Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Das Dynamiden-System

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1857

Integration der Gleichungen (10)

urn:nbn:de:bsz:31-266496

Visual Library

INTEGRATION DER GLEICHUNGEN (10).

Um die Gleichungen (10) zu integriren, ist es unerlässlich, über die Form der Funktion $\mathrm{H}(\varrho)$, d. h. über das Gesetz der Anziehung eines Körperatoms auf seine eigene Aethersphäre eine naturgemässe Hypothese zu machen.

Die einfachste und naturgemäss scheinende Annahme ist, dass wir setzen :

$$\mathrm{H}(\varrho) = \mathrm{k}\,\varrho \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

wobei k eine Constante bezeichnet. Unter dieser Voraussetzung wird $\mathrm{m}\,\frac{\mathrm{H}(\varrho)}{\varrho} = \mathrm{k}\,\mathrm{m}$ oder wenn man

$$\mathrm{k}\,\mathrm{m} = \varepsilon \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

setzt, so werden die Gleichungen (10) :

$$\left.\begin{aligned}
2\,\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}t^2} + (\mathfrak{A}+\varepsilon)\,\xi + \mathfrak{F}\,v + \mathfrak{G}\,\zeta + S\,(\mathfrak{A}_1\,\Delta\xi + \mathfrak{F}_1\,\Delta v + \mathfrak{G}_1\,\Delta\zeta) &= 0 \\
2\,\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}t^2} + \mathfrak{F}\,\xi + (\mathfrak{B}+\varepsilon)\,v + \mathfrak{D}\,\zeta + S\,(\mathfrak{F}_1\,\Delta\xi + \mathfrak{B}_1\,\Delta v + \mathfrak{D}_1\,\Delta\zeta) &= 0 \\
2\,\frac{\mathrm{d}^2\zeta}{\mathrm{d}t^2} + \mathfrak{G}\,\xi + \mathfrak{D}\,v + (\mathfrak{C}+\varepsilon)\,\zeta + S\,(\mathfrak{G}_1\,\Delta\xi + \mathfrak{D}_1\,\Delta v + \mathfrak{C}_1\,\Delta\zeta) &= 0
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (14)$$

Vermöge der Fourier'schen Formel kann man setzen :

$$\left.\begin{aligned}
\xi = \varphi(\mathrm{x\,y\,z\,t}) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \cos.\,\mathrm{u}\;\varphi(\lambda\,\mu\,\nu\,\mathrm{t})\;\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta\,\mathrm{d}\gamma\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\nu \\
v = \psi(\mathrm{x\,y\,z\,t}) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \cos.\,\mathrm{u}\;\psi(\lambda\,\mu\,\nu\,\mathrm{t})\;\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta\,\mathrm{d}\gamma\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\nu \\
\zeta = \omega(\mathrm{x\,y\,z\,t}) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \cos.\,\mathrm{u}\;\omega(\lambda\,\mu\,\nu\,\mathrm{t})\;\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta\,\mathrm{d}\gamma\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\nu
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (15)$$

wobei

$$\mathrm{u} = \alpha(\mathrm{x}-\lambda) + \beta(\mathrm{y}-v) + \gamma(\mathrm{z}-\zeta) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

und $\varphi\;\psi\;\omega$ Funktionszeichen sind. Die Integrale sind sämmtlich von $-\infty$ bis $+\infty$ zu nehmen.

Aus den Gleichungen (15) folgt zunächst :

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Baden-Württemberg

$$\left.\begin{aligned}
\Delta\xi &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \Delta \cos.\,u\,\varphi(\lambda\mu\nu t)\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma\,d\lambda\,d\mu\,d\nu \\
\Delta v &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \Delta \cos.\,u\,\psi(\lambda\mu\nu t)\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma\,d\lambda\,d\mu\,d\nu \\
\Delta\zeta &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \Delta \cos.\,u\,\omega(\lambda\mu\nu t)\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma\,d\lambda\,d\mu\,d\nu
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (17)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2\xi}{dt^2} &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \cos.\,u\,\frac{d^2\varphi(\lambda\mu\nu t)}{dt^2}\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma\,d\lambda\,d\mu\,d\nu \\
\frac{d^2 v}{dt^2} &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \cos.\,u\,\frac{d^2\psi(\lambda\mu\nu t)}{dt^2}\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma\,d\lambda\,d\mu\,d\nu \\
\frac{d^2\zeta}{dt^2} &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \cos.\,u\,\frac{d^2\omega(\lambda\mu\nu t)}{dt^2}\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma\,d\lambda\,d\mu\,d\nu
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (18)$$

