

Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Das Dynamiden-System

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1857

Aufstellung der Bewegungsgleichungen

[urn:nbn:de:bsz:31-266496](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:31-266496)

B. Aetherschwingungen.

AUFSTELLUNG DER BEWEGUNGSGLEICHUNGEN.

Wir betrachten nun abermals ein aus Dynamiden bestehendes System, dessen Atome oder Kerne Körperchen von bestimmter Gestalt sind, welches demnach im Gleichgewichtszustand nach Axenrichtungen symmetrisch gruppiert ist, daher um jeden Punkt herum nach verschiedenen Richtungen verschiedene Elastizitäten besitzt; nehmen aber nun an, dass nur allein in den Aetherhüllen Bewegungen angeregt werden, und erlauben uns, die ungemein schwache Bewegung, die in den Kernen eintreten könnte, ganz zu vernachlässigen. Unter dieser Voraussetzung wird der Bewegungszustand jeder Aetherhülle darin bestehen, dass sich dieselbe als Ganzes gegen den Kern bewegt, ohne denselben zu verlassen, und dass die Aetheratome der Aetherhülle gegen einander relative Bewegungen machen. Wir betrachten jedoch nicht die relative Bewegung der Aetheratome einer Hülle gegen einander, sondern nur die Bewegung der Aetherhülle als Ganzes, und zwar dadurch, dass wir die Bewegung des Massenmittelpunktes jeder Aetherhülle bestimmen. Dabei wird es uns allerdings auch nicht gelingen, mit absoluter Strenge zu verfahren, allein wir können doch klar aussprechen, was wir eigentlich machen und was wir vernachlässigen, und werden erkennen, dass dadurch kein erheblicher Fehler entstehen kann.

Es seien in Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem (Fig. 10), $x y z$ die Coordinaten des Schwerpunktes eines Körperatoms a , m seine Masse, $\xi v \zeta$ die relativen Coordinaten des Schwerpunktes α der zum Atom m gehörigen Hülle zur Zeit t ; $x + \Delta x$ $y + \Delta y$ $z + \Delta z$ die Coordinaten des Schwerpunktes eines andern Körperatoms a_1 , seine Masse m_1 , $\xi + \Delta \xi$ $v + \Delta v$ $\zeta + \Delta \zeta$ die relativen Coordinaten des Schwerpunktes α_1 der Hülle von m_1 gegen den Schwerpunkt des Kernes m_1 , $\mu \mu_1$ *) die Massen der beiden Aetherhüllen.

Da wir annehmen, dass sich die Körperatome nicht bewegen; so sind die Coordinaten $x y z$ $x + \Delta x$ $y + \Delta y$ $z + \Delta z$ unabhängig von der Zeit t .

Wir setzen ferner $\overline{a\alpha} = \rho$ die Entfernung des Schwerpunktes der Aetherhülle von dem Schwerpunkte des Atoms; $\overline{a_1\alpha_1} = r$ die mit der Zeit nicht veränderliche Entfernung

*) Im zweiten Abschnitt wurden durch μ und μ_1 die Massen der einzelnen Aetheratome bezeichnet.

der Schwerpunkte der Kerne; $\overline{a_1 \alpha} = r + \sigma$ die Entfernung des Schwerpunktes des zweiten Kernes a_1 vom Schwerpunkt der Hülle des ersten Kernes; $\overline{\alpha \alpha_1} = r + \sigma_1$ die Entfernung der Schwerpunkte der Hüllen; alles zur Zeit t gültig.

Wir denken uns die Aethermassen der Hüllen in ihren Mittelpunkten concentrirt und nehmen an, dass auf die in α concentrirte Aethermasse μ zur Zeit t folgende Kräfte einwirken :

1. die Anziehung des Körperatoms a gegen α ;
2. die Totalität der Anziehungen aller Körperatome gegen die in α concentrirt gedachte Aethermasse μ ;
3. die Totalität der Abstossungen aller in ihren Mittelpunkten concentrirt gedachten Aethermassen gegen die in α concentrirt gedachte Aethermasse μ .

