = \frac{1 - \frac{a_0}{b_0 \Delta} \lambda_1 + \frac{1}{\Delta} t_1}{1 - \frac{a_0}{b_0 \Delta} \lambda_2 + \frac{1}{\Delta} t_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Obgleich diese Resultate (13) und (14) unserer Untersuchung nur für Zustände gelten, welche von dem Nullzustande nur wenig verschieden sind, so wollen wir uns doch erlauben, sie auf Zustände anzuwenden, die von dem Nullzustand beträchtlich abweichen.

Vergleichen wir zunächst das Resultat (14) mit dem combinirten Mariott'schen und Gay-Lussac'schen Gesetz, welches nach dem Versuch von *Regnault* zwar nicht genau aber doch sehr nahe richtig ist. Nach diesem Annäherungsgesetz ist für Gase aller Art:

$$\frac{N_1 V_1}{N_2 V_2} = \frac{1 + \alpha t_1}{1 + \alpha t_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

wobei α den Wärmeausdehnungscoeffizienten bedeutet.

Man sieht, dass die Ausdrücke (14) und (15) der Form nach vollkommen übereinstimmen, wenn a_0 gleich Null, und nahe übereinstimmen, wenn a_0 eine sehr kleine Grösse ist. Das Letztere ist in der That der Fall, denn diese Grösse a_0 bezieht sich auf den Nullzustand des Gases, also auf einen Zustand, in welchem die Entfernung r_0 der Dynamiden sehr gross und die Wechselwirkungen der Atome zweier Dynamiden sehr klein sind; es folgt also in der That aus den Gleichungen (5) und (11), dass sowohl a_0 als auch b_0 nur einen sehr kleinen Werth haben kann. Da es ferner wahrscheinlich ist, dass die Anziehung zwischen Aether und Körperatome $G(r)$ mit dem Wachsen von r in einem noch rascheren Verhältniss abnimmt, als die Abstossung $J(r)$ der Aetheratome, so folgt daraus, dass diese kleinen Werthe von a_0 und b_0 noch überdies für alle Gase sehr nahe übereinstimmen werden, dass also das Verhältniss $\frac{a_0}{b_0}$ für alle Gase sehr nahe einerlei Werthe haben wird.

Erlauben wir uns, in der Gleichung (14) die mit a_0 multiplizirten Glieder ganz zu vernachlässigen, so werden die Gleichungen (14) und (15) identisch, wenn man nimmt:

$$\frac{1}{\Delta} = \alpha$$

oder:

$$\Delta = \frac{1}{\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

es ergibt sich also aus unserer Theorie das interessante Resultat, dass der reziproke Werth des Wärmeausdehnungscoeffizienten für Gase gleich ist der wahren Temperatur, welche dem Nullpunkt der Thermometerscala entspricht. Nach *Regnault's* Verfahren ist:

für atmosphärische Luft	$\alpha = 0{\cdot}003670$
„ Wasserstoffgas	$= 0{\cdot}003661$
„ Stickstoffgas	$= 0{\cdot}003676$
„ Kohlenoxydgas	$= 0{\cdot}003669$
„ Kohlensäure	$= 0{\cdot}003710$

Der Coeffizient für atmosphärische Luft gibt:

$$\Delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{0{\cdot}00367} = 272{\cdot}5^0$$

Die absolute Nulltemperatur wäre demnach 272·5° unter dem Gefrierpunkt des Wassers.

Aus der Gleichung (14) folgt auch, ganz in Uebereinstimmung mit den Ergebnissen der Regnault'schen Versuche, dass der Wärmeausdehnungscoeffizient für Gase sowohl mit der Natur des Gases, als auch mit seiner Dichte etwas veränderlich ist.

In der Gleichung (14) kommen die Grössen λ_1 λ_2 vor, welche von der Compression des Gases abhängen, und die Grössen a_0 und b_0 sind mit der Natur des Gases etwas veränderlich.

Ich könnte nun die Gleichung (14) mit den von *Regnault* aufgefundenen Zahlen einer Prüfung unterwerfen, und könnte zeigen, dass diese Gleichung in der That mit den Erfahrungszahlen recht gut stimmt. Allein damit ist nicht viel gethan, denn die Gleichung (14) ist durch gar zu viele Vernachlässigungen gewonnen worden, und wenn sie auch mit den Zahlen ganz genau stimmt, so wüsste man doch den Grund nicht. Daher ziehe ich es vor, den in dieser Nummer eingeschlagenen Weg nicht weiter zu verfolgen, sondern einen andern naturgemässeren einzuschlagen, der uns zu genaueren und wichtigeren Resultaten führen wird.

ALLGEMEINES COMPRESSIONSGESETZ, VON WELCHEM DAS MARIOTT'SCHE GESETZ EIN SPEZIELLER FALL IST.

Wir haben früher Seite 58 die Gleichung gefunden:

$$N V = \frac{1}{6} M \left[\varphi(r) + \psi(r) D^2\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

dabei ist:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(r) &= C^2 S m r J(r) - 2 C S m r G(r) - S m r F(r) \\ \psi(r) &= \frac{C}{12}\left[C S m r \frac{d^2 J(r)}{d r^2} - S m r \frac{d^2 G(r)}{d r^2}\right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Diese Gleichungen sind noch sehr genau, denn es ist bei ihrer Herleitung nur sehr Unwesentliches vernachlässigt worden.

Gewiss werden die Physiker ihre Zustimmung geben, wenn wir nun die Annahme machen, dass die Wechselwirkung je zweier Atome irgend einer Potenz ihrer Entfernung verkehrt proportional ist. Ich setze daher:

$$\left.\begin{aligned} J(r) &= \frac{a}{r^\alpha} \\ G(r) &= \frac{b}{r^\beta} \\ F(r) &= \frac{c}{r^\gamma} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

wobei $a\ b\ c\ \alpha\ \beta\ \gamma$ gewisse noch nicht bekannte constante Grössen bezeichnen. Um nun die in den Gleichungen (2) vorkommenden Summen zu berechnen, werden wir uns erlauben dürfen, die Rechnung so durchzuführen, wie wenn die Dynamiden um jede einzelne Dynamide in concentrischen kugelförmigen Schichten herumgelagert wären, wie Fig. 9 andeutet.

Nennen wir e die Entfernung der Schwerpunkte der Kerne zweier unmittelbar neben einander befindlichen Dynamiden, so sind:

$$e \qquad 2e \qquad 3e \qquad 4e \ldots\ldots \text{ die Halbmesser und}$$
$$4\pi e^2 \qquad 4.4\pi e^2 \qquad 9.4\pi e^2 \qquad 16.4\pi e^2 \ldots \text{ die Kugel-Oberflächen,}$$

in welchen die Atome um ein Centralatom herumgelagert sind, und 4π, 4.4π, 9.4π, 16.4π, sind die Anzahlen der Atome oder Dynamiden in diesen Kugelschichten. Für die n^{te} Schichte ist:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{der Halbmesser} \ldots\ldots & n\,e \\ \text{die Kugelfläche} \ldots\ldots & 4\pi e^2 n^2 \\ \text{die Anzahl der Dynamiden} \ldots & 4\pi n^2 \end{array}\right\} \ldots\ldots \quad (4)$$

Nennen wir nun r die Entfernung einer Dynamide in der n^{ten} Schichte von dem Centralatom, setzen also:

$$r = n\,e \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

so ist vermöge (3):

$$J(r) = \frac{a}{(n\,e)^\alpha} \qquad G(r) = \frac{b}{(n\,e)^\beta} \qquad F(r) = \frac{c}{(n\,e)^\gamma}$$

demnach:

$$r\,J(r) = \frac{a}{(n\,e)^{\alpha-1}} \qquad r\,G(r) = \frac{b}{(n\,e)^{\beta-1}} \qquad r\,F(r) = \frac{c}{(n\,e)^{\gamma-1}}$$

und wir erhalten nun mit Berücksichtigung, dass $4\pi n^2$ die Anzahl der Dynamiden in der n^{ten} Schichte bezeichnet:

$$\left.\begin{array}{l} S\,m\,r\,J(r) = \dfrac{1}{e^{\alpha-1}}\,S\,\dfrac{4\pi\,m\,a}{n^{\alpha-3}} \\[2ex] S\,m\,r\,G(r) = \dfrac{1}{e^{\beta-1}}\,S\,\dfrac{4\pi\,m\,b}{n^{\beta-3}} \\[2ex] S\,m\,r\,F(r) = \dfrac{1}{e^{\gamma-1}}\,S\,\dfrac{4\pi\,m\,c}{n^{\gamma-3}} \end{array}\right\} \ldots\ldots \quad (5)$$

und diese rechter Hand der Gleichheitszeichen stehenden Summen sind für ein bestimmtes Medium constante Zahlen, denn es sind diese Summen zu nehmen, von $n = 1$ bis zu $n = \infty$.

Nun hat man ferner:

$$\left.\begin{aligned} r\,\frac{d^2\,J(r)}{d\,r^2} &= \frac{a\,\alpha(\alpha+1)}{e^{\alpha+1}\,n^{\alpha+1}} \\ r\,\frac{d^2\,G(r)}{d\,r^2} &= \frac{b\,\beta(\beta+1)}{e^{\beta+1}\,n^{\beta+1}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

und daher findet man nun:

$$\left.\begin{aligned} S\,m\,r\,\frac{d^2\,J(r)}{d\,r^2} &= \frac{1}{e^{\alpha+1}}\;S\;\frac{4\pi\,a\,\alpha\,(\alpha+1)\,m}{n^{\alpha-1}} \\ S\,m\,r\,\frac{d^2\,G(r)}{d\,r^2} &= \frac{1}{e^{\beta+1}}\;S\;\frac{4\pi\,b\,\beta\,(\beta+1)\,m}{n^{\beta-1}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

Substituirt man diese Summenwerthe (5) und (7) in die Gleichung (2) und setzt sodann die Resultate in die Gleichung (1), so erhält man:

$$N\,V = \frac{1}{6}\,M \left\{ \begin{aligned} &\frac{C^2}{e^{\alpha-1}}\;S\;\frac{4\pi\,m\,a}{n^{\alpha-3}} - \frac{2\,C}{e^{\beta-1}}\;S\;\frac{4\pi\,m\,b}{n^{\beta-3}} - \frac{1}{e^{\gamma-1}}\;S\;\frac{4\pi\,m\,c}{n^{\gamma-3}} \\ &+ \left[\frac{C^2}{e^{\alpha+1}}\,\frac{1}{12}\;S\;\frac{4\pi\,a\,\alpha\,(\alpha+1)\,m}{n^{\alpha-1}} - \frac{C}{e^{\beta+1}}\,\frac{1}{12}\;S\;\frac{4\pi\,b\,\beta\,(\beta+1)\,m}{n^{\beta-1}}\right] D^2 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Nun ist aber $\frac{M}{m}\,e^3 = V$. Führt man diesen Werth von V ein, so folgt:

$$N = \frac{m}{6} \left\{ \begin{aligned} &\frac{C^2}{e^{\alpha+2}}\;S\;\frac{4\pi\,m\,a}{n^{\alpha-3}} - \frac{2\,C}{e^{\beta+2}}\;S\;\frac{4\pi\,m\,b}{n^{\beta-3}} - \frac{1}{e^{\gamma+2}}\;S\;\frac{4\pi\,m\,c}{n^{\gamma-3}} \\ &+ \left[\frac{C^2}{e^{\alpha+4}}\,\frac{1}{12}\;S\;\frac{4\pi\,a\,\alpha\,(\alpha+1)\,m}{n^{\alpha-1}} - \frac{C}{e^{\beta+4}}\,\frac{1}{12}\;S\;\frac{4\pi\,b\,\beta\,(\beta+1)\,m}{n^{\beta-1}}\right] D^2 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Berücksichtiget man endlich, dass

$$\frac{1}{e} = \left(\frac{M}{V}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{Q}{2\,g\,V}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{3}} = s^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{2\,g\,m}\right)^{\frac{1}{3}}$$

wobei Q das totale Gewicht des Körpers, s das spezifische Gewicht desselben unter dem Druck N, und g die Beschleunigung durch die Schwere bezeichnet, so findet man endlich, wenn man zur Abkürzung setzt:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{A} &= \frac{m}{6}\left(\frac{1}{2\,g\,m}\right)^{\frac{\alpha+2}{3}} s\, \frac{4\,\pi\, m\, a}{n^{\alpha-3}} \\
\mathfrak{B} &= \frac{m}{3}\left(\frac{1}{2\,g\,m}\right)^{\frac{\beta+2}{3}} s\, \frac{4\,\pi\, m\, b}{n^{\beta-3}} \\
\mathfrak{C} &= \frac{m}{6}\left(\frac{1}{2\,g\,m}\right)^{\frac{\gamma+2}{3}} s\, \frac{4\,\pi\, m\, c}{n^{\gamma-3}} \\
\mathfrak{D} &= \frac{m}{72}\left(\frac{1}{2\,g\,m}\right)^{\frac{\alpha+4}{3}} s\, \frac{4\,\pi\, a\, \alpha\,(\alpha+1)\, m}{n^{\alpha-1}} \\
\mathfrak{E} &= \frac{m}{72}\left(\frac{1}{2\,g\,m}\right)^{\frac{\beta+4}{3}} s\, \frac{4\,\pi\, b\, \beta\,(\beta+1)\, m}{n^{\beta-1}}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

$$N = \mathfrak{A}\, C^2 s^{\frac{\alpha+2}{3}} - \mathfrak{B}\, C\, s^{\frac{\beta+2}{3}} - \mathfrak{C}\, s^{\frac{\gamma+2}{3}} + \left[\mathfrak{D}\, C^2 s^{\frac{\alpha+4}{3}} - \mathfrak{E}\, C\, s^{\frac{\beta+4}{3}}\right] D^2 \quad . \; . \quad (11)$$

Bevor wir uns spezieller mit diesem merkwürdigen Ausdruck beschäftigen, will ich die Bedeutung der darin erscheinenden Grössen in Erinnerung bringen.