Führt man die Werthe von $\xi\ v\ \zeta\ \ \Delta\xi\ \ \Delta v\ \ \Delta\zeta\ \ \frac{d^2\xi}{dt^2}\ \frac{d^2 v}{dt^2}\ \frac{d^2\zeta}{dt^2}$, welche die Ausdrücke (15), (17) und (18) darbieten, in (14) ein, so findet man, wenn zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned}
\varphi(\lambda\mu\nu t) &= \varphi \\
\psi(\lambda\mu\nu t) &= \psi \\
\omega(\lambda\mu\nu t) &= \omega
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (19)$$

gesetzt wird:

$$\left.\begin{aligned}
o &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \left\{\begin{matrix} 2\cos.\,u\,\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \varphi\,S\,\mathfrak{A}_1\,\Delta\cos.\,u + \psi\,S\,\mathfrak{F}_1\,\Delta\cos.\,u + \omega\,S\,\mathfrak{E}_1\,\Delta\cos.\,u \\ + \varphi(\mathfrak{A}+\varepsilon)\cos.\,u + \psi\,\mathfrak{F}\cos.\,u + \omega\,\mathfrak{E}\cos.\,u \end{matrix}\right\} d\alpha \ldots d\nu \\
o &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \left\{\begin{matrix} 2\cos.\,u\,\frac{d^2\psi}{dt^2} + \varphi\,S\,\mathfrak{F}_1\,\Delta\cos.\,u + \psi\,S\,\mathfrak{B}_1\,\Delta\cos.\,u + \omega\,S\,\mathfrak{D}_1\,\Delta\cos.\,u \\ + \varphi\,\mathfrak{F}\cos.\,u + \psi(\mathfrak{B}+\varepsilon)\cos.\,u + \omega\,\mathfrak{D}\cos.\,u \end{matrix}\right\} d\alpha \ldots d\nu \\
o &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \left\{\begin{matrix} 2\cos.\,u\,\frac{d^2\omega}{dt^2} + \varphi\,S\,\mathfrak{E}_1\,\Delta\cos.\,u + \psi\,S\,\mathfrak{D}_1\,\Delta\cos.\,u + \omega\,S\,\mathfrak{C}_1\,\Delta\cos.\,u \\ + \varphi\,\mathfrak{E}\cos.\,u + \psi\,\mathfrak{D}\cos.\,u + \omega(\mathfrak{C}+\varepsilon)\cos.\,u \end{matrix}\right\} d\alpha \ldots d\nu
\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Nun ist:

$$\begin{aligned}
\Delta\cos.\,u &= \cos.(u+\Delta u) - \cos.\,u = \cos.\,u\cos.\,\Delta u - \sin.\,u\sin.\,\Delta u - \cos.\,u \\
&= \cos.\,u\,(\cos.\,\Delta u - 1) - \sin.\,u\sin.\,\Delta u \\
&= -2\cos.\,u\left(\sin.\,\frac{1}{2}\,\Delta u\right)^2 - \sin.\,u\sin.\,\Delta u
\end{aligned}$$

Bezeichnet man durch $\mathfrak{H}$ irgend eine der sechs Grössen $\mathfrak{A}_{,}\ \mathfrak{B}_{,}\ \mathfrak{C}_{,}\ \mathfrak{D}_{,}\ \mathfrak{E}_{,}\ \mathfrak{F}_{,}$, so hat man:

$$S\,\mathfrak{H}\,\Delta\cos.u = S\,\mathfrak{H}\left[-2\cos.u\left(\sin.\frac{1}{2}\,\Delta u\right)^2 - \sin.u\sin.\Delta u\right]$$

$$= -2\cos.u\,S\,\mathfrak{H}\left(\sin.\frac{1}{2}\,\Delta u\right)^2 - \sin.u\;S\,\mathfrak{H}\sin\Delta u$$

Wenn wir annehmen, dass im Medium jedem Punkt ein Gegenpunkt entspricht, d. h. voraussetzen, dass für jeden Punkt, für welchen $\Delta x\ \Delta y\ \Delta z$ gilt, ein zweiter Punkt existirt, für welchen $-\Delta x\ \ -\Delta y\ \ -\Delta z$ gilt, so verschwinden alle diejenigen Summen, in welchen irgend eine der Grössen $\Delta x\ \Delta y\ \Delta z$ in einer ungeraden Potenz erscheint; es ist demnach unter dieser Voraussetzung:

$$S\,\mathfrak{H}\sin.\Delta u = S\,\mathfrak{H}\sin.(\alpha\,\Delta x + \beta\,\Delta y + \gamma\,\Delta z) = o$$

und folglich wird:

$$S\,\mathfrak{H}\,\Delta\cos.u = -2\cos.u\;S\,\mathfrak{H}\left(\sin.\frac{1}{2}\,\Delta u\right)^2$$