Wir bezeichnen :

1. die Anziehung von a gegen α mit $m \mu H(\rho)$;
2. die Anziehung von a_1 gegen α mit $m_1 \mu G(r + \sigma)$;
3. die Abstossung von α_1 gegen α mit $\mu \mu_1 J(r + \sigma_1)$;

wobei $G()$ $J()$ Funktionen ausdrücken, die mit den Entfernungen der Punkte rasch abnehmen; $H()$ hingegen eine Funktion ist, die im Gegentheil mit dem Wachsen der Entfernung rasch zunimmt, denn die Kraft, mit welcher der Kern a auf seine Aetherhülle einwirkt, muss nothwendig für einen stabilen Gleichgewichtszustand mit der Entfernung $\overline{a \alpha}$ wachsen.

Dies vorausgesetzt gehen wir nun zur Rechnung über.

Die Cosinuse der Winkel, welche die Richtungen der Linien $\overline{a \alpha}$ $\overline{\alpha a_1}$ $\overline{\alpha \alpha_1}$ mit den positiven Richtungen der Coordinatenaxen bilden, sind :

	x	y	z
für $\overline{a \alpha}$. . .	$\frac{\xi}{\rho}$	$\frac{v}{\rho}$	$\frac{\zeta}{\rho}$
„ $\overline{\alpha a_1}$. . .	$\frac{\Delta x - \xi}{r + \sigma}$	$\frac{\Delta y - v}{r + \sigma}$	$\frac{\Delta z - \zeta}{r + \sigma}$
„ $\overline{\alpha \alpha_1}$. . .	$\frac{\Delta x + \Delta \xi}{r + \sigma_1}$	$\frac{\Delta y + \Delta v}{r + \sigma_1}$	$\frac{\Delta z + \Delta \zeta}{r + \sigma_1}$

Nennt man nun $X Y Z$ die Summe der Kräfte, welche auf die Masse μ nach den positiven Richtungen der Axen wirken, so erhalten wir :

$$\left. \begin{aligned} X &= -m \mu H(\rho) \frac{\xi}{\rho} + S m_1 \mu G(r + \sigma) \frac{\Delta x - \xi}{r + \sigma} - S \mu \mu_1 J(r + \sigma_1) \frac{\Delta x + \Delta \xi}{r + \sigma_1} \\ Y &= -m \mu H(\rho) \frac{v}{\rho} + S m_1 \mu G(r + \sigma) \frac{\Delta y - v}{r + \sigma} - S \mu \mu_1 J(r + \sigma_1) \frac{\Delta y + \Delta v}{r + \sigma_1} \\ Z &= -m \mu H(\rho) \frac{\zeta}{\rho} + S m_1 \mu G(r + \sigma) \frac{\Delta z - \zeta}{r + \sigma} - S \mu \mu_1 J(r + \sigma_1) \frac{\Delta z + \Delta \zeta}{r + \sigma_1} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Es ist zu bemerken, dass die Funktionen $H(\rho)$ $G(r + \sigma)$ $J(r + \sigma_1)$ essentiell positiv sind.

Diese Gleichungen können weiter umgebildet werden. Es ist zunächst :

$$(r + \sigma)^2 = [x + \Delta x - (x + \xi)]^2 + [y + \Delta y - (y + \nu)]^2 + [z + \Delta z - (z + \zeta)]^2$$

oder :

$$(r + \sigma)^2 = (\Delta x - \xi)^2 + (\Delta y - \nu)^2 + (\Delta z - \zeta)^2$$

Vernachlässigt man die Glieder, welche zweite Potenzen von ξ ν ζ enthalten, betrachtet man also nur allein unendlich kleine Schwingungen, und berücksichtigt, dass $r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$ ist, so folgt aus dieser letzten Gleichung :

$$\sigma = -\frac{1}{r} (\xi \Delta x + \nu \Delta y + \zeta \Delta z) \dots \dots \dots (2)$$

Nun ist ferner :

$$(r + \sigma_1)^2 = [x + \Delta x + \xi + \Delta \xi - (x + \xi)]^2 + [y + \Delta y + \nu + \Delta \nu - (y + \nu)]^2 + [z + \Delta z + \zeta + \Delta \zeta - (z + \zeta)]^2$$

oder :

$$(r + \sigma_1)^2 = (\Delta x + \Delta \xi)^2 + (\Delta y + \Delta \nu)^2 + (\Delta z + \Delta \zeta)^2$$