Es ist:

N der auf die Flächeneinheit der Oberfläche des Körpers comprimirend wirkende äussere Druck;

C die Wärmecapazität des Körpers, d. h. die in der Gewichtseinheit enthaltene Aethermenge;

s das spezifische Gewicht des Körpers;

$\alpha\ \beta\ \gamma$ sind Zahlen, welche ausdrücken, den wievielten Potenzen ihrer Entfernung die Atomkräfte verkehrt proportional sind;

D der Durchmesser einer Aetherhülle.

Wir wollen nun diesen Ausdruck (11) auf Gase und feste Substanzen anwenden.

DAS COMPRESSIONSGESETZ FÜR GASE ODER DAS WAHRE MARIOTT'SCHE GESETZ.

Setzen wir eine gewisse Gasmenge zuerst einem äusseren Druck N, hierauf einem äusseren Druck N_1 aus, so wird dieses Gas im ersteren Falle ein gewisses spezifisches Gewicht s, im letzteren ein spezifisches Gewicht s_1 zeigen, und vermöge der Gleichung (11) dürfen wir schreiben:

$$N = \mathfrak{A}\,C^2 s^{\frac{\alpha+2}{3}} - \mathfrak{B}\,C\,s^{\frac{\beta+2}{3}} - \mathfrak{C}\,s^{\frac{\gamma+2}{3}} + \left(\mathfrak{D}\,C^2 s^{\frac{\alpha+4}{3}} - \mathfrak{E}\,C\,s^{\frac{\beta+4}{3}}\right) D^2$$

$$N_1 = \mathfrak{A}\,C^2 s_1^{\frac{\alpha+2}{3}} - \mathfrak{B}\,C\,s_1^{\frac{\beta+2}{3}} - \mathfrak{C}\,s_1^{\frac{\gamma+2}{3}} + \left(\mathfrak{D}\,C^2 s_1^{\frac{\alpha+4}{3}} - \mathfrak{E}\,C\,s_1^{\frac{\beta+4}{3}}\right) D_1^2$$

Durch Division dieser Ausdrücke findet man:

$$\frac{N}{N_1} = \left(\frac{s}{s_1}\right)^{\frac{\alpha+2}{3}} \frac{1 - \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}C}\,s^{\frac{\beta-\alpha}{3}} - \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}C^2}\,s^{\frac{\gamma-\alpha}{3}} + \left(\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{A}}\,s^{\frac{2}{3}} - \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{A}C}\,s^{\beta-\alpha+2}\right) D^2}{1 - \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}C}\,s_1^{\frac{\beta-\alpha}{3}} - \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}C^2}\,s_1^{\frac{\gamma-\alpha}{3}} + \left(\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{A}}\,s_1^{\frac{2}{3}} - \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{A}C}\,s_1^{\beta-\alpha+2}\right) D_1^2} \quad (12)$$

und diese Gleichung gilt für schwache wie für starke Compressionen. Wenden wir sie zunächst auf schwache Compressionen an, so müsste dieselbe annähernd das gewöhnliche Mariott'sche Gesetz ausdrücken, d. h. diese Gleichung müsste, wenn wir in derselben $D = D_1$ setzen, also einerlei Temperatur voraussetzen:

$$\frac{N}{N_1} = \frac{s}{s_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

geben, denn in diesem Fall, d. h. für schwache Pressungen und bei gleicher Temperatur verhalten sich die Pressungen beinahe ganz genau wie die Dichten oder wie die spezifischen Gewichte. Damit aber unter diesen Umständen die Gleichung (12) mit (13) übereinstimmt, muss erstens $\frac{\alpha+2}{3} = 1$ oder $\alpha = 1$ sein und müssen ferner zweitens die Quotienten $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}C}$ $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}C^2}$ $\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{A}}$ $\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{A}C}$ verschiedene kleine Grössen sein, muss also $\mathfrak{A}$ im Vergleich zu $\mathfrak{B}$ $\mathfrak{C}$ $\mathfrak{D}$ $\mathfrak{E}$ ausserordentlich gross sein, d. h. die Gleichung (12) stimmt mit den für Gase geltenden Thatsachen nur dann überein, wenn der Aether eine solche Beschaffenheit hat, dass die Abstossung zweier Aetheratome nur der ersten Potenz der Entfernung der Aethertheilchen verkehrt proportional ist, und wenn ferner die Abstossung der Aethertheilchen im Verhältniss zur Anziehung der Körperatome gegen einander und der Anziehung der Körper und Aetheratome sehr gross ist. Es stellt sich demnach das merkwürdige Resultat heraus, dass die Abstossungskraft zweier Aetheratome eine sehr energische und fern hin wirkende Kraft ist.

Setzen wir in der Gleichung (12) $\alpha = 1$, so wird dieselbe:

$$\frac{N}{N_1} = \frac{s}{s_1} \frac{1 - \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}C}\,s^{\frac{\beta-1}{3}} - \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}C^2}\,s^{\frac{\gamma-1}{3}} + \left(\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{A}}\,s^{\frac{2}{3}} - \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{A}C}\,s^{\frac{\beta+1}{3}}\right) D^2}{1 - \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}C}\,s_1^{\frac{\beta-1}{3}} - \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}C^2}\,s_1^{\frac{\gamma-1}{3}} + \left(\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{A}}\,s_1^{\frac{2}{3}} - \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{A}C}\,s_1^{\frac{\beta+1}{3}}\right) D_1^2} \quad . \; . \; (14)$$

und dies ist nun die wahre Beziehung, welche zwischen den Pressungen und Dichten oder spezifischen Gewichten eines Gases besteht, d. h. das wahre Mariott'sche Gesetz. Leider können die Zahlen, welche *Regnault* zum Behufe der Prüfung des gewöhnlichen Mariott'schen Gesetzes gesucht und gefunden hat, nicht gebraucht werden, um damit die Formel (14) zu prüfen, denn *Regnault* gibt in seinen Relations expérimentales etc. nur die Werthe von $\frac{N s_1}{N_1 s}$ und von $\frac{s_1}{s}$ an, nicht aber die absoluten Werthe der spezifischen Gewichte $s\, s_1$ des Gases, und es wird überhaupt sehr schwer halten, die Gleichung (14) durch Versuche ganz scharf zu prüfen, denn die Zahl der zu bestimmenden Constanten ist sehr gross, und ihr Betrag ist dagegen verschwindend klein, denn nach der Thatsache gilt doch das gewöhnliche Mariott'sche Gesetz sehr nahe auch für sehr starke Compressionen.

In den Relations findet man z. B. Seite 421 angegeben, dass für atmosphärische Luft die Werthe des Quotienten $\frac{N s_1}{N s}$ gleich 0·996490 und 0·987780 sind, wenn die Volumsverhältnisse im ersteren Falle 2, im letzteren 16 betragen. Das Mariott'sche Gesetz ist demnach noch bei einer 16fachen Verdichtung ziemlich genau.

Unsere Formel enthält noch eine Hauptschwierigkeit, die ich nicht zu bewältigen im Stande bin; das ist die Bestimmung von D^2, d. h. die Bestimmung von dem Durchmesser einer Aetherhülle. Ich unterlasse es, die vielen weitläufigen aber vergeblichen Rechnungen hierher zu setzen, welche ich unternommen habe, um die Abhängigkeit zwischen D, s und t ausfindig zu machen.

Schon Seite 58, Gleichung (7), habe ich eine hypothetische Annäherungsformel für D^2 aufgestellt, allein mit derlei Formeln ist der Wissenschaft wenig gedient, denn wenn auch die Resultate ganz genau stimmen, so weiss man denn doch die Ursache nicht, und auf die Kenntniss der Ursachen kommt es vorzugsweise an.

Aus der Gleichung (14) ersieht man, dass *Regnault* wohl mit Recht gesagt hat: La vraie loi qui exprime les relations entre les volumes d'une même masse de gaz et les pressions qu'elle supporte, est évidemment trop complexe pour qu'on puisse espérer de la trouver uniquement par la méthode expérimentale.

BESTIMMUNG DES MODULUS DER ELASTIZITÄT FÜR FESTE KÖRPER.

Unsere Gleichung (11) gilt selbstverständlich auch für feste Körper, insofern man dieselben als Dynamidensysteme betrachten darf; wir können daher diese Gleichung zur Bestimmung des sogenannten Modulus der Elastizität benützen.

Nehmen wir an, ein fester Körper sei zuerst der Pressung N der atmosphärischen Luft ausgesetzt, und werde hierauf einem höheren äusseren Druck N_1 unterworfen, so wird seine Dichte zunehmen und von s in s_1 übergehen. Allein bei festen Körpern ist die Aenderung der Dichte stets äusserst klein, daher werden wir keinen merklichen Fehler begehen, wenn wir setzen:

$$\frac{N_1 - N}{s_1 - s} = \frac{dN}{ds} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Sucht man vermittelst (11) den Differenzialquotienten von N nach s und setzt seinen Werth in (15), so findet man:

$$\frac{N_1 - N}{s_1 - s} = \mathfrak{A}\,C^2\,\frac{\alpha+2}{3}\,s^{\frac{\alpha-1}{3}} - \mathfrak{B}\,C\,\frac{\beta+2}{3}\,s^{\frac{\beta-1}{3}} - \mathfrak{C}\,\frac{\gamma+2}{3}\,s^{\frac{\gamma-1}{3}} + \left(\mathfrak{D}\,C^2\,\frac{\alpha+4}{3}\,s^{\frac{\alpha+1}{3}} - \mathfrak{E}\,C\,\frac{\beta+4}{3}\,s^{\frac{\beta+1}{3}}\right)D^2$$

oder wenn wir auch hier $\alpha = 1$ setzen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{N_1 - N}{s_1 - s} &= \mathfrak{A}\,C^2 - \mathfrak{B}\,C\,\frac{\beta+2}{3}\,s^{\frac{\beta-1}{3}} - \mathfrak{C}\,\frac{\gamma+2}{3}\,s^{\frac{\gamma-1}{3}} + \\ &+ \left(\mathfrak{D}\,C^2\,\frac{5}{3}\,s^{\frac{2}{3}} - \mathfrak{E}\,C\,\frac{\beta+4}{3}\,s^{\frac{\beta+1}{3}}\right)D^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

Nennt man λ die lineare Zusammendrückung des Körpers, d. h. die Verkürzung jeder Längeneinheit, oder endlich die Annäherung zweier Körperatome, deren Entfernung bei dem Druck N gleich einer Längeneinheit war, so ist für so schwache Zusammendrückungen, wie sie bei festen Körpern vorkommen:

$$s_1 - s = 3\,\lambda\,s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Nennt man ferner ε den Modulus der Elastizität in dem üblichen Sinne, so ist zu setzen:

$$\lambda\,\varepsilon = N_1 - N \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Führt man diese Resultate (17) und (18) in (16) ein, so erhält man einen Ausdruck, aus welchem folgt:

$$\varepsilon = 3\,\mathfrak{A}\,C^2 s \left[1 - \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}\,C}\,\frac{\beta+2}{3}\,s^{\frac{\beta-1}{3}} - \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}\,C^2}\,\frac{\gamma+2}{3}\,s^{\frac{\gamma-1}{3}} + \left(\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{A}}\,\frac{5}{3}\,s^{\frac{2}{3}} - \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{A}\,C}\,\frac{\beta+4}{3}\,s^{\frac{\beta+1}{3}}\right)D^2\right] \quad (19)$$

Dieser Ausdruck ist auch für eine gleichförmige Ausdehnung des Körpers richtig.

Die Richtigkeit dieses Ausdruckes vorausgesetzt, so folgt aus demselben, dass der Modulus der Elastizität eines Materials (wegen s) von der Dichte und (wegen D^2) von der Temperatur desselben abhängt. Auch richtet sich derselbe nach der Wärmecapazität des Stoffes.

Eine scharfe Prüfung dieser Gleichung (19) durch Versuche wird schwerlich möglich werden, denn zur Bestimmung aller in dieser Gleichung erscheinenden Constanten wäre eine grosse Anzahl von äusserst genauen Versuchen nothwendig, und zur Prüfung derselben müsste man noch zwei- bis dreimal so viel Versuche machen. Diese Versuche sind äusserst schwierig mit hinreichender Genauigkeit durchzuführen, weil sich bei festen Körpern die Dichte nur um sehr wenig ändert, und der geringste Fehler in der Bestimmung der Dichte sehr beträchtliche Ungenauigkeiten veranlassen kann.

Die gewiss sehr schätzenswerthen Versuche *Wertheim's* über die Bestimmung des Modulus der Elastizität sind nicht im entferntesten genügend, um die Gleichung (19) durch numerische Rechnungen prüfen zu können, aber ich glaube, die Folgerungen, welche *Wertheim* aus seinen Versuchen zieht, vollständig hierher setzen zu sollen, obgleich einige derselben auf Verhältnisse Bezug haben, die uns in diesem Augenblick nicht berühren. Diese Folgerungen sind: Mémoires de physique mécanique, par *Wertheim* Pag. (67):

Conclusions.

1. Le coéfficient d'élasticité n'est pas constant pour un même métal; toutes les circonstances qui augmentent la densité le font grandir, et réciproquement.

   Dies ist auch bei unserem Ausdruck (19) der Fall. ε wächst mit s.