Führt man diesen Werth in die Differenzialgleichung (20) ein, so folgt:

$$\left.\begin{array}{l}
o = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \displaystyle\iiiint\!\!\iint \left\{\begin{array}{r}
2\frac{d^2\varphi}{dt^2} - 2\varphi\,S\,\mathfrak{A}_1\left(\sin.\frac{1}{2}\,\Delta u\right)^2 - 2\psi\,S\,\mathfrak{F}_1\left(\sin.\frac{1}{2}\,\Delta u\right)^2 \\
-2\omega\,S\,\mathfrak{E}_1\left(\sin.\frac{1}{2}\,\Delta u\right)^2 \\
+\varphi(\mathfrak{A}+\varepsilon) + \psi\,\mathfrak{F} + \omega\,\mathfrak{E}
\end{array}\right\}\cos.u\;d\alpha..d\nu \\[2em]
o = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \displaystyle\iiiint\!\!\iint \left\{\begin{array}{r}
2\frac{d^2\psi}{dt^2} - 2\varphi\,S\,\mathfrak{F}_1\left(\sin.\frac{1}{2}\,\Delta u\right)^2 - 2\psi\,S\,\mathfrak{B}_1\left(\sin.\frac{1}{2}\,\Delta u\right)^2 \\
-2\omega\,S\,\mathfrak{D}_1\left(\sin.\frac{1}{2}\,\Delta u\right)^2 \\
+\varphi\,\mathfrak{F} + \psi(\mathfrak{B}+\varepsilon) + \omega\,\mathfrak{D}
\end{array}\right\}\cos.u\;d\alpha..d\nu \\[2em]
o = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \displaystyle\iiiint\!\!\iint \left\{\begin{array}{r}
2\frac{d^2\omega}{dt^2} - 2\varphi\,S\,\mathfrak{E}_1\left(\sin.\frac{1}{2}\,\Delta u\right)^2 - 2\psi\,S\,\mathfrak{D}_1\left(\sin.\frac{1}{2}\,\Delta u\right)^2 \\
-2\omega\,S\,\mathfrak{C}_1\left(\sin.\frac{1}{2}\,\Delta u\right)^2 \\
+\varphi\,\mathfrak{E} + \psi\,\mathfrak{D} + \omega(\mathfrak{C}+\varepsilon)
\end{array}\right\}\cos.u\;d\alpha.\,d\nu
\end{array}\right\} \quad (21)$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{2}(\mathfrak{A}+\varepsilon) - S\,\mathfrak{A}_1\left(\sin.\frac{1}{2}\varDelta u\right)^2 &= l \\
\frac{1}{2}(\mathfrak{B}+\varepsilon) - S\,\mathfrak{B}_1\left(\sin.\frac{1}{2}\varDelta u\right)^2 &= m \\
\frac{1}{2}(\mathfrak{C}+\varepsilon) - S\,\mathfrak{C}_1\left(\sin.\frac{1}{2}\varDelta u\right)^2 &= n \\
\frac{1}{2}\mathfrak{D} - S\,\mathfrak{D}_1\left(\sin.\frac{1}{2}\varDelta u\right)^2 &= p \\
\frac{1}{2}\mathfrak{E} - S\,\mathfrak{E}_1\left(\sin.\frac{1}{2}\varDelta u\right)^2 &= q \\
\frac{1}{2}\mathfrak{F} - S\,\mathfrak{F}_1\left(\sin.\frac{1}{2}\varDelta u\right)^2 &= r
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

so wird den Gleichungen (21) Genüge geleistet, wenn man nimmt:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2\varphi}{dt^2} + l\varphi + r\psi + q\omega &= o \\
\frac{d^2\psi}{dt^2} + r\varphi + m\psi + p\omega &= o \\
\frac{d^2\omega}{dt^2} + q\varphi + p\psi + n\omega &= o
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

Hierdurch hat man nun zur Bestimmung der in der Fourier'schen Formel vorkommenden Funktionen $\varphi\ \psi\ \omega$ drei Differenzialgleichungen.

Um diese Gleichungen zu integriren, versuchen wir die Annahme:

$$\varphi = \mathfrak{M}\,T \qquad \psi = \mathfrak{N}\,T \qquad \omega = \mathfrak{P}\,T \quad \ldots\ldots \quad (24)$$

wobei wir voraussetzen, dass T eine Funktion von t sei, dass jedoch die Grössen $\mathfrak{M}\,\mathfrak{N}\,\mathfrak{P}$ kein t enthalten. Dann ist:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \mathfrak{M}\frac{d^2T}{dt^2} \qquad \frac{d^2\psi}{dt^2} = \mathfrak{N}\frac{d^2T}{dt^2} \qquad \frac{d^2\omega}{dt^2} = \mathfrak{P}\frac{d^2T}{dt^2} \quad \ldots \quad (25)$$