Entwickelt man und vernachlässigt dabei die Glieder, welche zweite Potenzen von $\Delta \xi$ $\Delta \nu$ $\Delta \zeta$ enthalten, berücksichtigt ferner auch hier, dass $r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$ ist, so findet man :

$$\sigma_1 = +\frac{1}{r} (\Delta x \Delta \xi + \Delta y \Delta \nu + \Delta z \Delta \zeta) \dots \dots \dots (3)$$

Nach dem Taylor'schen Satz findet man annähernd :

$$\left. \begin{aligned} \frac{G(r + \sigma)}{r + \sigma} &= \frac{G(r)}{r} + \frac{d\left(\frac{1}{r} G(r)\right)}{dr} \sigma \\ \frac{J(r + \sigma_1)}{r + \sigma_1} &= \frac{J(r)}{r} + \frac{d\left(\frac{1}{r} J(r)\right)}{dr} \sigma_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

vorausgesetzt, dass man bei dieser Entwicklung sämtliche Glieder vernachlässigt, welche zweite und höhere Potenzen von σ und σ_1 enthalten.

Mit Berücksichtigung der Resultate 2, 3, 4 findet man nun :

$$S m, \mu G(r + \sigma) \frac{\Delta x - \xi}{r + \sigma} = \mu S m, \left[\frac{G(r)}{r} - \frac{d\left(\frac{1}{r} G(r)\right)}{dr} \frac{1}{r} (\xi \Delta x + \nu \Delta y + \zeta \Delta z) \right] (\Delta x - \xi)$$

oder :

$$\left. \begin{aligned}
 S m, \mu G(r+\sigma) \frac{\Delta x - \xi}{r+\sigma} &= \mu S m, G(r) \frac{\Delta x}{r} - \mu \xi S m, \frac{G(r)}{r} - \mu \xi S m, \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} G(r) \right) \Delta x^2 \\
 &- \mu \nu S m, \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} G(r) \right) \Delta x \Delta y \\
 &- \mu \zeta S m, \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} G(r) \right) \Delta x \Delta z
 \end{aligned} \right\} (5)$$

wobei abermals die Glieder, welche ξ^2 , ν^2 , ζ^2 enthalten, vernachlässigt sind.

Auf ähnliche Weise findet man :

$$\left. \begin{aligned}
 S \mu \mu, \frac{J(r+\sigma_1)}{r+\sigma_1} (\Delta x + \Delta \xi) &= \mu S \mu, \frac{J(r)}{r} \Delta x + \mu \Delta \xi S \mu, \left[\frac{J(r)}{r} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} J(r) \right) \Delta x^2 \right] \\
 &+ \mu \Delta \nu S \mu, \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} J(r) \right) \Delta x \Delta y \right] \\
 &+ \mu \Delta \zeta S \mu, \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} J(r) \right) \Delta x \Delta z \right]
 \end{aligned} \right\} (6)$$

Für den Gleichgewichtszustand ist $\rho = \rho_0 = 0$ und wollen wir ferner annehmen, dass $H(0) = 0$ sei. Berücksichtigt man diese Bedingungen und die Resultate (5) und (6), so findet man vermittelst der ersten der Gleichungen (1) :

$$\left. \begin{aligned}
 X &= -m \mu H(\rho) \frac{\xi}{\rho} - \mu \xi \left[S m, \frac{G(r)}{r} + S m, \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} G(r) \right) \Delta x^2 \right] \\
 &- \mu \nu \left[S m, \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} G(r) \right) \Delta x \Delta y \right] \\
 &- \mu \zeta \left[S m, \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} G(r) \right) \Delta x \Delta z \right] \\
 &- \mu \Delta \xi \left[S \mu, \left(\frac{J(r)}{r} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} J(r) \right) \Delta x^2 \right) \right] \\
 &- \mu \Delta \nu \left[S \mu, \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} J(r) \right) \Delta x \Delta y \right] \\
 &- \mu \Delta \zeta \left[S \mu, \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} J(r) \right) \Delta x \Delta z \right]
 \end{aligned} \right\} (7)$$