2. Les vibrations longitudinales et transversales conduisent sensiblement au même coéfficient d'élasticité.
3. Les vibrations conduisent à des coéfficients d'élasticité plus grands que ceux qu'on obtient par l'allongement. Cette différence provient de l'accélération de mouvement produite par la chaleur dégagée.
4. Par suite, le son dans les corps solides est dû aux ondes avec condensation, et l'on pourra, au moyen de la formule donnée par *Duhamel*, se servir du rapport entre la vitesse théorique et réelle du son, pour trouver le rapport de la chaleur spécifique sans pression constante. Ce rapport est plus grand pour les métaux recuits que pour ceux non recuits.
5. Le coéfficient d'élasticité diminue constamment avec l'élévation de la température, depuis 15 degrés jusqu'à 200 degrés, dans un rapport plus rapide que celui qu'on déduirait de la dilatation correspondante. Cela a lieu pour tous les métaux, excepté le fer et l'acier. Pour ceux-là si l'on prend les températures pour abscisses, et les coéfficients d'élasticité correspondants pour ordonnées, les courbes qui représentent la marche de leur élasticité en fonction de ces températures s'élèvent depuis 15 degrés jusqu'à 100 degrés, puis elles ont un point d'inflexion situé entre 100 et 200 degrés.

Auch unsere Formel zeigt, dass der Modulus der Elastizität von der Temperatur abhängt, weil D mit der Temperatur t veränderlich ist, allein da ich nicht im Stande bin, die wahre Abhängigkeit zwischen D und t anzugeben, so ist eine genauere Vergleichung der obigen Erfahrungen mit unserer Theorie nicht möglich. Für die Mehrzahl der Metalle nimmt ε ab, wenn t wächst. Für Eisen und Stahl findet jedoch das Gegentheil statt.

Da unser D^2 mit t stets wächst, so kann unsere Formel mit dieser Erfahrung nur dann stimmen, wenn der mit D^2 multiplizirte in Klammern eingeschlossene Ausdruck für Eisen und Stahl positiv, für die übrigen Metalle jedoch negativ ist.

6. L'aimantation ne change pas sensiblement l'élasticité du fer.
7. L'allongement des verges ou fils, par l'application de charge, ne change leurs densités que très-peu; le coéfficient d'élasticité ne doit donc aussi varier que de peu dans les diverses positions d'équilibre. C'est, en effet, ce qui a lieu tant que les charges n'approchent pas de très-près celle qui produit la rupture. La loi de *Gerstner* se trouve donc confirmée sur tous les métaux qui atteignent encore sensiblement une position d'équilibre, après avoir dépassé leur limite d'élasticité.

Unsere Gleichung ist für den Fall gefunden, dass der Körper nach allen Richtungen entweder gleichförmig ausgedehnt oder gleichförmig comprimirt werde, kann also auf Stäbe, die nur nach ihrer Länge gedehnt werden, nicht angewendet werden; sie ist jedoch mit der unter Nr. 7 ausgesprochenen Erfahrung in keinem Widerspruch.

8. Les allongements permanents ne se font pas par sauts, par saccades, mais d'une manière continue; en modifiant convenablement la charge et sa durée d'action, on pourra produire tel allongement permanent qu'on voudra.

Wenn ein Körper, dessen Atome axig gestaltet sind, was man bei Metallen wohl annehmen muss, nach einer Richtung stark gedehnt wird, müssen nothwendig Aenderungen in der Stellung und Gruppirung der Atome eintreten, und der Körper wird daher durch jede solche Dehnung gleichsam zu einem anderen Stoff.

9. Une vraie limite d'élasticité n'existe pas, et si l'on n'observe pas d'allongements permanents pour les premières charges, c'est qu'on ne les a pas laissées agir pendant assez de temps, et que la verge, soumise à l'expérience, est trop courte, relativement au degré d'exactitude de l'instrument qui sert aux mesures.

   Les valeurs de l'allongement maximum et de la cohésion dépendent aussi beaucoup de la manière d'opérer; on trouve la première d'autant plus grande, et la seconde d'autant plus petite, que l'on augmente plus lentement les charges. On voit à combien d'arbitraire est soumise la détermination du plus petit et du plus grand allongement permanent, et qu'on ne saurait, avec M. *Lagerhjelm*, fonder une loi sur leurs valeurs.
10. La résistance à la rupture est considérablement diminuée par le recuit. L'élévation de la température jusqu'à 200 degrés ne diminue pas de beaucoup la cohésion des métaux recuits d'avance.
11. Le produit εe^7 du module d'élasticité par la septième puissance de la distance des molécules, ou le produit $\varepsilon s^{-\frac{7}{3}}$ est le même pour la plupart des métaux.

Dies folgt aus unserer Gleichung nicht, ist aber auch nach den von *Wertheim* gefundenen Zahlen so ungenau, dass man diese Folgerung (11) nicht anerkennen kann.

Wenn wir in unserer langen Formel (19) alle auf die Einheit folgenden Glieder des Ausdruckes in der Klammer ganz weglassen, gewiss also sehr derb d'rein gehen, so würde aus derselben folgen, dass annähernd $\frac{\varepsilon}{C^2 s}$ für alle Metalle constant wäre, und das ist in der That wenigstens eben so genau richtig als obiger Ausspruch von *Wertheim*.

	s	ε	c	$\log. \frac{\varepsilon}{C^2 s}$
Blei	11·215	1775	0·0314	5·3010
Eisen . . .	7·848	20869	0·1138	5·3463
Gold. . . .	18·514	5584	0·0324	5·4578
Kupfer . . .	8·933	12450	0·0951	5·2041
Zink. . . .	7·146	9021	0·0955	5·1461

Damit ist wenigstens gezeigt, dass selbst bei einer wahren Misshandlung unserer theoretischen Resultate dennoch Zahlen herauskommen, die sich sehen lassen dürfen.

Formeln dieser Art, wie (19) ist, können mit den bis jetzt bestimmten physikalischen Elementen der Stoffe gar nicht geprüft werden, weil diese Elemente nicht einem und demselben individuellen Stoff entnommen sind. Angenommen z. B., die Beziehung

$$\frac{\varepsilon}{C^2 s} = \text{const.}$$

wäre wirklich eine Wahrheit, was gewiss nicht der Fall ist, so könnte man für diese Constante den rechten Werth nicht finden, wenn man für s das spezifische Gewicht eines gewissen Eisens, für C die Wärmecapazität eines andern Eisens, und für ε den Modulus der Elastizität eines dritten Eisens in Rechnung brächte, sondern nur dann, wenn die Grössen ε C s von einem und demselben Stück Eisen bekannt wären.

Es ist meine Ueberzeugung, dass die den festen Substanzen entsprechenden physikalischen Fundamentalzahlen von Grund aus neu bestimmt werden müssen. Die ganze Million von Versuchen, die mit Eisen gemacht wurden, um das spezifische Gewicht, die Wärmecapazität, den Modulus der Elastizität, die absolute Festigkeit, das Wärme- und Elektrizitäts-Leitungsvermögen dieses Stoffs zu bestimmen, ist beinahe vergeblich gemacht, denn es ist mit diesem ganzen Zahlengetümmel nicht möglich, irgend einen Zusammenhang zwischen den genannten physikalischen Elementen des Eisens ausfindig zu machen, oder ein auf mathematischem Wege gefundenes Resultat zu prüfen, wo hingegen eine vollständige Bestimmung aller physikalischen Elemente von einigen wenigen Stückchen Eisen zur Entdeckung jenes Zusammenhanges führen könnte. Die Naturforscher haben fort und fort das Wort „Thatsache" im Munde, wenn man aber diese Dinge mit scharfem Blick ansieht, fangen diese feststehenden Thatsachen alle zu wackeln an, oder fallen gar zu Boden.

GLEICHGEWICHT EINES DYNAMIDENSYSTEMS MIT ELASTIZITÄTSAXEN.

Die vollständigen Bedingungen des Gleichgewichts eines Dynamidensystems mit Elastizitätsaxen würden die Position und Stellung jeder einzelnen Dynamide des Systems bestimmen. Die Aufsuchung dieser vollständigen Bedingungen führt zu einem Gewühle von analytischen Formeln, die ich nicht zu bewältigen im Stande war. Vermittelst des Prinzipes der virtuellen Geschwindigkeit kann man aber ohne Schwierigkeit einige Beziehungen, welche die Positionen der Dynamiden im Gleichgewichtszustand charakterisiren, auf folgende Art ausfindig machen.

Es seien :

$x\ y\ z$ die Coordinaten des Schwerpunktes einer Dynamide A;

$x_1\ y_1\ z_1$ die Coordinaten des Schwerpunktes einer anderen Dynamide A_1;

$X\ Y\ Z$ die Kräfte, welche von aussen her auf die Masseneinheit der Dynamide A parallel mit den Coordinatenaxen einwirken;

$X_2\ Y_2\ Z_2$ Kräfte, welche nach den positiven Richtungen der Coordinatenaxen auf die Masseneinheit einer an der Oberfläche des Körpers befindlichen Dynamide A_2 von aussen her einwirken;

$x_2\ y_2\ z_2$ die Coordinaten dieses Punktes A_2 an der Oberfläche;

m und m_1 die Massen der Dynamiden A und A_1;

r die Entfernung der Schwerpunkte dieser Dynamiden;

$m\,m_1\,f(r)$ die Wechselwirkung zweier Dynamiden, welche Seite 52 berechnet wurde.

Da jede Dynamide nach jeder Richtung vollkommen frei beweglich ist, so dürfen wir nach dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeit jeder Dynamide eine beliebige Verschiebung ertheilen, und muss für den Gleichgewichtszustand die algebraische Summe der diesen Verschiebungen entsprechenden virtuellen Arbeiten aller Kräfte gleich Null sein. Bezeichnen wir durch :

$$\left.\begin{matrix}\delta x & \delta y & \delta z\\ \delta x_1 & \delta y_1 & \delta z_1\\ \delta x_2 & \delta y_2 & \delta z_2\end{matrix}\right\}$$

die willkührlichen unendlich kleinen Verschiebungen der Dynamiden $A\ A_1\ A_2$, gemessen nach den Coordinatenaxen,

so sind :

$$\left.\begin{matrix} m\,(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z) \\ m\,(X_2\,\delta x_2 + Y_2\,\delta y_2 + Z_2\,\delta z_2)\end{matrix}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

die virtuellen Arbeiten, welche zweien der äusseren Kräften entsprechen, und ist :

$$m\,m_1\,f(r)\left\{\begin{matrix} \frac{x_1-x}{r}\,\delta x_1 + \frac{y_1-y}{r}\,\delta y_1 + \frac{z_1-z}{r}\,\delta z_1 \\ -\frac{x_1-x}{r}\,\delta x - \frac{y_1-y}{r}\,\delta y - \frac{z_1-z}{r}\,\delta z \end{matrix}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

die virtuelle Arbeit, welche der Distanzänderung der Dynamiden A und A_1 entspricht.

Bezeichnen wir die relativen Coordinaten von A_1 gegen A mit $\Delta x \; \Delta y \; \Delta z$, setzen demnach:

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x &= \Delta x \\ y_1 - y &= \Delta y \\ z_1 - z &= \Delta z \end{aligned}\right\} .$$

so wird der Ausdruck (2):

$$m\, m_1\, f(r) \left[\frac{\Delta x}{r}\, \delta(\Delta x) + \frac{\Delta y}{r}\, \delta(\Delta y) + \frac{\Delta z}{r}\, \delta(\Delta z) \right]$$

Die Summe der virtuellen Arbeiten, welche den Distanzänderungen sämmtlicher Dynamiden gegen die Dynamide A entspricht, ist demnach:

$$m\, S\, m_1\, f(r) \left[\frac{\Delta x}{r}\, \delta(\Delta x) + \frac{\Delta y}{r}\, \delta(\Delta y) + \frac{\Delta z}{r}\, \delta(\Delta z) \right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

wobei sich das Summenzeichen S auf alle $\Delta x \; \Delta y \; \Delta z$, also auf alle m_1 bezieht; und die Summe der virtuellen Arbeiten, welche der Distanzänderung jeder Dynamide gegen jede andere entspricht, ist endlich:

$$\frac{1}{2}\, \Sigma m\, S\, m_1\, f(r) \left[\frac{\Delta x}{r}\, \delta(\Delta x) + \frac{\Delta y}{r}\, \delta(\Delta y) + \frac{\Delta z}{r}\, \delta(\Delta z) \right] \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

wobei sich das Summenzeichen Σ auf alle Massen m oder auf alle $x \; y \; z$ bezieht. Dieser Ausdruck fordert, dass man für jede Dynamide des Systems die dem Ausdruck (3) analoge Grösse berechnen, und alle diese Grössen addiren, aber schliesslich von dieser Summe nur die Hälfte nehmen soll. Der Faktor $\frac{1}{2}$ rührt daher, dass durch die Summirungen Σ und S jede virtuelle Arbeit zweimal genommen wird, während sie nach dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeit nur einmal genommen werden darf.