Hierdurch werden die Gleichungen (23):

$$\mathfrak{M}\frac{d^2T}{dt^2} + (l\,\mathfrak{M} + r\,\mathfrak{N} + q\,\mathfrak{P})\,T = o$$

$$\mathfrak{N}\frac{d^2T}{dt^2} + (r\,\mathfrak{M} + m\,\mathfrak{N} + p\,\mathfrak{P})\,T = o$$

$$\mathfrak{P}\frac{d^2T}{dt^2} + (q\,\mathfrak{M} + p\,\mathfrak{N} + n\,\mathfrak{P})\,T = o$$

und diesen Gleichungen wird Genüge geleistet, wenn man nimmt:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2} &= -\frac{l\,\mathfrak{M}+r\,\mathfrak{N}+q\,\mathfrak{P}}{\mathfrak{M}} = -\vartheta^2\\ \frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2} &= -\frac{r\,\mathfrak{M}+m\,\mathfrak{N}+p\,\mathfrak{P}}{\mathfrak{N}} = -\vartheta^2\\ \frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2} &= -\frac{q\,\mathfrak{M}+p\,\mathfrak{N}+n\,\mathfrak{P}}{\mathfrak{P}} = -\vartheta^2\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(26)$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$T = \mathfrak{G}\cos.\vartheta t + \mathfrak{H}\sin.\vartheta t \quad\ldots\ldots\ldots\quad(27)$$

$$\left.\begin{aligned}(l-\vartheta^2)\,\mathfrak{M}+r\,\mathfrak{N}+q\,\mathfrak{P} &= 0\\ r\,\mathfrak{M}+(m-\vartheta^2)\,\mathfrak{N}+p\,\mathfrak{P} &= 0\\ q\,\mathfrak{M}+p\,\mathfrak{N}+(n-\vartheta^2)\,\mathfrak{P} &= 0\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(28)$$

Ferner findet man durch Elimination von $\mathfrak{M}\ \mathfrak{N}\ \mathfrak{P}$ aus diesen drei Gleichungen (28) folgende Gleichung:

$$(l-\vartheta^2)(m-\vartheta^2)(n-\vartheta^2) - p^2(l-\vartheta^2) - q^2(m-\vartheta^2) - r^2(n-\vartheta^2) + 2pqr = 0 \quad (29)$$

Diese Gleichung ist in Bezug auf ϑ^2 vom dritten Grad, sie gibt also für ϑ^2 drei Werthe, und dann geben die Gleichungen (28) für jeden der drei Werthe von ϑ^2 bestimmte Werthe für $\mathfrak{M}\ \mathfrak{N}\ \mathfrak{P}$.

Die Gleichung (27) gibt endlich für die drei Werthe von ϑ^2 drei Werthe von T. Vermöge (24) erhalten wir daher sowohl für φ als auch für ψ und für ω drei Werthe. Bezeichnen wir die drei Werthe von ϑ^2 mit $\vartheta_1^2\ \vartheta_2^2\ \vartheta_3^2$ und die entsprechenden Werthe von $\mathfrak{M}\ \mathfrak{N}\ \mathfrak{P}\ \ \varphi\ \psi\ \omega$ dadurch, dass wir diesen Buchstaben Zahlen anhängen, so haben wir folgende zusammenhängende Grössen:

ϑ_1^2	gibt	$\mathfrak{M}_1\ \mathfrak{N}_1\ \mathfrak{P}_1$	$\varphi_1\ \psi_1\ \omega_1$
ϑ_2^2	„	$\mathfrak{M}_2\ \mathfrak{N}_2\ \mathfrak{P}_2$	$\varphi_2\ \psi_2\ \omega_2$
ϑ_3^2	„	$\mathfrak{M}_3\ \mathfrak{N}_3\ \mathfrak{P}_3$	$\varphi_3\ \psi_3\ \omega_3$

Die Werthe von $\vartheta^2\ \mathfrak{M}\ \mathfrak{N}\ \mathfrak{P}$ können durch eine geometrische Construktion zur Anschauung gebracht werden. Vorausgesetzt, dass alle drei Wurzeln der Gleichung (29) reell sind, so bedeuten diese drei Wurzeln $\vartheta_1^2\ \vartheta_2^2\ \vartheta_3^2$ die drei Halbaxen eines Elypsoides, dessen Gleichung ist:

$$l x^2 + m y^2 + n z^2 + 2pyz + 2qxz + 2rxy = 1$$

und die Werthe von $\mathfrak{M}\ \mathfrak{N}\ \mathfrak{P}$ sind die Cosinuse der Winkel, welche die Richtungen der Axen des Elypsoides mit den Axen $O\,x\ \ O\,y\ \ O\,z$ bilden.