Vertauscht man in diesem Ausdruck x und Δx mit y , und Δy mit z und Δz , so ergeben sich die Werthe von Y und Z . Man findet:

$$\begin{aligned}
 Y = & -m\mu H(\varrho) \frac{v}{\varrho} - \mu \xi \left[S m_1 \frac{1}{r} \frac{d\left(\frac{1}{r} G(r)\right)}{dr} \Delta x \Delta y \right] \\
 & - \mu v \left[S m_1 \frac{G(r)}{r} + S m_1 \frac{1}{r} \frac{d\left(\frac{1}{r} G(r)\right)}{dr} \Delta y^2 \right] \\
 & - \mu \zeta \left[S m_1 \frac{1}{r} \frac{d\left(\frac{1}{r} G(r)\right)}{dr} \Delta y \Delta z \right] \\
 & - \mu \Delta \xi \left[S \mu_1 \frac{1}{r} \frac{d\left(\frac{1}{r} J(r)\right)}{dr} \Delta x \Delta y \right] \\
 & - \mu \Delta v \left[S \mu_1 \left(\frac{J(r)}{r} + \frac{1}{r} \frac{d\left(\frac{1}{r} J(r)\right)}{dr} \Delta y^2 \right) \right] \\
 & - \mu \Delta \zeta \left[S \mu_1 \frac{1}{r} \frac{d\left(\frac{1}{r} J(r)\right)}{dr} \Delta y \Delta z \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Z = & -m\mu H(\varrho) \frac{\zeta}{\varrho} - \mu \xi \left[S m_1 \frac{1}{r} \frac{d\left(\frac{1}{r} G(r)\right)}{dr} \Delta x \Delta z \right] \\
 & - \mu v \left[S m_1 \frac{1}{r} \frac{d\left(\frac{1}{r} G(r)\right)}{dr} \Delta y \Delta z \right] \\
 & - \mu \zeta \left[S m_1 \frac{G(r)}{r} + S m_1 \frac{1}{r} \frac{d\left(\frac{1}{r} G(r)\right)}{dr} \Delta z^2 \right] \\
 & - \mu \Delta \xi \left[S \mu_1 \frac{1}{r} \frac{d\left(\frac{1}{r} J(r)\right)}{dr} \Delta x \Delta z \right] \\
 & - \mu \Delta v \left[S \mu_1 \frac{1}{r} \frac{d\left(\frac{1}{r} J(r)\right)}{dr} \Delta z \Delta y \right] \\
 & - \mu \Delta \zeta \left[S \mu_1 \left(\frac{J(r)}{r} + \frac{1}{r} \frac{d\left(\frac{1}{r} J(r)\right)}{dr} \Delta z^2 \right) \right]
 \end{aligned}$$

Setzen wir zur Abkürzung:

15.

$$\begin{aligned}
 S m_1 \left[\frac{G(r)}{r} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} G(r) \right) \Delta x^2 \right] &= \mathfrak{A} \\
 S m_1 \left[\frac{G(r)}{r} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} G(r) \right) \Delta y^2 \right] &= \mathfrak{B} \\
 S m_1 \left[\frac{G(r)}{r} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} G(r) \right) \Delta z^2 \right] &= \mathfrak{C} \\
 S m_1 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} G(r) \right) \Delta x \Delta y &= \mathfrak{D} \\
 S m_1 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} G(r) \right) \Delta x \Delta z &= \mathfrak{E} \\
 S m_1 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} G(r) \right) \Delta y \Delta z &= \mathfrak{F}
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\mu_1}{r} \left[J(r) + \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} J(r) \right) \Delta x^2 \right] &= \mathfrak{A}_1 \\
 \frac{\mu_1}{r} \left[J(r) + \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} J(r) \right) \Delta y^2 \right] &= \mathfrak{B}_1 \\
 \frac{\mu_1}{r} \left[J(r) + \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} J(r) \right) \Delta z^2 \right] &= \mathfrak{C}_1 \\
 \frac{\mu_1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} J(r) \right) \Delta x \Delta y &= \mathfrak{D}_1 \\
 \frac{\mu_1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} J(r) \right) \Delta x \Delta z &= \mathfrak{E}_1 \\
 \frac{\mu_1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} J(r) \right) \Delta y \Delta z &= \mathfrak{F}_1
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

und berücksichtigen, dass für den bewegten Zustand

$$X = 2\mu \frac{d^2 \xi}{dt^2}$$

$$Y = 2\mu \frac{d^2 \nu}{dt^2}$$

$$Z = 2\mu \frac{d^2 \zeta}{dt^2}$$

ist, so finden wir zur Bestimmung der Bewegung des Schwerpunktes der dem Punkte $x y z$ entsprechenden Aethersphäre folgende Differenzialgleichungen :