Wenn auf das Dynamidensystem keine oder solche äussere Kräfte einwirkten, dass die Elastizität oder die Dynamidengruppirung um jede Dynamide des Systems herum von ganz gleicher Beschaffenheit wäre, würde der Ausdruck (3) für jede Dynamide den gleichen Werth haben, mit Ausnahme derjenigen Dynamiden, die sich ganz in der Nähe der Oberfläche des Systems befinden, und dann erhielte man statt des Ausdruckes (4) sehr nahe:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{M}{m}\, S\, m_1\, f(r) \left[\frac{\Delta x}{r}\, \delta(\Delta x) + \frac{\Delta y}{r}\, \delta(\Delta y) + \frac{\Delta z}{r}\, \delta(\Delta z) \right] \quad . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Wenn wir aber in Bezug auf die äusseren Kräfte keine Beschränkung annehmen, so erhalten wir nach dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeit als Gleichgewichtsbedingung:

$$o = \left\{ \begin{array}{l} \Sigma m\,(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z) + \Sigma m\,(X_2\,\delta x_2 + Y_2\,\delta y_2 + Z_2\,\delta z_2) + \\ \quad + \frac{1}{2}\,\Sigma m\,S\,m_1\,f(r) \left[\frac{\Delta x}{r}\,\delta(\Delta x) + \frac{\Delta y}{r}\,\delta(\Delta y) + \frac{\Delta z}{r}\,\delta(\Delta z) \right] \end{array} \right\} \ldots \quad (6)$$

Da nun die Verschiebungen absolut willkührlich sind, so dürfen wir uns erlauben zu setzen:

$$\left. \begin{array}{l} \delta x = h_0 + h_1\,x + h_2\,y + h_3\,z \\ \delta y = k_0 + k_1\,x + k_2\,y + k_3\,z \\ \delta z = l_0 + l_1\,x + l_2\,y + l_3\,z \end{array} \right| \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

wobei $h_0\ h_1\ h_2\ h_3\ k_0\ k_1\ k_2\ k_3\ l_0\ l_1\ l_2\ l_3$ unendlich kleine, aber absolut willkührliche Grössen bezeichnen; und dann erhalten wir:

$$\Sigma m\,(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z) = \Sigma m \left\{ \begin{array}{l} X\,(h_0 + h_1\,x + h_2\,y + h_3\,z) \\ Y\,(k_0 + k_1\,x + k_2\,y + k_3\,z) \\ Z\,(l_0 + l_1\,x + l_2\,y + l_3\,z) \end{array} \right\}$$

oder:

$$\Sigma m\,(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z) = \left\{ \begin{array}{l} h_0\,\Sigma m X \quad + k_0\,\Sigma m Y \quad + l_0\,\Sigma m Z \\ h_1\,\Sigma m X x + h_2\,\Sigma m X y + h_3\,\Sigma m X z \\ k_1\,\Sigma m Y x + k_2\,\Sigma m Y y + k_3\,\Sigma m Y z \\ l_1\,\Sigma m Z x + l_2\,\Sigma m Z y + l_3\,\Sigma m Z z \end{array} \right\} \ldots \quad (8)$$

ferner:

$$\Sigma m\,(X_2\,\delta x_2 + Y_2\,\delta y_2 + Z_2\,\delta z_2) = \left\{ \begin{array}{l} h_0\,\Sigma m X_2 \quad + k_0\,\Sigma m Y_2 \quad + l_0\,\Sigma m Z_2 \\ h_1\,\Sigma m X_2\,x_2 + h_2\,\Sigma m X_2\,y_2 + h_3\,\Sigma m X_2\,z_2 \\ k_1\,\Sigma m Y_2\,x_2 + k_2\,\Sigma m Y_2\,y_2 + k_3\,\Sigma m Y_2\,z_2 \\ l_1\,\Sigma m Z_2\,x_2 + l_2\,\Sigma m Z_2\,y_2 + l_3\,\Sigma m Z_2\,z_2 \end{array} \right\} \quad (9)$$

endlich wird:

$$\frac{1}{2}\,\Sigma m\,S\,m_1\,f(r) \left[\frac{\Delta x}{r}\,\delta(\Delta x) + \frac{\Delta y}{r}\,\delta(\Delta y) + \frac{\Delta z}{r}\,\delta(\Delta z) \right] =$$

$$= \frac{1}{2}\,\Sigma m \left\{ \begin{array}{l} S\,m_1\,f(r)\,\frac{\Delta x}{r}\,(h_1\,\Delta x + h_2\,\Delta y + h_3\,\Delta z) \\ S\,m_1\,f(r)\,\frac{\Delta y}{r}\,(k_1\,\Delta x + k_2\,\Delta y + k_3\,\Delta z) \\ S\,m_1\,f(r)\,\frac{\Delta z}{r}\,(l_1\,\Delta x + l_2\,\Delta y + l_3\,\Delta z) \end{array} \right\}$$

oder auch:

$$\frac{1}{2}\,\Sigma\, m\, S\, m_1\, f(r)\left[\frac{\Delta x}{r}\,\delta(\Delta x)+\frac{\Delta y}{r}\,\delta(\Delta y)+\frac{\Delta z}{r}\,\delta(\Delta z)\right]=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}
h_1\,\frac{1}{2}\,\Sigma m S m_1 f(r)\,\frac{\Delta x^2}{r}+h_2\,\frac{1}{2}\,\Sigma m S m_1 f(r)\,\frac{\Delta x\,\Delta y}{r}+h_3\,\frac{1}{2}\,\Sigma m S m_1 f(r)\,\frac{\Delta x\,\Delta z}{r}\\
k_1\,\frac{1}{2}\,\Sigma m S m_1 f(r)\,\frac{\Delta x\,\Delta y}{r}+k_2\,\frac{1}{2}\,\Sigma m S m_1 f(r)\,\frac{\Delta y^2}{r}+k_3\,\frac{1}{2}\,\Sigma m S m_1 f(r)\,\frac{\Delta y\,\Delta z}{r}\\
l_1\,\frac{1}{2}\,\Sigma m S m_1 f(r)\,\frac{\Delta x\,\Delta z}{r}+l_2\,\frac{1}{2}\,\Sigma m S m_1 f(r)\,\frac{\Delta y\,\Delta z}{r}+l_3\,\frac{1}{2}\,\Sigma m S m_1 f(r)\,\frac{\Delta z^2}{r}.
\end{array}\right\}\quad(10)$$

Setzen wir die Werthe, welche die Gleichungen (8), (9) und (10) darbieten, in die Gleichung (6), und ordnen die Glieder, so finden wir:

$$0=\left\{\begin{array}{l}
h_0\,\Sigma m(X+X_2)+k_0\,\Sigma m(Y+Y_2)+l_0\,\Sigma m(Z+Z_2)\\
h_1\left[\Sigma m(Xx+X_2x_2)+\frac{1}{2}\,\Sigma m S m_1 f(r)\,\frac{\Delta x^2}{r}\right]\\
h_2\left[\Sigma m(Xy+X_2y_2)+\frac{1}{2}\,\Sigma m S m_1 f(r)\,\frac{\Delta x\,\Delta y}{r}\right]\\
h_3\left[\Sigma m(Xz+X_2z_2)+\frac{1}{2}\,\Sigma m S m_1 f(r)\,\frac{\Delta x\,\Delta z}{r}\right]\\
k_1\left[\Sigma m(Yx+Y_2x_2)+\frac{1}{2}\,\Sigma m S m_1 f(r)\,\frac{\Delta x\,\Delta y}{r}\right]\\
k_2\left[\Sigma m(Yy+Y_2y_2)+\frac{1}{2}\,\Sigma m S m_1 f(r)\,\frac{\Delta y^2}{r}\right]\\
k_3\left[\Sigma m(Yz+Y_2z_2)+\frac{1}{2}\,\Sigma m S m_1 f(r)\,\frac{\Delta y\,\Delta z}{r}\right]\\
l_1\left[\Sigma m(Zx+Z_2x_2)+\frac{1}{2}\,\Sigma m S m_1 f(r)\,\frac{\Delta x\,\Delta z}{r}\right]\\
l_2\left[\Sigma m(Zy+Z_2y_2)+\frac{1}{2}\,\Sigma m S m_1 f(r)\,\frac{\Delta y\,\Delta z}{r}\right]\\
l_3\left[\Sigma m(Zz+Z_2z_2)+\frac{1}{2}\,\Sigma m S m_1 f(r)\,\frac{\Delta z^2}{r}\right]
\end{array}\right\}$$

Da nun die unendlich kleinen Grössen $h_0\ k_0\ l_0\ h_1\ k_1\ l_1\ h_2\ k_2\ l_2\ h_3\ k_3\ l_3$ von einander ganz unabhängig und überhaupt ganz willkührlich sind, so kann die letzte Gleichung nur bestehen, wenn jeder mit einer solchen willkührlichen Grösse multiplizirte Faktor gleich Null ist. Demnach bestehen im Gleichgewichtszustand des Mediums folgende Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma m (X + X_2) &= o \\ \Sigma m (Y + Y_2) &= o \\ \Sigma m (Z + Z_2) &= o \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

$$\left.\begin{aligned} \Sigma m (X x + X_2 x_2) + \frac{1}{2} \Sigma m S m_1 f(r) \frac{\Delta x^2}{r} &= o \\ \Sigma m (X y + X_2 y_2) + \frac{1}{2} \Sigma m S m_1 f(r) \frac{\Delta x \, \Delta y}{r} &= o \\ \Sigma m (X z + X_2 z_2) + \frac{1}{2} \Sigma m S m_1 f(r) \frac{\Delta x \, \Delta z}{r} &= o \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

$$\left.\begin{aligned} \Sigma m (Y x + Y_2 x_2) + \frac{1}{2} \Sigma m S m_1 f(r) \frac{\Delta x \, \Delta y}{r} &= o \\ \Sigma m (Y y + Y_2 y_2) + \frac{1}{2} \Sigma m S m_1 f(r) \frac{\Delta y^2}{r} &= o \\ \Sigma m (Y z + Y_2 z_2) + \frac{1}{2} \Sigma m S m_1 f(r) \frac{\Delta y \, \Delta z}{r} &= o \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

$$\left.\begin{aligned} \Sigma m (Z x + Z_2 x_2) + \frac{1}{2} \Sigma m S m_1 f(r) \frac{\Delta x \, \Delta z}{r} &= o \\ \Sigma m (Z y + Z_2 y_2) + \frac{1}{2} \Sigma m S m_1 f(r) \frac{\Delta y \, \Delta z}{r} &= o \\ \Sigma m (Z z + Z_2 z_2) + \frac{1}{2} \Sigma m S m_1 f(r) \frac{\Delta z^2}{r} &= o \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

Aus diesen Gleichungen folgt auch:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma m (X + X_2) &= o \\ \Sigma m (Y + Y_2) &= o \\ \Sigma m (Z + Z_2) &= o \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

$$\left.\begin{aligned} \Sigma m (X y - Y x) + \Sigma m (X_2 y_2 - Y_2 x_2) &= o \\ \Sigma m (X z - Z x) + \Sigma m (X_2 z_2 - Z_2 x_2) &= o \\ \Sigma m (Y z - Z y) + \Sigma m (Y_2 z_2 - Z_2 y_2) &= o \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

$$\left.\begin{aligned} \Sigma m (X x + X_2 x_2) + \frac{1}{2} \Sigma m S m_1 f(r) \frac{\Delta x^2}{r} &= o \\ \Sigma m (Y y + Y_2 y_2) + \frac{1}{2} \Sigma m S m_1 f(r) \frac{\Delta y^2}{r} &= o \\ \Sigma m (Z z + Z_2 z_2) + \frac{1}{2} \Sigma m S m_1 f(r) \frac{\Delta z^2}{r} &= o \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\Sigma\, m\, (X y + X_2 y_2) + \frac{1}{2} \Sigma\, m\, S\, m_1\, f(r)\, \frac{\Delta x\, \Delta y}{r} = o \\
&\Sigma\, m\, (Y z + Y_2 z_2) + \frac{1}{2} \Sigma\, m\, S\, m_1\, f(r)\, \frac{\Delta y\, \Delta z}{r} = o \\
&\Sigma\, m\, (Z x + Z_2 x_2) + \frac{1}{2} \Sigma\, m\, S\, m_1\, f(r)\, \frac{\Delta z\, \Delta x}{r} = o
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

Die Gleichungen (15) und (16) sind bekanntlich die Bedingungen, welche zwischen den äusseren auf einen Körper einwirkenden Kräften im Gleichgewichtszustand erfüllt sein müssen.

Die Gleichungen (17) und (18) sind gewisse Beziehungen zwischen den äusseren und inneren Kräften des Systems.