Die individuellen Werthe von $\mathfrak{M}$ $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{P}$ genügen daher den folgenden Beziehungen :

$$\left.\begin{array}{c}\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2+\mathfrak{N}_1\mathfrak{N}_2+\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2=0\\ \mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_3+\mathfrak{N}_1\mathfrak{N}_3+\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_3=0\\ \mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3+\mathfrak{N}_2\mathfrak{N}_3+\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3=0\\ \mathfrak{M}_1^2+\mathfrak{N}_1^2+\mathfrak{P}_1^2=1\\ \mathfrak{M}_2^2+\mathfrak{N}_2^2+\mathfrak{P}_2^2=1\\ \mathfrak{M}_3^2+\mathfrak{N}_3^2+\mathfrak{P}_3^2=1\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

Vermöge der bisher gewonnenen Resultate erhalten wir nun für $\xi\ \upsilon\ \zeta$ folgende Ausdrücke :

$$\left.\begin{array}{l}\xi=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\mathfrak{S}\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\cos.u\ \mathfrak{M}\ (\mathfrak{G}\cos.\vartheta t+\mathfrak{H}\sin.\vartheta t)\ d\alpha\ d\beta\ d\gamma\ d\lambda\ d\mu\ d\nu\\ \upsilon=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\mathfrak{S}\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\cos.u\ \mathfrak{N}\ (\mathfrak{G}\cos.\vartheta t+\mathfrak{H}\sin.\vartheta t)\ d\alpha\ d\beta\ d\gamma\ d\lambda\ d\mu\ d\nu\\ \zeta=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\mathfrak{S}\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\cos.u\ \mathfrak{P}\ (\mathfrak{G}\cos.\vartheta t+\mathfrak{H}\sin.\vartheta t)\ d\alpha\ d\beta\ d\gamma\ d\lambda\ d\mu\ d\nu\end{array}\right\}\ (31)$$

In diesen Ausdrücken bedeutet das Zeichen $\mathfrak{S}$, dass die drei Wurzeln von (29) berücksichtigt werden sollen. Allein wenn $\vartheta_1^2\ \vartheta_2^2\ \vartheta_3^2$ die drei Werthe von ϑ^2 sind, so erhält man für ϑ selbst folgende sechs Werthe :

$$+\vartheta_1\quad+\vartheta_2\quad+\vartheta_3\qquad\qquad-\vartheta_1\quad-\vartheta_2\quad-\vartheta_3$$

Das Summenzeichen $\mathfrak{S}$ muss also, um die allgemeinsten Werthe von $\xi\ \upsilon\ \zeta$ zu erhalten, sowohl auf die positiven wie auf die negativen Wurzeln bezogen werden.

Nun ist :

$$\cos.u\ \cos.\vartheta t=\frac{1}{2}\Big[\cos.(u+\vartheta t)+\cos.(u-\vartheta t)\Big]$$

$$\cos.u\ \sin.\vartheta t=\frac{1}{2}\Big[\sin.(u+\vartheta t)-\sin.(u-\vartheta t)\Big]$$

Daher wird :

$$\cos.u\ \mathfrak{M}\ (\mathfrak{G}\cos.\vartheta t+\mathfrak{H}\sin.\vartheta t)=\frac{1}{2}\mathfrak{M}\Big[\mathfrak{G}\cos.(u+\vartheta t)+\mathfrak{G}\cos.(u-\vartheta t)\Big]$$
$$+\frac{1}{2}\mathfrak{M}\Big[\mathfrak{H}\sin.(u+\vartheta t)-\mathfrak{H}\sin.(u-\vartheta t)\Big]$$

oder wegen :

$$\frac{\sin.(u+\vartheta t)}{\vartheta} = \int_0^t \cos.(u+\vartheta t)\,dt$$

$$\cos.u\,\mathfrak{M}(\mathfrak{G}\cos.\vartheta t + \mathfrak{H}\sin.\vartheta t) = \frac{1}{2}\mathfrak{M}\Big[\mathfrak{G}\cos.(u+\vartheta t) + \mathfrak{G}\cos.(u-\vartheta t)\Big]$$
$$+ \frac{1}{2}\mathfrak{M}\vartheta\Big[\mathfrak{H}\int\cos.(u+\vartheta t)\,dt - \mathfrak{H}\int\cos.(u-\vartheta t)\,dt\Big]$$

Dehnt man die Summe $\mathfrak{S}$ auf die positiven und negativen Wurzeln aus, so kann man schreiben :

$$\mathfrak{S}\cos.u\,\mathfrak{M}(\mathfrak{G}\cos.\vartheta t + \mathfrak{H}\sin.\vartheta t) = \frac{1}{2}\mathfrak{S}\,\mathfrak{M}\Big[\mathfrak{G}\cos.(u-\vartheta t) + \mathfrak{G}_1\int\cos.(u-\vartheta t)\Big]$$

wobei gesetzt wurde $\vartheta\mathfrak{H} = \mathfrak{G}_1$.