$$\left. \begin{aligned} 2 \frac{d^2 \xi}{dt^2} + m \frac{H(\rho)}{\rho} \xi + (\mathfrak{A} \xi + \mathfrak{F} v + \mathfrak{G} \zeta) + s (\mathfrak{A}_1 \mathcal{A} \xi + \mathfrak{F}_1 \mathcal{A} v + \mathfrak{G}_1 \mathcal{A} \zeta) &= 0 \\ 2 \frac{d^2 v}{dt^2} + m \frac{H(\rho)}{\rho} v - (\mathfrak{B} \xi + \mathfrak{B} v + \mathfrak{D} \zeta) + s (\mathfrak{B}_1 \mathcal{A} \xi + \mathfrak{B}_1 \mathcal{A} v + \mathfrak{D}_1 \mathcal{A} \zeta) &= 0 \\ 2 \frac{d^2 \zeta}{dt^2} + m \frac{H(\rho)}{\rho} \zeta + (\mathfrak{C} \xi + \mathfrak{D} v + \mathfrak{G} \zeta) + s (\mathfrak{C}_1 \mathcal{A} \xi + \mathfrak{D}_1 \mathcal{A} v + \mathfrak{G}_1 \mathcal{A} \zeta) &= 0 \end{aligned} \right\} (10)$$

In diesen Gleichungen (10) drücken die mit $\xi v \zeta$ multiplizirten Glieder die Wechselwirkung des Körpermediums auf das Aethermedium, die mit $\mathcal{A} \xi \mathcal{A} v \mathcal{A} \zeta$ multiplizirten Glieder dagegen die Wirkung des Aethers auf sich selbst aus; denn $H(\rho)$, so wie auch die Grössen $\mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathfrak{C} \mathfrak{D} \mathfrak{G} \mathfrak{F}$ hängen vom Körpermedium, die Grössen $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{C}_1 \mathfrak{D}_1 \mathfrak{G}_1 \mathfrak{F}_1$ dagegen vom Aethermedium ab. Vernachlässigt man den Einfluss des Körpermediums auf das Aethermedium, lässt also die mit $\xi v \zeta$ multiplizirten Glieder verschwinden, so reduzieren sich die Gleichungen (10) auf folgende :

$$\left. \begin{aligned} 2 \frac{d^2 \xi}{dt^2} + s (\mathfrak{A}_1 \mathcal{A} \xi + \mathfrak{F}_1 \mathcal{A} v + \mathfrak{G}_1 \mathcal{A} \zeta) &= 0 \\ 2 \frac{d^2 v}{dt^2} + s (\mathfrak{B}_1 \mathcal{A} \xi + \mathfrak{B}_1 \mathcal{A} v + \mathfrak{D}_1 \mathcal{A} \zeta) &= 0 \\ 2 \frac{d^2 \zeta}{dt^2} + s (\mathfrak{C}_1 \mathcal{A} \xi + \mathfrak{D}_1 \mathcal{A} v + \mathfrak{G}_1 \mathcal{A} \zeta) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11)$$

und diese Gleichungen stimmen in der That mit denjenigen überein, welche *Cauchy* für ein einfaches Medium zuerst aufgestellt hat.

Lässt man aber in den Gleichungen (10) die mit $\xi v \zeta$ multiplizirten Glieder wegzusetzt also :

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{C} = \mathfrak{D} = \mathfrak{G} = \mathfrak{F} = 0 \quad \text{und} \quad H(\rho) = 0$$

so stimmt diese Gleichung der Form nach vollkommen mit den Gleichungen (9), Seite 99, überein, welche wir für die Schwingungen der Körperatome aufgestellt haben.

Wir werden daher die Bewegungsgesetze der Körperschwingungen erhalten, wenn wir in den Integralen der Gleichungen (10) der Aetherschwingungen

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{C} = \mathfrak{D} = \mathfrak{G} = \mathfrak{F} = 0 \quad \text{und} \quad H(\rho) = 0$$

ferner statt $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{G}, \mathfrak{F}$, beziehungsweise $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{C}_1, \mathfrak{D}_1, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{F}_1$ setzen, oder wenn wir (wie eine Vergleichung der Ausdrücke (7) und (8), Seite 99, mit den Ausdrücken (9), Seite 116 zeigt) das Zeichen J mit F vertauschen.