Steht das System nur unter der Einwirkung der inneren Kräfte, sind also $X = Y = Z = X_0 = Y_0 = Z_0 = o$, so hat man vermöge (17) und (18):

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \Sigma\, m\, S\, m_1\, f(r) \frac{\Delta x^2}{r} = o \\
&\frac{1}{2} \Sigma\, m\, S\, m_1\, f(r) \frac{\Delta y^2}{r} = o \\
&\frac{1}{2} \Sigma\, m\, S\, m_1\, f(r) \frac{\Delta z^2}{r} = o
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (19)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \Sigma\, m\, S\, m_1\, f(r)\, \frac{\Delta x\, \Delta y}{r} = o \\
&\frac{1}{2} \Sigma\, m\, S\, m_1\, f(r)\, \frac{\Delta y\, \Delta z}{r} = o \\
&\frac{1}{2} \Sigma\, m\, S\, m_1\, f(r)\, \frac{\Delta z\, \Delta x}{r} = o
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (20)$$

oder auch weil in diesem Falle das Summenzeichen Σ weggelassen, und dafür der constante Faktor $\frac{M}{m}$ gesetzt werden darf:

$$\left.\begin{aligned}
&S\, m_1\, \frac{f(r)}{r}\, \Delta x^2 = o \\
&S\, m_1\, \frac{f(r)}{r}\, \Delta y^2 = o \\
&S\, m_1\, \frac{f(r)}{r}\, \Delta z^2 = o
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (21)$$

$$\left.\begin{array}{l} S\, m_1 \frac{f(r)}{r} \Delta x\, \Delta y = 0 \\[2ex] S\, m_1 \frac{f(r)}{r} \Delta x\, \Delta z = 0 \\[2ex] S\, m_1 \frac{f(r)}{r} \Delta y\, \Delta z = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

Die Beziehungen (22) sind für sich klar, wenn die Gruppirung der Dynamiden von der Art ist, dass jedem Punkt, dessen relative Coordinaten $\Delta x \;\; \Delta y \;\; \Delta z$ sind, ein anderer Punkt entspricht, dessen Coordinaten $-\Delta x \;\; -\Delta y \;\; -\Delta z$ sind. Aber die Gleichungen (21) waren nicht vorauszusehen, und man sieht aus denselben, dass $f(r)$ für gewisse Werthe von r positiv, für andere dagegen negativ sein muss, was auch in der That nach unseren Untersuchungen über die Natur von $f(r)$ der Fall ist. Denn wir haben Seite 55 gefunden :

$$f(r) = C^2 J(r) - 2\, C\, G(r) - F(r) + \frac{C}{12}\left[C\, \frac{d^2 J(r)}{d r^2} - \frac{d^2 G(r)}{d r^2}\right] D^2 \quad . \; . \; . \quad (23)$$

Will man die Sache ganz streng nehmen, so darf in dieser Untersuchung für $f(r)$ nicht dieser Ausdruck (23) gesetzt werden, denn in diesem ist der Einfluss der Gestalt vernachlässigt, sondern man müsste in den Gleichungen bis inclusive (22) $f(r)$ als eine Funktion ansehen, die nicht blos mit r, sondern auch mit der Richtung von r veränderlich wäre. Denn da wir ein Medium voraussetzen, das nach verschiedenen Richtungen verschiedene Elastizitäten besitzt, so ist die Anziehung zweier Atome, die in einer der Elastizitätsaxen liegen, anders als die Anziehung zweier Atome, die in einer anderen Elastizitätsaxe sind.

Die Gleichungen (17) und (18) leisten zur Lösung von vielen Problemen vortreffliche Dienste; sie können insbesondere als Grundlage zu einer Theorie des Gleichgewichtes elastischer Körper gebraucht werden. Will man den Gleichgewichtszustand eines Stabes, der durch die Einwirkung äusserer Kräfte gebogen oder gedreht wird, mit vollkommener Schärfe bestimmen, so hat man es mit einem ausserordentlich schwierigen Probleme zu thun, dessen vollkommene Lösung noch lange nicht gelingen wird, wovon man sich am besten durch die Arbeiten *Lamé's* in seiner „Théorie de l'élasticité“ überzeugen kann. Für die praktischen Zwecke des Ingenieur- und Maschinenfaches macht man sich die Sache sehr bequem, und kommt dennoch zu Resultaten, die wenigstens eben so genau sind als die genauesten, welche heut zu Tag die Physik aufzuweisen hat, mit Ausnahme der optischen. Handelt es sich um einen Stab, der durch äussere Kräfte gebogen wird, so nimmt man an : 1) dass alle Atome, welche ursprünglich in einem Querschnitt des Stabes lagen, nach erfolgter Biegung in einem auf der Biegungslinie normalen Querschnitt liegen; 2) dass die Atome eines und desselben Querschnittes durch die Biegung ihre relative Gegeneinanderlagerung nicht ändern; 3) dass alle ursprünglich geraden zur Axe des Stabes parallelen Fasern nach erfolgter Biegung äqui-distante

Linien bilden. Oder handelt es sich um die Drehung eines Stabes, so nimmt man an: 1) dass alle Atome, welche ursprünglich in einem Querschnitt liegen, durch die Drehung ihre relative Lage gegen einander nicht ändern; 2) dass der Winkel, um welchen zwei Querschnitte des Stabes durch die Drehung gegen einander gewendet werden, dem Abstand der Querschnitte proportional ist. Man nimmt also jedesmal bei jedem Problem gewisse Gegeneinander-Verschiebungen der Atome an, berechnet die diesen Verschiebungen entsprechenden Kräfte, indem man dieselben den Verschiebungen proportional setzt, und sucht hierauf die Bedingungen des Gleichgewichts.

Auf diese Weise umgeht man durch mehr oder weniger naturgemässe Annahmen die Hauptschwierigkeiten des Problems, nämlich die Bestimmung der Verschiebungen, kommt aber zu Resultaten, welche mit den Thatsachen in den meisten Fällen eben so gut stimmen, wie die bis jetzt im Gebiete der Physik durchgeführten Rechnungen. Allein durch diese leichte Behandlung dieser Aufgaben ist zunächst für die Wissenschaft nicht viel gewonnen, und werden die technischen Fragen keineswegs vollständig beantwortet. Denn es ist in dieser letzteren Hinsicht gerade von besonderer Wichtigkeit, die Umstände und Bedingungen kennen zu lernen, unter welchen diese Annahmen zulässig sind, denn nur dann, wenn dies der Fall ist, werden die Rechnungsresultate eine hinreichende Genauigkeit gewähren können, und nur dann, wenn im deformirten Zustand eines Körpers solche Atomlagerungen vorhanden sind, wie bei der Rechnung vorausgesetzt wird, kann dieser Körper als ein solides Glied einer technischen Construktion dienen; denn wenn z. B. an den unteren Kanten eines nach abwärts gebogenen stabförmigen Körpers nicht blos Zusammendrückungen, sondern gleichzeitig Faltungen eintreten, oder wenn dieser Körper auch zu einer Drehung leicht inclinirt, so kann derselbe nicht als ein solides Construktionsglied gelten.

Es ist daher für diese praktischen Fragen von grosser Wichtigkeit, die Bedingungen kennen zu lernen, unter welchen der deformirte Zustand eines Körpers gerade von der Art sein wird, wie bei der Rechnung vorausgesetzt wird, und diese Bedingungen können vermittelst der Gleichungen (17) und (18) ausfindig gemacht werden.

UMGESTALTUNG DER GLEICHGEWICHTSGLEICHUNGEN (17) UND (18).

Die Gleichungen (17) und (18) können in einer Weise umgestaltet werden, dass die Lösung der Gleichgewichtsprobleme elastischer Körper sehr vereinfacht wird.

Wir wollen einen Gleichgewichtszustand einen natürlichen nennen, wenn der Körper nur allein der Thätigkeit der inneren Kräfte überlassen ist, also keinerlei äussere Kräfte einwirken; dagegen einen erzwungenen, wenn auf den Körper nicht nur innere, sondern auch äussere Kräfte einwirken. Für den natürlichen Gleichgewichtszustand ist also zu setzen:

$$X = Y = Z = X_0 = Y_0 = Z_0 = 0$$

Es seien nun für den natürlichen Gleichgewichtszustand des Körpers $x_0\ y_0\ z_0$ die Coordinaten eines Atoms A des Körpers, $x_0 + \Delta x_0$, $y_0 + \Delta y_0$, $z_0 + \Delta z_0$ die Coordinaten eines andern Atoms A_1 des gleichen Körpers. Wird nun dieser Körper durch die Einwirkung von äusseren Kräften $X\ Y\ Z\ X_2\ Y_2\ Z_2$ deformirt, so werden die Atome A und A_1 in dem nun erzwungenen Gleichgewichtszustand gewisse Positionen haben, deren Coordinaten wir beziehungsweise mit $x\ y\ z$, $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ bezeichnen wollen.

Nennen wir $\xi\ v\ \zeta$, $\xi + \Delta\xi$, $v + \Delta v$, $\zeta + \Delta\zeta$ die Aenderungen, welche in den Coordinaten der Atome A und A_1 bei dem Uebergang aus dem natürlichen Gleichgewichtszustand in den erzwungenen eingetreten sind; setzen demnach:

$$\left.\begin{array}{ll} \xi = x - x_0 & \xi + \Delta\xi = x + \Delta x - (x_0 + \Delta x_0) \\ v = y - y_0 & v + \Delta v = y + \Delta y - (y_0 + \Delta y_0) \\ \zeta = z - z_0 & \zeta + \Delta\zeta = z + \Delta z - (z_0 + \Delta z_0) \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (24)$$

so erhalten wir:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta x = \Delta x_0 + \Delta\xi \\ \Delta y = \Delta y_0 + \Delta v \\ \Delta z = \Delta z_0 + \Delta\zeta \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

Nennen wir endlich noch r_0 und $r_0 + \varrho$ die Entfernungen der Atome A und A_1 im natürlichen und im erzwungenen Gleichgewicht, so ist:

$$\left.\begin{array}{r} r_0^2 = \Delta x_0^2 + \Delta y_0^2 + \Delta z_0^2 \\ (r_0 + \varrho)^2 = (\Delta x_0 + \Delta\xi)^2 + (\Delta y_0 + \Delta v)^2 + (\Delta z_0 + \Delta\zeta)^2 \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (26)$$

Wir wollen von nun an voraussetzen, dass der Körper bei dem Uebergang aus dem natürlichen in den erzwungenen Gleichgewichtszustand nur um äusserst wenig deformirt werde; dann wird es erlaubt sein, im weiteren Verlauf der Rechnung $\Delta\xi\ \Delta v\ \Delta\zeta$ als unendlich kleine Grössen zu behandeln, und alle Glieder, welche zweite oder höhere Dimensionen dieser Grössen enthalten zu vernachlässigen.

Unter diesen Voraussetzungen folgt zunächst aus den Gleichungen (26):

$$\varrho = \frac{1}{r_0}(\Delta x_0\, \Delta\xi + \Delta y_0\, \Delta v + \Delta z_0\, \Delta\zeta) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

folgt ferner aus dem *Taylor*'schen Satz:

$$\frac{f(r)}{r} = \frac{f(r_0)}{r_0} + \frac{d\left(\frac{1}{r_0} f(r_0)\right)}{d r_0}\,\varrho$$

oder wenn man für ϱ seinen Werth aus (27) setzt:

$$\frac{f(r)}{r} = \frac{f(r_0)}{r_0} + \frac{1}{r_0} \frac{d\left(\frac{1}{r_0} f(r_0)\right)}{d r_0} (\varDelta x_0 \varDelta \xi + \varDelta y_0 \varDelta v + \varDelta z_0 \varDelta \zeta) \quad . \; . \; . \quad (28)$$

Wenn man die Glieder, welche zweite Dimensionen von $\varDelta\xi$ $\varDelta v$ $\varDelta\zeta$ enthalten, vernachlässigt, findet man aus (25):

$$\left.\begin{array}{l|l} \varDelta x^2 = \varDelta x_0^2 + 2 \varDelta x_0 \varDelta \xi & \varDelta x \varDelta y = \varDelta x_0 \varDelta y_0 + (\varDelta x_0 \varDelta v + \varDelta y_0 \varDelta \xi) \\ \varDelta y^2 = \varDelta y_0^2 + 2 \varDelta y_0 \varDelta v & \varDelta x \varDelta z = \varDelta x_0 \varDelta z_0 + (\varDelta x_0 \varDelta \zeta + \varDelta z_0 \varDelta \xi) \\ \varDelta z^2 = \varDelta z_0^2 + 2 \varDelta z_0 \varDelta \zeta & \varDelta y \varDelta z = \varDelta x_0 \varDelta z_0 + (\varDelta y_0 \varDelta \zeta + \varDelta z_0 \varDelta v) \end{array}\right\} \quad (29)$$

Substituirt man diese Resultate (27), (28), (29) in die Gleichungen (17) und (18), setzt zur Abkürzung:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{m_1}{2} \frac{f(r_0)}{r_0} = \mathfrak{H} \\ \frac{m_1}{2} \frac{1}{r_0} \frac{d\left(\frac{1}{r_0} f(r_0)\right)}{d r_0} = \mathfrak{K} \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (30)$$

und berücksichtigt, dass im natürlichen Gleichgewicht:

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma m S \mathfrak{H} \varDelta x_0^2 = o \\ \Sigma m S \mathfrak{H} \varDelta y_0^2 = o \\ \Sigma m S \mathfrak{H} \varDelta z_0^2 = o \\ \Sigma m S \mathfrak{H} \varDelta x_0 \varDelta y_0 = o \\ \Sigma m S \mathfrak{H} \varDelta x_0 \varDelta z_0 = o \\ \Sigma m S \mathfrak{H} \varDelta y_0 \varDelta z_0 = o \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (31)$$

ist, so erhalten die Gleichungen (17) und (18) folgende Gestalten:

$$\left.\begin{array}{l} o = \Sigma m (X x + X_2 x_2) + \Sigma m S \left[(2 \mathfrak{H} \varDelta x_0 + \mathfrak{K} \varDelta x_0^3) \varDelta \xi + \mathfrak{K} \varDelta x_0^2 \varDelta y_0 \varDelta v + \mathfrak{K} \varDelta x_0^2 \varDelta z_0 \varDelta \zeta\right] \\ o = \Sigma m (Y y + Y_2 y_2) + \Sigma m S \left[(2 \mathfrak{H} \varDelta y_0 + \mathfrak{K} \varDelta y_0^3) \varDelta v + \mathfrak{K} \varDelta y_0^2 \varDelta x_0 \varDelta \xi + \mathfrak{K} \varDelta y_0^2 \varDelta z_0 \varDelta \zeta\right] \\ o = \Sigma m (Z z + Z_2 z_2) + \Sigma m S \left[(2 \mathfrak{H} \varDelta z_0 + \mathfrak{K} \varDelta z_0^3) \varDelta \zeta + \mathfrak{K} \varDelta z_0^2 \varDelta y_0 \varDelta v + \mathfrak{K} \varDelta z_0^2 \varDelta x_0 \varDelta \xi\right] \end{array}\right\} \quad (32)$$

$$\left.\begin{array}{l}
o = \Sigma m\,(X\,y + X_2\,y_2) + \Sigma m\,S\,\Big[(\mathfrak{H}\,\varDelta y_0 + \mathfrak{K}\,\varDelta y_0\,\varDelta x_0^2)\,\varDelta\xi + (\mathfrak{H}\,\varDelta x_0 + \mathfrak{K}\,\varDelta x_0\,\varDelta y_0^2)\,\varDelta v + \\
\qquad\qquad\qquad + \mathfrak{K}\,\varDelta x_0\,\varDelta y_0\,\varDelta z_0\,\varDelta\zeta\Big] \\
o = \Sigma m\,(Y\,z + Y_2\,z_2) + \Sigma m\,S\,\Big[\mathfrak{K}\,\varDelta x_0\,\varDelta y_0\,\varDelta z_0\,\varDelta\xi + (\mathfrak{H}\,\varDelta z_0 + \mathfrak{K}\,\varDelta z_0\,\varDelta y_0^2)\,\varDelta v + \\
\qquad\qquad\qquad + (\mathfrak{H}\,\varDelta y_0 + \mathfrak{K}\,\varDelta y_0\,\varDelta z_0^2)\,\varDelta\zeta\Big] \\
o = \Sigma m\,(Z\,x + Z_2\,x_2) + \Sigma m\,S\,\Big[(\mathfrak{H}\,\varDelta z_0 + \mathfrak{K}\,\varDelta z_0\,\varDelta x_0^2)\,\varDelta\xi + \mathfrak{K}\,\varDelta x_0\,\varDelta y_0\,\varDelta z_0\,\varDelta v + \\
\qquad\qquad\qquad + (\mathfrak{H}\,\varDelta x_0 + \mathfrak{K}\,\varDelta x_0\,\varDelta z_0^2)\,\varDelta\zeta\Big]
\end{array}\right\}\quad(33)$$