Somit erhält man nun :

$$\left.\begin{aligned}
\xi &= \frac{1}{16\pi^3}\mathfrak{S}\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \mathfrak{M}\Big[\mathfrak{G}\cos.(u-\vartheta t) + \mathfrak{G}_1\int_0^t\cos.(u-\vartheta t)\,dt\Big]\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma\,d\lambda\,d\mu\,d\nu\\
\upsilon &= \frac{1}{16\pi^3}\mathfrak{S}\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \mathfrak{N}\Big[\mathfrak{G}\cos.(u-\vartheta t) + \mathfrak{G}_1\int_0^t\cos.(u-\vartheta t)\,dt\Big]\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma\,d\lambda\,d\mu\,d\nu\\
\zeta &= \frac{1}{16\pi^3}\mathfrak{S}\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \mathfrak{P}\Big[\mathfrak{G}\cos.(u-\vartheta t) + \mathfrak{G}_1\int_0^t\cos.(u-\vartheta t)\,dt\Big]\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma\,d\lambda\,d\mu\,d\nu
\end{aligned}\right\}\quad(32)$$

Diesen Gleichungen kann man mit Hülfe einer geometrischen Betrachtung noch eine andere Form geben. Die hiezu dienliche Figur wird man sich vermittelst der folgenden Erklärung leicht machen können.

Betrachten wir :

$\alpha\,\beta\,\gamma$	als Coordinaten	eines	Punktes	A;
$x\,y\,z$	„ „	des	„	M;
$\lambda\,\mu\,\nu$	„ „	eines	„	L;

und verbinden die Punkte A M L mit dem Anfangspunkt O, fällen ferner von M und L auf OA die Perpendikel Mm und Ll, und setzen :

$$\overline{OL} = \varrho_1 \qquad \overline{OM} = R \qquad \overline{OA} = \varrho$$
$$\overline{Ol} = p_1 \qquad \overline{Om} = p$$

so ist :

$$\cos.\,\widehat{\mathrm{L\,O\,l}} = \frac{\mathrm{p}_1}{\varrho_1} = \frac{\lambda}{\varrho_1}\,\frac{\alpha}{\varrho} + \frac{\mu}{\varrho_1}\,\frac{\beta}{\varrho} + \frac{\nu}{\varrho_1}\,\frac{\gamma}{\varrho}$$

$$\cos.\,\widehat{\mathrm{M\,O\,m}} = \frac{\mathrm{p}}{\mathrm{R}} = \frac{\alpha}{\varrho}\,\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{R}} + \frac{\beta}{\varrho}\,\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{R}} + \frac{\gamma}{\varrho}\,\frac{\mathrm{z}}{\mathrm{R}}$$

Demnach :

$$\mathrm{p}_1\,\varrho = \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu$$

$$\mathrm{p}\,\varrho = \alpha\mathrm{x} + \beta\mathrm{y} + \gamma\mathrm{z}$$

Nimmt man die Differenz dieser zwei Ausdrücke, so wird :

$$\mathrm{p}\,\varrho - \mathrm{p}_1\,\varrho = \alpha\,(\mathrm{x}-\lambda) + \beta\,(\mathrm{y}-\mu) + \gamma\,(\mathrm{z}-\nu)$$

Man hat daher vermöge der Gleichung (16), Seite 118 :

$$\mathrm{p}\,\varrho - \mathrm{p}_1\,\varrho = \mathrm{u}$$

und folglich :

$$\cos.\,(\mathrm{u}-\vartheta\mathrm{t}) = \cos.\,(\mathrm{p}\,\varrho - \mathrm{p}_1\,\varrho - \vartheta\mathrm{t}) = \cos.\,(\mathrm{p}\,\varrho - \vartheta\mathrm{t})\,\cos.\,\mathrm{p}_1\,\varrho + \sin.\,(\mathrm{p}\,\varrho - \vartheta\mathrm{t})\,\sin.\,\mathrm{p}_1\,\varrho$$

Führt man diesen Werth von $\cos.\,(\mathrm{u}-\vartheta\mathrm{t})$ in die Gleichungen (32) ein, so findet man :

