Das Dynamiden-System

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1857

Prüfung der Formel (50)

urn:nbn:de:bsz:31-266496

Die später folgenden numerischen Rechnungen werden zeigen, dass die Coeffizienten a_0 und a_1 positiv sind, der Coeffizient a_2 dagegen negativ ist. A_0 und A_2 sind daher vermöge (49) positiv, A_4 dagegen ist negativ.

Allein es ist:

$$A_2 = -\frac{1}{2}\, S\, \frac{\mu_1}{r}\left[J(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r}\, J(r)\right)}{d\, r}\, \Delta y^2\right]\frac{\Delta x^2}{1\,.\,2}$$

Dieser Ausdruck kann daher, weil r, $J(r)$ und Δx^2 stets positiv ist, nur dann positiv werden, wenn $\frac{d\left(\frac{1}{r}\, J(r)\right)}{d\, r}\, \Delta y^2$ negativ und wenigstens für eine gewisse Reihe von Werthen von r numerisch grösser als $J(r)$ ausfällt.

Aus der Formel (50) ergibt sich das interessante Resultat, dass zweierlei Ursachen vorhanden sind, welche Dispersion veranlassen; denn es sind in dieser Formel zwei von der Wellenlänge abhängige Glieder vorhanden. Das Glied $\frac{a_2}{l^2}$ hängt nur von der Wirkung des Aethers auf sich selbst ab, das Glied $a_1\, l^2$ drückt dagegen die Einwirkung des Körpermediums auf das Aethermedium aus, denn vermöge (8), Seite 116, ist:

$$A_0 = \frac{1}{2}\,(\mathfrak{A} + \varepsilon) = \frac{1}{2}\,\varepsilon + \frac{1}{2}\, S\, m_1 \left[\frac{G(r)}{r} + \frac{1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\, G(r)\right)}{d\, r}\, \Delta x^2\right]$$

Ich habe zuerst vermuthet, dass die Dispersion $a_1\, l^2$, welche das Körpermedium verursacht, beträchtlicher sein würde als jene, welche das Aethermedium hervorbringt; allein so ist es nicht. Die numerischen Rechnungen zeigen, dass die Werthe von $\frac{a_2}{l^2}$ grösser ausfallen als die Werthe von $a_1\, l^2$.

PRÜFUNG DER FORMEL (50).

Die von *Frauenhofer* durch Beobachtungen und Rechnungen aufgefundenen Werthe der Wellenlängen und Brechungsverhältnisse für Lichtstrahlen von verschiedenen Farben setzen uns in den Stand, die Formel (50), nämlich:

$$\frac{1}{\varkappa^2} = a_0 + a_1\, l^2 + \frac{a_2}{l^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (55)$$

einer numerischen Prüfung zu unterwerfen.

Frauenhofer hat bekanntlich die Wellenlängen und Brechungsverhältnisse derjenigen farbigen Strahlen bestimmt, welche gewissen im Spektrum sich zeigenden dunkeln Linien zunächst liegen.

Nach diesen Messungen haben die Strahlen, welche den von *Frauenhofer* mit B C D E F G H bezeichneten dunkeln Linien entsprechen, bei ihrem Durchgang durch Luft folgende Werthe, in Pariser Zollen ausgedrückt:

	B	C	D	E	F	G	H
$10^8\, l =$	2541	2425	2175	1943	1789	1585	1451
demnach $10^{16}\, l^2 =$	6492304	5880625	4730625	3775249	3200521	2512225	2105401
und $\frac{1}{l^2} =$	$15402 \, . \, 10^5$	$17005 \, . \, 10^5$	$21138 \, . \, 10^5$	$26488 \, . \, 10^5$	$31244 \, . \, 10^5$	$39805 \, . \, 10^5$	$47496 \, . \, 10^5$

Für den Durchgang dieser Strahlen durch ein mit Wasser gefülltes Prisma hat *Frauenhofer* folgende Brechungsverhältnisse gefunden :

	B	C	D	E	F	G	H
$\varkappa =$	1·330935	1·331712	1·333577	1·335851	1·337818	1·341293	1·344177

Hieraus findet man :

$\frac{1}{\varkappa_2} =$	0·56453	0·56387	0·56223	0·56038	0·55873	0·55580	0·55346

Setzt man die den Strahlen B E H entsprechenden Zahlen in die zu prüfende Formel (55), so erhält man zur Bestimmung der Constanten a_0 a_1 a_2 folgende drei Gleichungen

$$\text{B)} \quad 0{\cdot}56453 = a_0 + \frac{6492304}{10^{16}}\, a_1 + 15402 \, . \, 10^5\, a_2$$

$$\text{E)} \quad 0{\cdot}56038 = a_0 + \frac{3775249}{10^{16}}\, a_1 + 26488 \, . \, 10^5\, a_2$$

$$\text{H)} \quad 0{\cdot}55346 = a_0 + \frac{2105401}{10^{16}}\, a_1 + 47496 \, . \, 10^5\, a_2$$

Hieraus findet man folgende Werthe :

$$a_0 = + 0{\cdot}56751$$

$$a_1 = + 2713898$$

$$a_2 = - \frac{3{\cdot}078286}{10^{12}}$$

Für den Durchgang durch Wasser hat man also :

$$\frac{1}{\varkappa^2} = 0{\cdot}56751 + 2713898\, l^2 - \frac{3{\cdot}078286}{10^{12}} \cdot \frac{1}{l^2}$$

Berechnet man mit dieser Formel die Werthe von $\frac{1}{\varkappa^2}$ für sämmtliche Strahlen B C D E F G H und vergleicht die Rechnungsresultate mit den Beobachtungsresultaten, so erhält man folgende Tabelle :

		B	C	D	E	F	G	H
$\frac{1}{\varkappa^2}$	Rechnung	0·56453	0·56395	0·56229	0·56038	0·55876	0·55594	0·55346
	Beobachtung	0·56453	0·56387	0·56223	0·56038	0·55873	0·55580	0·55346

Man sieht, dass die Zahlen der Rechnung mit den Zahlen der Beobachtung beinahe identisch sind. Wir dürfen also wohl sagen, dass unsere Theorie mit den Thatsachen gut harmonirt.

DAS FARBENZERSTREUUNGS-VERMÖGEN.

Das Farbenzerstreuungsvermögen einer Substanz kann durch den Winkel gemessen werden, welchen die den dunkeln Linien B und H entsprechenden Strahlen zusammen bilden.

Nennen wir l_1 $\varkappa_1$ und l_2 $\varkappa_2$ die den Strahlen B und H entsprechenden Wellenlängen und Brechungsverhältnisse, so ist vermöge der Gleichung (50) :

$$\frac{1}{\varkappa_1^2} = a_0 + a_1 l_1^2 + \frac{a_2}{l_1^2}$$

$$\frac{1}{\varkappa_2^2} = a_0 + a_1 l_2^2 + \frac{a_2}{l_2^2}$$

oder :

$$\frac{1}{\varkappa_1} = a_0^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{a_1}{a_0} l_1^2 + \frac{a_2}{a_0} \frac{1}{l_1^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{\varkappa_2} = a_0^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{a_1}{a_0} l_2^2 + \frac{a_2}{a_0} \frac{1}{l_2^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Nennt man α den Winkel des einfallenden Strahles mit dem Einfallsloth, α_1 α_2 die Winkel, welche die Strahlen B und H mit dem Einfallsloth bilden, so ist :

$$\frac{1}{\varkappa_1} = \frac{\sin.\alpha_1}{\sin.\alpha}$$

$$\frac{1}{\varkappa_2} = \frac{\sin.\alpha_2}{\sin.\alpha}$$

$$\frac{\sin.\alpha_1}{\sin.\alpha} = a_0^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{a_1}{a_0} l_1^2 + \frac{a_2}{a_0} \frac{1}{l_1^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\sin.\alpha_2}{\sin.\alpha} = a_0^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{a_1}{a_0} l_1^2 + \frac{a_2}{a_0} \frac{1}{l_1^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Allein der Betrag der Glieder, welche in den Klammern auf die Einheit folgen, ist gegen die Einheit ungemein klein; man kann daher diese Ausdrücke vermittelst der Binomialformel entwickeln und die auf das zweite Glied folgenden Glieder vernachlässigen. Dann findet man :