Ausserdem bestehen auch noch die Gleichungen (15) und (16), nämlich:

$$\Sigma m\,(X + X_2) = o \qquad \Sigma m\,(Y + Y_2) = o \qquad \Sigma m\,(Z + Z_2) = o \quad . \quad . \quad (34)$$

$$\left.\begin{array}{l}
\Sigma m\,(X\,y - Y\,x) + \Sigma m\,(X_2\,y_2 - Y_2\,x_2) = o \\
\Sigma m\,(Y\,z - Z\,y) + \Sigma m\,(Y_2\,z_2 - Z_2\,y_2) = o \\
\Sigma m\,(Z\,x - X\,z) + \Sigma m\,(Z_2\,x_2 - X_2\,z_2) = o
\end{array}\right\}\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

Vermittelst dieser Gleichungen (32), (33), (34), (35) können zwar nicht alle, aber doch sehr viele das Gleichgewicht elastischer Körper betreffende Aufgaben gelöst werden.

Man kann sich in dieser Hinsicht zweierlei Hauptfragen stellen. Man kann entweder die natürliche Gestalt des Körpers und das deformirende Kräftesystem als gegeben betrachten und die Deformirung zu bestimmen suchen. In diesem Falle sind die Kräfte $X\,Y\,Z\,X_2\,Y_2\,Z_2$, so wie die Coordinaten $x_0\,y_0\,z_0$ gegeben, und sind die Coordinaten $\xi\,v\,\zeta$, so wie die Differenzen $\varDelta\xi\;\varDelta v\;\varDelta\zeta$ zu suchen. In dieser Weise wird gewöhnlich bei analytischen Behandlungen die Frage gestellt; ihre Beantwortung führt aber unvermeidlich zu enormen Schwierigkeiten, weil die Verschiebungen $\xi\,v\,\zeta$ meistens äusserst complizirte Grössen sind. Man kann aber auch die Frage umkehren, indem man die Gestalt des Körpers und die Verschiebungen annimmt, die ja ganz beliebig sein können, dagegen das Kräftesystem zu bestimmen sucht, welches diese angenommenen Verschiebungen hervorzubringen vermag. Diese umgekehrte Fragestellung ist eigentlich diejenige, welche gewöhnlich bei technischen Aufgaben gestellt wird.

Um die Anwendung der erhaltenen Gleichungen zu zeigen, wollen wir einige Aufgaben lösen.

ZUSAMMENDRÜCKUNG EINES PARALLELEPIPEDISCHEN KÖRPERS.

Ein Körper habe im natürlichen Zustand die Gestalt eines Parallelepipeds. Das Material sei nicht nach allen Richtungen gleich leicht zusammendrückbar. Die Elastizitätsaxen seien den Kanten des Körpers parallel. Wir versetzen diesen Körper in einen andern Zustand, in welchem derselbe nach den Richtungen seiner Kanten gleichförmig zusammengedrückt ist, jedoch nach jeder Kantenrichtung in einem andern Maasse, und stellen uns die Frage, die Kräfte zu bestimmen, welche einen solchen Zustand herbeiführen können. In diesem Falle ist das Kräftesystem seiner Art nach leicht zu errathen. Wir müssen nämlich zunächst die auf die einzelnen Atome einwirkenden äusseren Kräfte $X_m\ Y_m\ Z_m$ gleich Null setzen, und müssen ferner gegen die parallelen Flächen des Körpers gleichförmig vertheilte Pressungen von einer gewissen Intensität wirken lassen.

Legen wir das Coordinatensystem $Ox\ Oy\ Oz$ so, dass der Anfangspunkt der Coordinaten mit dem Mittelpunkt einer Fläche des Parallelepipeds und dass die Axe Ox mit der geometrischen Axe der Gestalt des Körpers zusammenfällt, dass ferner die Axen Oy und Oz mit den beiden andern Kanten parallel werden, und nennen wir $\alpha\ \beta\ \gamma$ die linearen Verkürzungen des Parallelepipedes nach den Richtungen der Axen $Ox\ Oy\ Oz$, dann ist offenbar zu setzen:

$$\left.\begin{aligned} \Delta\xi &= -\alpha\,\Delta x_0 \\ \Delta\upsilon &= -\beta\,\Delta y_0 \\ \Delta\zeta &= -\gamma\,\Delta z_0 \end{aligned}\right| \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

Ferner:

$$X = Y = Z = o$$

Nennen wir ferner $a\ b\ c$ die den Axen $Ox\ Oy\ Oz$ parallelen Seiten des Körpers, $\mathfrak{X}\ \mathfrak{Y}\ \mathfrak{Z}$ die Pressungen, welche gegen jede Flächeneinheit der Begränzungsflächen $bc\ ac\ ab$ des Körpers wirken müssen, um die vorgeschriebenen Zusammenpressungen zu bewirken, so hat man:

$$\Sigma m\,(X x + X_2 x_2) = -abc\mathfrak{X}$$

$$\Sigma m\,(Y y + Y_2 y_2) = -abc\mathfrak{Y}$$

$$\Sigma m\,(Z z + Z_2 z_2) = -abc\mathfrak{Z}$$

Die Gleichungen (32) werden demnach in diesem Falle:

$$+abc\mathfrak{X} = -\Sigma m S\left[(2\mathfrak{H}\,\Delta x_0 + \mathfrak{K}\,\Delta x_0^3)\,\alpha\,\Delta x_0 + \mathfrak{K}\,\Delta x_0^2\,\Delta y_0^2\,\beta + \mathfrak{K}\,\Delta x_0^2\,\Delta z_0^2\,\gamma\right]$$

$$+abc\mathfrak{Y} = -\Sigma m S\left[(2\mathfrak{H}\,\Delta y_0 + \mathfrak{K}\,\Delta y_0^3)\,\beta\,\Delta y_0 + \mathfrak{K}\,\Delta x_0^2\,\Delta y_0^2\,\alpha + \mathfrak{K}\,\Delta y_0^2\,\Delta z_0^2\,\gamma\right]$$

$$+abc\mathfrak{Z} = -\Sigma m S\left[(2\mathfrak{H}\,\Delta z_0 + \mathfrak{K}\,\Delta z_0^3)\,\gamma\,\Delta z_0 + \mathfrak{K}\,\Delta z_0^2\,\Delta y_0^2\,\beta + \mathfrak{K}\,\Delta z_0^2\,\Delta x_0^2\,\alpha\right]$$

Allein weil bei der vorausgesetzten Verschiebung der Atome im erzwungenen Gleichgewichtszustand die Gruppirungsweise der Atome um jedes Atom herum ganz die gleiche ist, so haben die Summen S für alle Punkte den gleichen Werth; man erhält daher die durch Σ angedeuteten Summen, wenn man die Masse m jedes Atoms mit der gleichen Summe S multiplizirt und alles addirt; und folglich kann man schreiben:

$$\left.\begin{aligned}
+\,\mathrm{abc}\,\mathfrak{X} &= -\,\mathrm{M\,S}\left[(2\,\mathfrak{H}\,\Delta x_0^2 + \mathfrak{K}\,\Delta x_0^4)\,\alpha + \mathfrak{K}\,\Delta x_0^2\,\Delta y_0^2\,\beta + \mathfrak{K}\,\Delta x_0^2\,\Delta z_0^2\,\gamma\right]\\
+\,\mathrm{abc}\,\mathfrak{Y} &= -\,\mathrm{M\,S}\left[\mathfrak{K}\,\Delta x_0^2\,\Delta y_0^2\,\alpha + (2\,\mathfrak{H}\,\Delta y_0^2 + \mathfrak{K}\,\Delta y_0^4)\,\beta + \mathfrak{K}\,\Delta y_0^2\,\Delta z_0^2\,\gamma\right]\\
+\,\mathrm{abc}\,\mathfrak{Z} &= -\,\mathrm{M\,S}\left[\mathfrak{K}\,\Delta x_0^2\,\Delta z_0^2\,\alpha + \mathfrak{K}\,\Delta y_0^2\,\Delta z_0^2\,\beta + (2\,\mathfrak{H}\,\Delta z_0^2 + \mathfrak{K}\,\Delta z_0^4)\,\gamma\right]
\end{aligned}\right\}\quad . \quad (37)$$

wobei M die Masse des Körpers bezeichnet.

Berücksichtigt man, dass im natürlichen Gleichgewichtszustand wegen Gleichung (31)

$$\mathrm{M\,S}\,\mathfrak{H}\,\Delta x_0^2 = 0 \qquad \mathrm{M\,S}\,\mathfrak{H}\,\Delta y_0^2 = 0 \qquad \mathrm{M\,S}\,\mathfrak{H}\,\Delta z_0^2 = 0$$

ist, setzt zur Abkürzung:

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{S}\,\mathfrak{K}\,\Delta x_0^4 &= \mathrm{S}\,\frac{m_1}{2}\,\frac{1}{r_0}\,\frac{d\left(\frac{1}{r_0}\,f(r_0)\right)}{d\,r_0}\,\Delta x_0^4 = -\,\mathfrak{L}\\
\mathrm{S}\,\mathfrak{K}\,\Delta y_0^4 &= \mathrm{S}\,\frac{m_1}{2}\,\frac{1}{r_0}\,\frac{d\left(\frac{1}{r_0}\,f(r_0)\right)}{d\,r_0}\,\Delta y_0^4 = -\,\mathfrak{M}\\
\mathrm{S}\,\mathfrak{K}\,\Delta z_0^4 &= \mathrm{S}\,\frac{m_1}{2}\,\frac{1}{r_0}\,\frac{d\left(\frac{1}{r_0}\,f(r_0)\right)}{d\,r_0}\,\Delta z_0^4 = -\,\mathfrak{N}\\
\mathrm{S}\,\mathfrak{K}\,\Delta x_0^2\,\Delta y_0^2 &= \mathrm{S}\,\frac{m_1}{2}\,\frac{1}{r_0}\,\frac{d\left(\frac{1}{r^0}\,f(r_0)\right)}{d\,r_0}\,\Delta x_0^2\,\Delta y_0^2 = -\,\mathfrak{P}\\
\mathrm{S}\,\mathfrak{K}\,\Delta y_0^2\,\Delta z_0^2 &= \mathrm{S}\,\frac{m_1}{2}\,\frac{1}{r_0}\,\frac{d\left(\frac{1}{r_0}\,f(r_0)\right)}{d\,r_0}\,\Delta y_0^2\,\Delta z_0^2 = -\,\mathfrak{Q}\\
\mathrm{S}\,\mathfrak{K}\,\Delta z_0^2\,\Delta x_0^2 &= \mathrm{S}\,\frac{m_1}{2}\,\frac{1}{r_0}\,\frac{d\left(\frac{1}{r_0}\,f(r_0)\right)}{d\,r_0}\,\Delta z_0^2\,\Delta x_0^2 = -\,\mathfrak{R}
\end{aligned}\right\}\quad . \; . \; . \quad (38)$$

und berücksichtigt noch, dass $\frac{M}{abc} = \frac{s_0}{2g}$ ist, wobei s_0 das spezifische Gewicht des Körpers im natürlichen Zustand bezeichnet, so findet man aus (37):

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{X} &= \frac{s_0}{2g}\,(\alpha\,\mathfrak{L} + \beta\,\mathfrak{P} + \gamma\,\mathfrak{R})\\
\mathfrak{Y} &= \frac{s_0}{2g}\,(\alpha\,\mathfrak{P} + \beta\,\mathfrak{M} + \gamma\,\mathfrak{Q})\\
\mathfrak{Z} &= \frac{s_0}{2g}\,(\alpha\,\mathfrak{R} + \beta\,\mathfrak{Q} + \gamma\,\mathfrak{N})
\end{aligned}\right\}\quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (39)$$

Dies sind endlich die Intensitäten der Pressungen gegen die Flächen des Parallelepipeds, durch welche nach den Richtungen der Axen $O\,x$ $O\,y$ $O\,z$ die linearen Zusammendrückungen α β γ hervorgebracht werden.

Diese Ausdrücke werden für eine isotrope Gruppirung der Atome sehr einfach. Es ist nämlich in diesem Falle :

$$\left.\begin{array}{c} \mathfrak{P} = \mathfrak{Q} = \mathfrak{R} \\ \mathfrak{L} = \mathfrak{M} = \mathfrak{N} = 3\,\mathfrak{R} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (40)$$

Diese Gleichheiten sind selbstverständlich, mit Ausnahme der letzten, die eines Beweises bedarf, den zuerst *Cauchy* in seiner Lichttheorie in folgender Weise gegeben hat.

Legen wir durch den Punkt $x\,y\,z$ zwei Coordinatensysteme $O\,\Delta x_0$ $O\,\Delta y_0$ $O\,\Delta z_0$ $O\,\Delta x_1$ $O\,\Delta y_1$ $O\,\Delta z_1$ in solcher Weise, dass die Axen $O\,\Delta z_0$ und $O\,\Delta z_1$ zusammenfallen und mit der Axe $O\,z$ parallel sind, dass jedoch die Axen $O\,\Delta x_0$ und $O\,\Delta x_1$ einen beliebigen Winkel ψ bilden. Dies vorausgesetzt, haben wir :

$$\Delta x_1 = \Delta x_0 \cos.\psi - \Delta y_0 \sin.\psi$$

$$\Delta y_1 = \Delta x_0 \sin.\psi + \Delta y_0 \cos.\psi$$

Hieraus folgt :

$$\Delta x_1^4 = \Delta x_0^4 \cos.^4\psi - 4\,\Delta x_0^3\,\Delta y_0 \cos.^3\psi \sin.\psi + 6\,\Delta x_0^2\,\Delta y_0^2 \sin.^2\psi \cos.^2\psi - 4\,\Delta x_0\,\Delta y_0^3 \cos.\psi \sin.^3\psi + \Delta y_0^4 \sin.^4\psi$$

$$\Delta y_1^4 = \Delta x_0^4 \sin.^4\psi + 4\,\Delta x_0^3\,\Delta y_0 \sin.^3\psi \cos.\psi + 6\,\Delta x_0^2\,\Delta y_0^2 \sin.^2\psi \cos.^2\psi + 4\,\Delta x_0\,\Delta y_0^3 \sin.\psi \cos.^3\psi + \Delta y_0^4 \cos.^4\psi$$

Ist nun die Gruppirungsweise der Atome um die Axe $O\,\Delta z$ herum ganz gleich, so muss sein :

$$-\mathrm{L} = S\,\frac{m_1}{2}\,\frac{1}{r_0}\,\frac{d\left(\frac{1}{r_0}\,f(r_0)\right)}{d\,r_0}\,\Delta x_0^4 = S\,\frac{m_1}{2}\,\frac{1}{r_0}\,\frac{d\left(\frac{1}{r_0}\,f(r_0)\right)}{d\,r_0}\,\Delta x_1^4$$

$$-\mathrm{M} = S\,\frac{m_1}{2}\,\frac{1}{r_0}\,\frac{d\left(\frac{1}{r_0}\,f(r_0)\right)}{d\,r_0}\,\Delta y_0^4 = S\,\frac{m_1}{2}\,\frac{1}{r_0}\,\frac{d\left(\frac{1}{r_0}\,f(r_0)\right)}{d\,r_0}\,\Delta y_1^4$$

Setzt man für Δx_1^4 und Δy_1^4 die vorhergehenden Werthe und berücksichtigt, dass überhaupt für jedes homogene Medium alle Summen verschwinden, in welchen ungerade Potenzen von Δx_0 Δy_0 Δz_0 vorkommen, so findet man :

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L} \cos.^4\psi + \mathfrak{M} \sin.^4\psi + 6\,\mathfrak{R} \sin.^2\psi \cos.^2\psi$$

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{L} \sin.^4\psi + \mathfrak{M} \cos.^4\psi + 6\,\mathfrak{R} \sin.^2\psi \cos.^2\psi$$

Hieraus folgt zunächst $\mathfrak{L} = \mathfrak{M}$, und dann wird:

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}\,(\cos.^4\psi + \sin.^4\psi) + 6\,\mathfrak{N}\,\sin.^2\psi\,\cos.^2\psi$$

Es ist aber:

$$\cos.^4\psi + \sin.^4\psi = 1 - 2\,\sin.^2\psi\,\cos.^2\psi$$

daher:

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L} - 2\,\mathfrak{L}\,\sin.^2\psi\,\cos.^2\psi + 6\,\sin.^2\psi\,\cos.^2\psi\,\mathfrak{N}$$

oder:

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{M} = 3\,\mathfrak{N}$$

was zu beweisen war. Vermöge der für ein isotropes Medium bestehenden Beziehungen (40) werden die Gleichungen (39):

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{X} &= \frac{s_0}{2\,g}\,\mathfrak{L}\left[\alpha + \frac{1}{3}\,(\beta + \gamma)\right]\\
\mathfrak{Y} &= \frac{s_0}{2\,g}\,\mathfrak{L}\left[\beta + \frac{1}{3}\,(\alpha + \gamma)\right]\\
\mathfrak{Z} &= \frac{s_0}{2\,g}\,\mathfrak{L}\left[\gamma + \frac{1}{3}\,(\alpha + \beta)\right]
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (41)$$

Dies sind nun für einen parallelepipedischen Stab, der aus einer isotropen Substanz besteht, die Intensitäten der Pressungen gegen die parallelen Begränzungsflächen, welche nach den Richtungen der Kräfte die linearen Zusammenpressungen $\alpha\,\beta\,\gamma$ hervorbringen. Umgekehrt kann man aus den Gleichungen (41) $\alpha\,\beta\,\gamma$ durch $\mathfrak{X}\,\mathfrak{Y}\,\mathfrak{Z}$ ausdrücken, also die linearen Zusammenpressungen berechnen, welche durch diese Kräfte entstehen.

Man findet:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha &= \frac{3}{10}\left[4\,\mathfrak{X} - (\mathfrak{Y} + \mathfrak{Z})\right]\frac{2\,g}{s_0\,\mathfrak{L}}\\
\beta &= \frac{3}{10}\left[4\,\mathfrak{Y} - (\mathfrak{X} + \mathfrak{Z})\right]\frac{2\,g}{s_0\,\mathfrak{L}}\\
\gamma &= \frac{3}{10}\left[4\,\mathfrak{Z} - (\mathfrak{X} + \mathfrak{Y})\right]\frac{2\,g}{s_0\,\mathfrak{L}}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (42)$$

Die Volumenänderung einer Volumseinheit ist daher:

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{3}{10}\,(2\,\mathfrak{X} + 2\,\mathfrak{Y} + 2\,\mathfrak{Z})\,\frac{2\,g}{s_0\,\mathfrak{L}}$$

Die Gleichungen (33), (34), (35) werden bei dem vorliegenden Problem identisch erfüllt. Betrachten wir einige spezielle Fälle.

1. Haben die gegen die Seitenflächen des Prisma wirkenden Kräfte gleiche Intensitäten, ist also:

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{Y} = \mathfrak{Z}$$

so findet man aus dieser Gleichung (42):

$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{3}{5} \frac{2\,g}{s_0\,\mathfrak{L}} \mathfrak{X} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

2. Wird der Stab nach der Richtung $o\,x$ zusammengedrückt und wirken sonst keine Kräfte auf denselben ein, ist also:

$$\mathfrak{Y} = \mathfrak{Z} = o$$

so geben die Gleichungen (42) folgende Werthe:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{6}{5} \frac{2\,g}{s_0\,\mathfrak{L}} \mathfrak{X} \\ \beta = \gamma &= -\frac{3}{10} \frac{2\,g}{s_0\,\mathfrak{L}} \mathfrak{X} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (44)$$

Der Stab dehnt sich also nach der Quere aus, und es ist:

$$\beta = \gamma = -\frac{\alpha}{4}$$

3. Will man nur allein eine Zusammendrückung nach der Richtung $o\,x$ bewirken, und die Querschnittsänderung nach den Richtungen $o\,y$ $o\,z$ verhindern, so sind gewisse Pressungen $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}$ nothwendig. Für diesen Fall ist:

$$\beta = \gamma = o$$

und die Gleichungen (41) geben:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{2\,g}{s_0\,\mathfrak{L}} \mathfrak{X} \\ \mathfrak{Y} = \mathfrak{Z} &= \frac{1}{3} \frac{s_0\,\mathfrak{L}}{2\,g} \alpha = \frac{1}{3} \mathfrak{X} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (45)$$

Den reziproken Werth der Grösse $\frac{6}{5} \frac{2\,g}{s_0\,\mathfrak{L}}$, welche vermöge (44) die lineare Ausdehnung oder Zusammendrückung ausdrückt, welche entsteht, wenn auf den Stab nur dehnende oder nur zusammendrückende Kräfte wirken, deren Intensistät = 1 ist, nennt man den Modulus der Elastizität des Materials. Wir bezeichnen denselben mit ε, setzen also:

$$\varepsilon = \frac{5}{6} \frac{s_0\,\mathfrak{L}}{2\,g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (46)$$

Diese Ergebnisse (43) bis (46) unserer Rechnung stimmen mit den analogen von *Cauchy* und *Lamé* gefundenen überein, wollen aber mit den von *Wertheim* gefundenen Versuchsresultaten nicht genau harmoniren. Der Grund hievon liegt nach meiner Ansicht wahrscheinlich in einer ungenauen Berechnung der Doppelsummen

$$\Sigma \, m \, S \, (\ldots.)$$

Die Summe S bezieht sich auf alle $\Delta x \; \Delta y \; \Delta z$, d. h. auf alle Punkte, die um einen gewissen Punkt $x \; y \; z$ herumgelagert sind; die Summe Σ dagegen überhaupt auf alle $x \; y \; z$, d. h. auf alle Punkte des Körpers. Nun haben wir angenommen, dass die Summe $S \, (\ldots)$ für jeden Punkt des Körpers ein und denselben Werth habe, und dies ist selbst bei einem isotropen Medium nur für die innern, nicht aber für die an der Oberfläche und in der Nähe derselben gelegenen Punkte richtig, denn jeder begränzte Körper hat, wie die Erfahrung beweist und wie auch aus unserer Theorie mit Nothwendigkeit folgt, so zu sagen ein Häutchen, in welchem eine andere Dichte stattfindet, als im Innern des Körpers. Es ist also bei der Berechnung jener Doppelsumme nicht erlaubt, $S \, (\ldots)$ für alle Punkte als constant zu betrachten und

$$\Sigma \, m \, S \, (\ldots.) = M \, S \, (\ldots.)$$

zu setzen.

WIRKUNG, WELCHE DER DEFORMIRUNG EINES KÖRPERS ENTSPRICHT.

Wir legen uns nun die Aufgabe vor, die Wirkungsgrösse oder Arbeitsgrösse zu bestimmen, welche einer Deformirung eines elastischen Körpers entspricht.

Es sei r_0 die Entfernung zweier Atome A und B im natürlichen Zustand des Körpers; $r_0 + \varrho$ die Entfernung der gleichen Atome in irgend einem Augenblick während der Deformirung; $d \, (r_0 + \varrho) = d \, \varrho$ die Zunahme der Entfernung der gleicheu Atome, während die Deformirung noch unendlich wenig weiter fortschreitet, so ist:

$$m \, m_1 \, f \, (r_0 + \varrho) \, d \, \varrho$$

die Arbeit, welche der Distanzänderung der Atome A und B um $d \, \varrho$ entspricht, demnach

$$\int_0^{\varrho} m \, m_1 \, f \, (r_0 + \varrho) \, d \, \varrho$$

die Arbeit, welche einer Distanzänderung ϱ entspricht.

Wenn wir überhaupt nur eine schwache Deformirung voraussetzen, ist ϱ gegen r_0 sehr klein; wir können daher nach dem *Taylor*'schen Satz schreiben:

$$f \, (r_0 + \varrho) = f \, (r_0) + \frac{d \, f \, (r_0)}{d \, r_0} \, \varrho$$

Demnach wird :

$$\int m\,m_1\, f(r_0 + \varrho)\, d\varrho = m\,m_1 \int \left[f(r_0) + \frac{d f(r_0)}{d r_0}\,\varrho \right] d\varrho$$

$$= m\,m_1 \left[f(r_0)\,\varrho + \frac{1}{2}\,\frac{d f(r_0)}{d r_0}\,\varrho^2 \right]$$

und hiermit ist die Arbeit berechnet, um zwei Atome aus der Entfernung r_0, welche sie im natürlichen Zustand haben, in die Entfernung $r_0 + \varrho$ zu bringen, und es ist nun ferner :

$$W = \frac{1}{2}\,\Sigma\, m\, S\, m_1 \left[f(r_0)\,\varrho + \frac{1}{2}\,\frac{d f(r_0)}{d r_0}\,\varrho^2 \right] \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

die totale Arbeit, welche durch die Distanzänderung aller Atome entwickelt wird.

Hierbei bezieht sich das Zeichen S auf die Aenderung der Entfernungen aller Atome B gegen das Atom A. Das Zeichen Σ hingegen bezieht sich überhaupt auf alle Punkte A des Körpers.

Wegen der Kleinheit von ϱ können wir auch hier wiederum schreiben :

$$\varrho = \frac{1}{r_0}\,(\Delta x_0\, \Delta \xi + \Delta y_0\, \Delta v + \Delta z_0\, \Delta \zeta) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

und wenn wir diesen Werth in (1) einführen, finden wir :

$$W = \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2}\,\Sigma\, m\, S\, m_1 \Big[f(r_0)\,\frac{1}{r_0}\,(\Delta x_0\, \Delta \xi + \Delta y_0\, \Delta v + \Delta z_0\, \Delta \zeta) + \\ & \quad + \frac{1}{2}\,\frac{d f(r_0)}{d r_0}\,\frac{1}{r_0^2}\,(\Delta x_0\, \Delta \xi + \Delta y_0\, \Delta v + \Delta z_0\, \Delta \zeta)^2 \Big] \end{aligned} \right\} \quad \ldots \quad (3)$$

Dieser Ausdruck liesse sich noch weiter analytisch ausbilden, er kann jedoch auch in der Form (3) ganz gut gebraucht werden, wenn die durch die Deformirung entstehenden Verschiebungen der Punkte als gegebene Grössen angesehen werden dürfen.

DREHUNG EINES STABES.

Wir wollen diesen Ausdruck benützen, um die Arbeit zu berechnen, welche einer Verdrehung eines cylindrischen Stabes entspricht.

Wenn wir annehmen : 1) dass bei einer Drehung des Stabes alle Atome, welche im ursprünglichen Zustand in einem und demselben Querschnitt lagen, durch die Drehung ihre relative Lage gegen einander nicht ändern; 2) dass alle Atome, welche im natürlichen Zustand eine zur Axe des Stabes parallele Faser bildeten, durch die Drehung des Stabes die Gestalt einer Schraubenlinie annehmen; 3) dass die Axe der x in die geometrische Axe des Cylinders gelegt wird, so erhalten wir für die Verschiebung $\xi\ v\ \zeta$ irgend eines Punktes, dessen Coordinaten im natürlichen Zustand $x_0\ y_0\ z_0$ sind, folgende Werthe:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= 0 \\ v &= -\frac{\Theta}{l}\, x_0 z_0 \\ \zeta &= +\frac{\Theta}{l}\, x_0 y_0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

wobei l die Länge des Cylinders und Θ den Winkel bezeichnet, um welchen die Endflächen des Stabes gegen einander verdreht sind.

Aus (4) folgt:

$$\begin{aligned} \varDelta\xi &= 0 \\ \varDelta v &= -\frac{\Theta}{l}\left[(x_0+\varDelta x_0)(z_0+\varDelta z_0) - x_0 z_0\right] \\ \varDelta\zeta &= +\frac{\Theta}{l}\left[(x_0+\varDelta x_0)(y_0+\varDelta y_0) - x_0 y_0\right] \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} \varDelta\xi &= 0 \\ \varDelta v &= -\frac{\Theta}{l}\,(x_0\varDelta z_0 + z_0\varDelta x_0 + \varDelta x_0\varDelta z_0) \\ \varDelta\zeta &= +\frac{\Theta}{l}\,(x_0\varDelta y_0 + y_0\varDelta x_0 + \varDelta x_0\varDelta y_0) \end{aligned}$$

und man findet nun ferner:

$$\varDelta x_0\varDelta\xi + \varDelta y_0\varDelta v + \varDelta z_0\varDelta\zeta = \frac{\Theta}{l}\,(y_0\varDelta x_0\varDelta z_0 - z_0\varDelta x_0\varDelta y_0)$$

Substituirt man diesen Ausdruck in (3) und berücksichtigt, dass $y_0\ z_0$ vor das Summenzeichen S, nicht aber vor das Summenzeichen Σ gesetzt werden dürfen, berücksichtig aber auch noch, dass alle Glieder der Summe S verschwinden, in welchen nur gerade Potenzen von $\varDelta x_0\ \varDelta y_0\ \varDelta z_0$ vorkommen, so erhält man:

$$W = -\frac{1}{2}\,\frac{\Theta^2}{l^2}\,\Sigma(m\mathfrak{A}y_0^2 + m\mathfrak{B}z_0^2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

wobei zur Abkürzung gesetzt wurde:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A} &= -S\,\frac{m}{2}\,\frac{d\,f(r_0)}{d\,r_0}\,\frac{\varDelta x_0^2\varDelta z_0^2}{r_0^2} \\ \mathfrak{B} &= -S\,\frac{m}{2}\,\frac{d\,f(r_0)}{d\,r_0}\,\frac{\varDelta x_0^2\varDelta y_0^2}{r_0^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Für ein nach allen Richtungen gleich elastisches Medium ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$, und dann wird

$$W = -\frac{1}{2}\frac{\Theta^2}{l^2}\,\Sigma\,(m\,y_0^2 + m\,z_0^2)\,\mathfrak{A} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Allein es ist $\Sigma\,m\,(y_0^2 + z_0^2)$ das als Masse ausgedrückte Trägheitsmoment des Cylinders in Bezug auf seine geometrische Axe, oder es ist:

$$\Sigma\,m\,(y_0^2 + z_0^2) = \frac{\pi}{4g}\,s_0\,l\,A^4$$

wobei s_0 das Gewicht der Kubikeinheit des Materials bezeichnet, aus welchem der Cylinder besteht, l die Länge, A den Halbmesser des Cylinders. Wir erhalten daher:

$$W = -\frac{\pi}{8g}\,\mathfrak{A}\,\frac{\Theta^2 A^4}{l} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

Für eine schwache Drehung aus dem natürlichen Zustand in einen erzwungenen um einen Torsionswinkel Θ ist aber eine äussere Wirkung $\frac{1}{2}\,P\,R\,\Theta$ nothwendig. Wir erhalten daher:

$$\frac{1}{2}\,P\,R\,\Theta + \left(-\frac{\pi}{8g}\,\mathfrak{A}\,\frac{\Theta^2 \mathfrak{A}^4}{l}\right) = 0$$

und hieraus folgt:

$$\Theta = \frac{4g}{\pi\mathfrak{A}}\,\frac{P\,R\,l}{A^4}$$

Die Constante $\frac{\pi\mathfrak{A}}{2g}$ nennt man den Modulus der Elastizität des Materials für Torsion; bezeichnet man denselben mit G, setzt also:

$$G = \frac{\pi\mathfrak{A}}{4g}$$

so wird schliesslich:

$$\Theta = \frac{P\,R\,l}{G\,A^4} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

WIRKUNGSGRÖSSE, WELCHE EINER ZUSAMMENDRÜCKUNG ODER AUSDEHNUNG EINES RECHTWINKLIGEN PRISMAS ENTSPRICHT.

Nehmen wir an, ein rechtwinkliges Prisma werde nach den Richtungen seiner drei Axen gleichförmig ausgedehnt, und es seien die linearen Ausdehnungen nach den drei Axen $O\,x$ $O\,y$ $O\,z$, beziehungsweise α β γ, dann ist:

$$\Delta \xi = \alpha \, \Delta x_0$$

$$\Delta v = \beta \, \Delta y_0$$

$$\Delta \zeta = \gamma \, \Delta z_0$$

demnach:

$$\Delta x_0 \, \Delta \xi + \Delta y_0 \, \Delta v + \Delta z_0 \, \Delta \zeta = \alpha \, \Delta x_0^2 + \beta \, \Delta y_0^2 + \gamma \, \Delta z_0^2$$

und folglich wird:

$$W = \frac{1}{2} \, \Sigma m \, S \, m_1 \left\{ \begin{array}{l} \frac{f(r_0)}{r_0} (\alpha \Delta x_0^2 + \beta \, \Delta y_0^2 + \gamma \, \Delta z_0^2) + \\ + \frac{1}{2} \, \frac{d f(r_0)}{d r_0} \, \frac{1}{r_0^2} \, (\alpha \Delta x_0^2 + \beta \, \Delta y_0^2 + \gamma \, \Delta z_0^2)^2 \end{array} \right\}$$

oder:

$$W = \frac{1}{2} \, \Sigma m \left\{ \begin{array}{l} \alpha \, S \, m_1 \, \frac{f(r_0)}{r_0} \, \Delta x_0^2 + \beta \, S \, m_1 \, \frac{f(r_0)}{r_0} \, \Delta y_0^2 + \gamma \, S \, m_1 \, \frac{f(r_0)}{r_0} \, \Delta z_0^2 \\ + \alpha^2 \, S \, \frac{m_1}{2} \, \frac{d f(r_0)}{d r_0} \, \frac{\Delta x_0^4}{r_0^2} + \beta^2 \, S \, \frac{m_1}{2} \, \frac{d f(r_0)}{d r_0} \, \frac{\Delta y_0^4}{r_0^2} + \gamma^2 \, S \, \frac{m_1}{2} \, \frac{d f(r_0)}{d r_0} \, \frac{\Delta z_0^4}{r_0^2} \\ + 2 \alpha \beta \, S \, \frac{m_1}{2} \, \frac{d f(r_0)}{d r_0} \, \frac{\Delta x_0^2 \, \Delta y_0^2}{r_0^2} + 2 \alpha \gamma \, S \, \frac{m_1}{2} \, \frac{d f(r_0)}{d r_0} \, \frac{\Delta x_0^2 \, \Delta z_0^2}{r_0^2} \\ + 2 \beta \gamma \, S \, \frac{m_1}{2} \, \frac{d f(r_0)}{d r_0} \, \frac{\Delta y_0^2 \, \Delta z_0^2}{r_0^2} \end{array} \right\}$$

Berücksichtigt man, dass wegen Gleichungen (31), Seite 81

$$S \, m_1 \, \frac{f(r_0)}{r_0} \, \Delta x_0^2 = 0 \qquad S \, m_1 \, \frac{f(r_0)}{r_0} \, \Delta y_0^2 = 0 \qquad S \, m_1 \, \frac{f(r_0)}{r_0} \, \Delta z_0^2 = 0$$

ist, setzt zur Abkürzung:

$$- S \, \frac{m_1}{2} \, \frac{d f(r_0)}{d r_0} \, \frac{\Delta x_0^4}{r_0^2} = \mathfrak{L}$$

$$- S \, \frac{m_1}{2} \, \frac{d f(r_0)}{d r_0} \, \frac{\Delta y_0^4}{r_0^2} = \mathfrak{M}$$

$$- S \, \frac{m_1}{2} \, \frac{d f(r_0)}{d r_0} \, \frac{\Delta z_0^4}{r_0^2} = \mathfrak{N}$$

$$- S \frac{m_1}{2} \frac{d f(r_0)}{d r_0} \frac{\varDelta x_0^2 \varDelta y_0^2}{r_0^2} = \mathfrak{P}$$

$$- S \frac{m_1}{2} \frac{d f(r_0)}{d r_0} \frac{\varDelta y_0^2 \varDelta z_0^2}{r_0^2} = \mathfrak{Q}$$

$$- S \frac{m_1}{2} \frac{d f(r_0)}{d r_0} \frac{\varDelta z_0^2 \varDelta x_0^2}{r_0^2} = \mathfrak{R}$$

und berücksichtigt ferner noch, dass die Summen S für alle Punkte des Körpers einerlei Werth haben, so findet man:

$$W = - \frac{1}{2} M (\alpha^2 \mathfrak{L} + \beta^2 \mathfrak{M} + \gamma^2 \mathfrak{N} + 2 \alpha \beta \mathfrak{P} + 2 \alpha \gamma \mathfrak{R} + 2 \beta \gamma \mathfrak{Q})$$

Allein für eine schwache, aber gleichförmige Ausdehnung eines rechtwinkligen Prismas nach seinen drei Axen ist die Wirkung der äusseren Kräfte, welche diese Ausdehnungen hervorbringen können:

$$\frac{1}{2} \left[\mathfrak{X} (b c) \alpha a + \mathfrak{Y} (a c) \beta b + \mathfrak{Z} (a b) \gamma c \right] = \frac{1}{2} V (\alpha \mathfrak{X} + \beta \mathfrak{Y} + \gamma \mathfrak{Z})$$

wobei V das Volumen des Körpers bedeutet. Wir erhalten daher:

$$\frac{1}{2} V (\alpha \mathfrak{X} + \beta \mathfrak{Y} + \gamma \mathfrak{Z}) =$$

$$+ \frac{1}{2} M (\alpha^2 \mathfrak{L} + \beta^2 \mathfrak{M} + \gamma^2 \mathfrak{N} + 2 \alpha \beta \mathfrak{P} + 2 \alpha \gamma \mathfrak{R} + 2 \beta \gamma \mathfrak{Q})$$

oder weil $\frac{M}{V} = \frac{s_0}{2 g}$ ist:

$$\alpha \mathfrak{X} + \beta \mathfrak{Y} + \gamma \mathfrak{Z} = \frac{s_0}{2 g} (\alpha^2 \mathfrak{L} + \beta^2 \mathfrak{M} + \gamma^2 \mathfrak{N} + 2 \alpha \beta \mathfrak{P} + 2 \alpha \gamma \mathfrak{R} + 2 \beta \gamma \mathfrak{Q})$$

Ist die Elastizität des Stoffes nach allen Richtungen gleich gross, so ist:

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{Q} = \mathfrak{R}$$

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{M} = \mathfrak{N} = 3 \mathfrak{R}$$

und dann wird:

$$\alpha\mathfrak{X} + \beta\mathfrak{Y} + \gamma\mathfrak{Z} =$$

$$= \frac{s_0}{2\,g} \left\{ \alpha\left[\alpha + \frac{1}{3}(\beta+\gamma)\right] + \beta\left[\beta + \frac{1}{3}(\alpha+\gamma)\right] + \gamma\left[\gamma + \frac{1}{3}(\alpha+\beta)\right] \right\} \mathfrak{L}$$

Diese Gleichung folgt auch aus den Gleichungen (41), Seite 86, wenn man dieselben mit α β γ multiplizirt und dann die Summe nimmt.