$$\left.\begin{aligned}
\xi &= \frac{1}{16\,\pi^3}\;\mathfrak{S}\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \mathfrak{M}\,\mathfrak{G}\left[\cos.\,(\varrho\,\mathrm{p}-\vartheta\mathrm{t})\,\cos.\,\varrho\,\mathrm{p}_1 + \sin.\,(\varrho\,\mathrm{p}-\vartheta\mathrm{t})\,\sin.\,\varrho\,\mathrm{p}_1\right]d\alpha\ldots d\nu \\
&+ \frac{1}{16\,\pi^3}\int_0^t \mathfrak{S}\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \mathfrak{M}\,\mathfrak{G}_1\left[\cos.\,(\varrho\,\mathrm{p}-\vartheta\mathrm{t})\,\cos.\,\varrho\,\mathrm{p}_1 + \sin.\,(\varrho\,\mathrm{p}-\vartheta\mathrm{t})\,\sin.\,\varrho\,\mathrm{p}_1\right]d\alpha\ldots d\nu\,dt \\
\upsilon &= \frac{1}{16\,\pi^3}\;\mathfrak{S}\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \mathfrak{N}\,\mathfrak{G}\left[\cos.\,(\varrho\,\mathrm{p}-\vartheta\mathrm{t})\,\cos.\,\varrho\,\mathrm{p}_1 + \sin.\,(\varrho\,\mathrm{p}-\vartheta\mathrm{t})\,\sin.\,\varrho\,\mathrm{p}_1\right]d\alpha\ldots d\nu \\
&+ \frac{1}{16\,\pi^3}\int_0^t \mathfrak{S}\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \mathfrak{N}\,\mathfrak{G}_1\left[\cos.\,(\varrho\,\mathrm{p}-\vartheta\mathrm{t})\,\cos.\,\varrho\,\mathrm{p}_1 + \sin.\,(\varrho\,\mathrm{p}-\vartheta\mathrm{t})\,\sin\,\varrho\,\mathrm{p}_1\right]d\alpha\ldots d\nu\,dt \\
\zeta &= \frac{1}{16\,\pi^3}\;\mathfrak{S}\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \mathfrak{P}\,\mathfrak{G}\left[\cos.\,(\varrho\,\mathrm{p}-\vartheta\mathrm{t})\,\cos\,\varrho\,\mathrm{p}_1 + \sin.\,(\varrho\,\mathrm{p}-\vartheta\mathrm{t})\,\sin.\,\varrho\,\mathrm{p}_1\right]d\alpha\ldots d\nu \\
&+ \frac{1}{16\,\pi^3}\int_0^t \mathfrak{S}\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \mathfrak{P}\,\mathfrak{G}_1\left[\cos.\,(\varrho\,\mathrm{p}-\vartheta\mathrm{t})\,\cos.\,\varrho\,\mathrm{p}_1 + \sin.\,(\varrho\,\mathrm{p}-\vartheta\mathrm{t})\,\sin.\,\varrho\,\mathrm{p}_1\right]d\alpha\ldots d\nu\,dt
\end{aligned}\right\}\quad(33)$$

Denkt man sich die Integrationen in Bezug auf $\lambda\,\mu\,\nu$ ausgeführt und setzt zur Abkürzung :

$$\left.\begin{array}{l}\iiint \cos.\ \varrho\, p_1\ \mathfrak{G}\ d\lambda\, d\mu\, d\nu = \mathfrak{K} \\ \iiint \sin.\ \varrho\, p_1\ \mathfrak{G}\ d\lambda\, d\mu\, d\nu = \mathfrak{K}_1 \\ \iiint \cos.\ \varrho\, p_1\ \mathfrak{G}_1\ d\lambda\, d\mu\, d\nu = \mathfrak{J} \\ \iiint \sin.\ \varrho\, p_1\ \mathfrak{G}_1\ d\lambda\, d\mu\, d\nu = \mathfrak{J}_1\end{array}\right\}\ \ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

$$16\,\pi^2\,\Pi = \left\{\begin{array}{c}\cos.\ (\varrho\, p - \vartheta\, t)\ \mathfrak{K} + \sin.\ (\varrho\, p - \vartheta\, t)\ \mathfrak{K}_1 + \\ + \int\limits_0^t \Big[\cos.\ (\varrho\, p - \vartheta\, t)\ \mathfrak{J} + \sin.\ (\varrho\, p - \vartheta\, t)\ \mathfrak{J}_1\Big]\ d\,t\end{array}\right\}\ \ldots \quad (35)$$

so erhält man endlich:

$$\left.\begin{array}{l}\xi = \mathfrak{S} \iiint \mathfrak{M}\ \Pi\ d\alpha\, d\beta\, d\gamma \\ \upsilon = \mathfrak{S} \iiint \mathfrak{N}\ \Pi\ d\alpha\, d\beta\, d\gamma \\ \zeta = \mathfrak{S} \iiint \mathfrak{P}\ \Pi\ d\alpha\, d\beta\, d\gamma\end{array}\right\}\ \ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

Dies sind nun endlich die Integrale der Gleichungen (14), und zwar in einer Form, welche eine Interpretation zulässt, so dass wir über den Bewegungszustand des Aethers im Doppelmedium eine Vorstellung erhalten.

Die Gleichung (35) kann auf folgende Weise umgestaltet werden.

Bezeichnet man mit Π_0 den Werth von Π für $t = o$, und durch Π'_0 den Werth von $\frac{d\,\Pi}{d\,t}$ für $t = o$, so hat man:

$$16\,\pi^2\,\Pi_0 = \cos.\ \varrho\, p\ \mathfrak{K} + \sin.\ \varrho\, p\ \mathfrak{K}_1$$
$$16\,\pi^2\,\Pi'_0 = \cos.\ \varrho\, p\ \mathfrak{J} + \sin.\ \varrho\, p\ \mathfrak{J}_1$$

Die Grössen $\mathfrak{K}\ \mathfrak{K}_1\ \mathfrak{J}\ \mathfrak{J}_1$ sind Funktionen von $\alpha\ \beta\ \gamma$, aber nicht von p; wir können daher schreiben:

$$\cos.\ \varrho\, p\ \mathfrak{K} + \sin.\ \varrho\, p\ \mathfrak{K}_1 = F\,(\varrho\, p)$$
$$\cos.\ \varrho\, p\ \mathfrak{J} + \sin.\ \varrho\, p\ \mathfrak{J}_1 = F'(\varrho\, p)$$

wobei $F\ F'$ Funktionszeichen sind. Dann aber ist consequenter Weise zu schreiben:

$$\cos.\ (\varrho\, p - \vartheta\, t)\ \mathfrak{K} + \sin.\ (\varrho\, p - \vartheta\, t)\ \mathfrak{K}_1 = F\,(\varrho\, p - \vartheta\, t)$$
$$\cos.\ (\varrho\, p - \vartheta\, t)\ \mathfrak{J} + \sin.\ (\varrho\, p - \vartheta\, t)\ \mathfrak{J}_1 = F'(\varrho\, p - \vartheta\, t)$$

Demnach wird der Ausdruck (35):

$$16\,\pi^2\,\Pi = F(\varrho p - \vartheta t) + \int_0^t F'(\varrho p - \vartheta t)\,dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

Es ist offenbar $F(\varrho p)$ der initiale Werth der Verschiebung $\mathfrak{M}\xi + \mathfrak{N}\upsilon + \mathfrak{P}\zeta$, und $F'(\varrho p)$ die anfängliche Geschwindigkeit.

Wenn wir annehmen, dass am Anfang der Zeit eine Bewegung nur allein in einer unendlich kleinen Entfernung vom Anfangspunkt der Coordinaten erregt worden ist, haben die Funktionen F und F' nur dann endliche Werthe, wenn für die Veränderliche ein sehr kleiner Werth gesetzt wird. Daraus sieht man, dass bei einem solchen Initial-Zustand Π nur dann einen Werth hat, wenn $\varrho p - \vartheta t$ sehr klein oder nahe gleich Null ist, d. h. es ist nach Verlauf der Zeit t nur an den Orten Bewegung vorhanden, für welche $\varrho p - \vartheta t = o$, oder

$$p = \frac{\vartheta}{\varrho}\,t$$

ist; der ganze übrige Raum ist ruhig.

INTERPRETATION DER INTEGRALE.

Betrachten wir die Methode, welche uns zur Integration der Gleichungen (14), Seite 118, geführt hat, genauer, so ersieht man, dass

$$\cos u \,.\, \varphi \qquad \cos u \,.\, \psi \qquad \cos u \,.\, \omega$$

partikuläre Integralien der genannten Gleichungen darstellen, denn die in den Klammern stehenden Ausdrücke der Gleichungen (21) wurden Null gesetzt, und daraus $\varphi\ \psi\ \omega$ bestimmt. Daraus folgt, dass $\mathfrak{M}\Pi\ \ \mathfrak{N}\Pi\ \ \mathfrak{P}\Pi$ ebenfalls partikuläre Werthe von $\xi\ \upsilon\ \zeta$ sind, und dass die totalen Werthe dieser Grössen aus unendlich vielen partikulären Werthen zusammengesetzt sind. Die Bewegung eines Punktes $x\ y\ z$ besteht daher aus unendlich vielen Elementarbewegungen, von denen jede möglicher Weise isolirt auftreten könnte.

Wir wollen nun eine solche Elementarbewegung

$$\mathfrak{M}\Pi \qquad \mathfrak{N}\Pi \qquad \mathfrak{P}\Pi$$

näher betrachten.

Betrachten wir zunächst die Bewegungen aller Punkte, welche in einer in m auf OA senkrechten Ebene liegen, so hat für alle Punkte dieser Ebene p den gleichen Werth. Demnach machen alle Punkte dieser Ebene identische Elementarbewegungen, denn der Grösse nach stimmen diese Bewegungen überein, weil Π nur von p abhängt, und der Richtung nach stimmen diese Bewegungen überein, weil $\mathfrak{M}\ \mathfrak{N}\ \mathfrak{P}$ nur allein von $\alpha\ \beta\ \gamma$ abhängen. Für eine zweite auf OA senkrechte Ebene hat p einen andern Werth, mithin

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg