Das Dynamiden-System

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1857

Schwingungen eines ebenen Dynamidensystems oder einer Membrane

urn:nbn:de:bsz:31-266496

$$\left.\begin{array}{ll}
v = \zeta = \left(\mathfrak{C}_1 \cos. \frac{i_1 \pi c_1}{l} t + \mathfrak{D}_1 \sin. \frac{i_1 \pi c_1}{l}\right) \sin. \frac{i_1 \pi x}{l} & \\
\text{Wellenlänge} \ldots\ldots\ldots & \lambda_1 = 2 \frac{l}{i_1} \\
\text{Schwingungszeit} \ldots\ldots & T_1 = 2 \frac{l}{i_1} \sqrt{\frac{p}{g \mathfrak{X}}} \\
\text{Fortpflanzungsgeschwindigkeit} & c_1 = \sqrt{\frac{g \mathfrak{X}}{p}}
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

Da die Ausdrücke für c und c_1 weder l noch i und i_1 enthalten, so sind die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten sowohl von der Länge des eingespannten Stückes, als auch von der Theilung der Saite ganz unabhängig. In den Gleichungen (13) kann man sich erlauben, $\mathfrak{X}$ gegen ε zu vernachlässigen, denn die Spannung einer Kette oder Saite ist jederzeit sehr klein gegen den Modulus der Elastizität. So lange also die Spannung ein gewisses Maass nicht überschreitet, sind die Längenschwingungen von der Spannung nicht abhängig.

Die Gleichungen (13) und (14) sind nur partikuläre Integrale der Gleichungen (8); die allgemeinen Integrale wären :

$$\xi = \Sigma \left(\mathfrak{C} \cos. \frac{i \pi c}{l} t + \mathfrak{D} \sin. \frac{i \pi c}{l} t\right) \sin. \frac{i \pi x}{l}$$

$$v = \zeta = \Sigma \left(\mathfrak{C}_1 \cos. \frac{i_1 \pi c_1}{l} t + \mathfrak{D}_1 \sin. \frac{i_1 \pi c_1}{l} t\right) \sin. \frac{i_1 \pi x}{l}$$

wobei Σ Summenzeichen sind, welche ausdrücken, dass man sowohl für i als auch für i_1 alle ganzen positiven Zahlen von 1 bis ∞ setzen, und die sich hierdurch ergebende Reihe von Gliedern summiren soll.

SCHWINGUNGEN EINES EBENEN DYNAMIDENSYSTEMS ODER EINER MEMBRANE.

Denken wir uns, ein ebenes Dynamidensystem sei ähnlich wie ein Trommelfell nach allen Richtungen gleichmässig gespannt, werde hierauf erschüttert und dann sich selbst überlassen. Die dadurch entstehenden Bewegungen ergeben sich aus den bereits aufgestellten Gleichungen.

Legen wir die Axen $O x$ und $O y$ in die Ebene des Systems und $O z$ senkrecht auf dieselbe, so ist $\Delta z = 0$ und die Gleichungen (7), (8), (9), Seite 99, werden :

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{A}_2 &= \frac{m_1}{r}\left[f(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{d\,r}\,\Delta x^2\right] \\
\mathfrak{B}_2 &= \frac{m_1}{r}\left[f(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{d\,r}\,\Delta y^2\right] \\
\mathfrak{C}_2 &= \frac{m_1}{r}\,f(r) \\
\mathfrak{D}_2 &= 0 \\
\mathfrak{E}_2 &= 0 \\
\mathfrak{F}_2 &= \frac{m_1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{d\,r}\,\Delta x\,\Delta y
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned}
2\,\frac{d^2\xi}{d\,t^2} + S\,(\mathfrak{A}_2\,\Delta\xi + \mathfrak{F}_2\,\Delta\upsilon) &= 0 \\
2\,\frac{d^2\upsilon}{d\,t^2} + S\,(\mathfrak{F}_2\,\Delta\xi + \mathfrak{B}_2\,\Delta\upsilon) &= 0 \\
2\,\frac{d^2\zeta}{d\,t^2} + S\,\mathfrak{C}_2\,\Delta\zeta \qquad\qquad &= 0
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Da die zur Zeit t stattfindenden Verschiebungen $\xi\ \upsilon\ \zeta$ Funktionen von x und y sind, so können wir vermöge des Taylor'schen Satzes annähernd schreiben :

$$\left.\begin{aligned}
\Delta\xi &= \frac{d\,\xi}{d\,x}\,\Delta x + \frac{d\,\xi}{d\,y}\,\Delta y + \frac{1}{2}\,\frac{d^2\xi}{d\,x^2}\,\Delta x^2 + \frac{d^2\xi}{d\,x\,d\,y}\,\Delta x\,\Delta y + \frac{1}{2}\,\frac{d^2\xi}{d\,y^2}\,\Delta y^2 \\
\Delta\upsilon &= \frac{d\,\upsilon}{d\,x}\,\Delta x + \frac{d\,\upsilon}{d\,y}\,\Delta y + \frac{1}{2}\,\frac{d^2\upsilon}{d\,x^2}\,\Delta x^2 + \frac{d^2\upsilon}{d\,x\,d\,y}\,\Delta x\,\Delta y + \frac{1}{2}\,\frac{d^2\upsilon}{d\,y^2}\,\Delta y^2 \\
\Delta\zeta &= \frac{d\,\zeta}{d\,x}\,\Delta x + \frac{d\,\zeta}{d\,y}\,\Delta y + \frac{1}{2}\,\frac{d^2\zeta}{d\,x^2}\,\Delta x^2 + \frac{d^2\zeta}{d\,x\,d\,y}\,\Delta x\,\Delta y + \frac{1}{2}\,\frac{d^2\zeta}{d\,y^2}\,\Delta y^2
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Führt man diese Werthe in die Gleichungen (2) ein, berücksichtigt die Ausdrücke (1), berücksichtigt ferner, dass die Differenzialquotienten vor die Summenzeichen gesetzt werden dürfen, und lässt alle Glieder weg, welche ungerade Potenzen von Δx und Δy enthalten, so findet man :

$$\left.\begin{aligned}
&2\frac{d^2\xi}{dt^2}+\frac{d^2\xi}{dx^2}\,S\,\frac{m_1}{2}\left[\frac{f(r)}{r}\,\Delta x^2+\frac{1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{dr}\,\Delta x^4\right]\\
&\quad+\frac{d^2\xi}{dy^2}\,S\,\frac{m_1}{2}\left[\frac{f(r)}{r}\,\Delta y^2+\frac{1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{dr}\,\Delta x^2\,\Delta y^2\right]\\
&\quad+2\,\frac{d^2\upsilon}{dx\,dy}\,S\,\frac{m_1}{2}\,\frac{1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{dr}\,\Delta x^2\,\Delta y^2
\end{aligned}\right\}=0$$

$$\left.\begin{aligned}
&2\frac{d^2\upsilon}{dt^2}+\frac{d^2\upsilon}{dy^2}\,S\,\frac{m_1}{2}\left[\frac{f(r)}{r}\,\Delta y^2+\frac{1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{dr}\,\Delta y^4\right]\\
&\quad+\frac{d^2\upsilon}{dx^2}\,S\,\frac{m_1}{2}\left[\frac{f(r)}{r}\,\Delta x^2+\frac{1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{dr}\,\Delta x^2\,\Delta y^2\right]\\
&\quad+2\,\frac{d^2\xi}{dx\,dy}\,S\,\frac{m_1}{2}\,\frac{1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{dr}\,\Delta x^2\,\Delta y^2
\end{aligned}\right\}=0 \qquad (4)$$

$$2\frac{d^2\zeta}{dt^2}+\frac{d^2\zeta}{dx^2}\,S\,\frac{m_1}{2}\,\frac{f(r)}{r}\,\Delta x^2+\frac{d^2\zeta}{dy^2}\,S\,\frac{m_1}{2}\,\frac{f(r)}{r}\,\Delta y^2=0$$

Dies sind die Differenzialgleichungen der Bewegung des ebenen Dynamidensystems. Es sind nur Annäherungen, weil in den Ausdrücken (3) nur bis an die dritten Dimensionen von Δx und Δy geschritten wurde.

Die letzte dieser Gleichungen, welche unabhängig von den beiden andern integrirt werden kann, bestimmt die Transversalschwingungen, und mit der Integration dieser Gleichungen wollen wir uns nun beschäftigen.

Wenn wir annehmen, dass die Membrane nach allen Richtungen gleich elastisch und gleich gespannt ist, haben die Summen

$$S\,\frac{m_1}{2}\,\frac{f(r)}{r}\,\Delta x^2 \qquad\qquad S\,\frac{m_1}{r}\,\frac{f(r)}{r}\,\Delta y^2$$

gleiche Werthe, und der Betrag derselben kann vermittelst der Ausdrücke (17), Seite 76, bestimmt werden.

Nehmen wir an, die Begrenzung der Membrane bilde ein Rechteck, dessen Dimensionen l und l_1 sind. Legen wir den Anfangspunkt der Coordinaten in einen Eckpunkt des Rechteckes, die Axe Ox in die Richtung von l, die Axe Oy in die Richtung von l_1 und bezeichnen durch $\mathfrak{S}$ die Kraft, welche auf jede Längeneinheit des Umfangs spannend wirkt, endlich durch p das Gewicht einer Flächeneinheit der Membrane, so ist in die Gleichungen (17), Seite 76, zu setzen:

$$S\,m\,(X\,x + X_2\,x_2) = S\,m\,(Y\,y + Y_2\,y_2) = \mathfrak{S}\,l\,l_1$$

$$\Sigma\,m = \frac{l\,l_1\,p}{2\,g}$$

und man findet:

$$S\,\frac{m_1}{2}\,\frac{f(r)}{r}\,\varDelta x^2 = S\,\frac{m_1}{2}\,\frac{f(r)}{r}\,\varDelta y^2 = -2\,g\,\frac{\mathfrak{S}}{p}$$

Hierdurch wird die letzte der Gleichungen (4):

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \frac{g\,\mathfrak{S}}{p}\left(\frac{d^2\zeta}{dx^2} + \frac{d^2\zeta}{dy^2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

oder wenn wir zur Abkürzung setzen:

$$c = \sqrt{\frac{g\,\mathfrak{S}}{p}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = c^2\left(\frac{d^2\zeta}{dx^2} + \frac{d^2\zeta}{dy^2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Es ist leicht einzusehen, dass diese Gleichung nicht nur für eine rechteckige, sondern auch für jede beliebige Begrenzung der Membrane gilt.

Um diese Gleichung zu integriren, versuchen wir zu setzen:

$$\zeta = T\,X\,Y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

wobei T nur t, X nur x, Y nur y enthalten soll. Unter dieser Voraussetzung ist:

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = X\,Y\,\frac{d^2 T}{dt^2} \qquad \frac{d^2\zeta}{dx^2} = T\,Y\,\frac{d^2 X}{dx^2} \qquad \frac{d^2\zeta}{dy^2} = T\,X\,\frac{d^2 Y}{dy^2}$$

Führt man diese Werthe in (7) ein, so findet man:

$$\frac{1}{T}\,\frac{d^2 T}{dt^2} = c^2\left(\frac{1}{X}\,\frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\,\frac{d^2 Y}{dy^2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Da x, y und t von einander ganz unabhängig sind, so kann diese Gleichung nur bestehen, wenn jedes ihrer Glieder einen constanten Werth hat. Diese Gleichung wird also entsprechen, wenn wir nehmen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{T}\,\frac{d^2 T}{dt^2} &= -\alpha^2 \\ c^2\,\frac{1}{X}\,\frac{d^2 X}{dx^2} &= -\beta^2 \\ c^2\,\frac{1}{Y}\,\frac{d^2 Y}{dy^2} &= -\gamma^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

wobei $\alpha\ \beta\ \gamma$ Constante sind, zwischen denen jedoch die Beziehung besteht:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

Die Integrale der Gleichungen (10) sind:

$$\left.\begin{aligned} T &= \mathfrak{A} \sin.\ \alpha t + \mathfrak{B} \cos.\ \alpha t \\ X &= \mathfrak{C} \sin.\ \frac{\beta}{c} x + \mathfrak{D} \cos.\ \frac{\beta}{c} x \\ Y &= \mathfrak{D} \sin.\ \frac{\beta_1}{c} y + \mathfrak{F} \cos.\ \frac{\beta_1}{c} y \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

Setzt man diese Werthe in (8), so findet man:

$$\zeta = (\mathfrak{A} \sin.\ \alpha t + \mathfrak{B} \cos.\ \alpha t) \left(\mathfrak{C} \sin.\ \frac{\beta}{c} x + \mathfrak{D} \cos.\ \frac{\beta}{c} x\right) \left(\mathfrak{C} \sin.\ \frac{\beta_1}{c} y + \mathfrak{F} \cos.\ \frac{\beta_1}{c} y\right) \quad (13)$$

Dieser Werth von ζ ist jedoch nicht das allgemeine Integrale der Gleichung (7), sondern nur ein partikuläres.

Wenden wir den Ausdruck (13) auf den Fall an, wenn die Membrane über einen rechteckigen Rahmen gespannt ist, dann muss sein:

1. für $x = o$ $\zeta = o$ für jeden Werth von t und y; folglich ist zu setzen $\mathfrak{D} = o$;
2. für $y = o$ $\zeta = o$ für jeden Werth von t und x; folglich ist zu nehmen $\mathfrak{F} = o$;
3. für $x = l$ $\zeta = o$ für jeden Werth von t und y; folglich ist zu setzen $\sin.\ \frac{\beta}{c} l = o$ oder $\frac{\beta}{c} l = i\pi$, wobei i irgend eine ganze Zahl bezeichnet;
4. für $y = l_1$ $\zeta = o$ für jeden Werth von t und x; demnach hat man $\sin.\ \frac{\beta_1}{c} l_1 = o$ oder $\frac{\beta_1}{c} l_1 = i_1 \pi$, wobei i_1 abermals irgend eine ganze Zahl ist.

Vermöge dieser Bestimmungen findet man nun mit Berücksichtigung der Beziehung (11):

$$\zeta = \left\{\begin{aligned} &\mathfrak{A} \sin.\ \left[\pi c \sqrt{\left(\frac{i}{l}\right)^2 + \left(\frac{i_1}{l_1}\right)^2}\ t\right] \\ &+ \mathfrak{B} \cos.\ \left[\pi c \sqrt{\left(\frac{i}{l}\right)^2 + \left(\frac{i_1}{l_1}\right)^2}\ t\right] \end{aligned}\right\} \sin.\ \frac{i\pi x}{l} \sin.\ \frac{i_1 \pi y}{l_1} \quad . \; . \quad (14)$$

Dieser Ausdruck bestimmt nur einen speziellen Schwingungszustand einer über einen rechteckigen Rahmen gespannten Membrane.

Für den allgemeinsten Schwingungszustand hätte man:

$$\zeta = \Sigma\Sigma \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{A} \sin. \left[\pi c \sqrt{\left(\frac{i}{l}\right)^2 + \left(\frac{i_1}{l_1}\right)^2}\, t \right] \\ + \mathfrak{B} \cos. \left[\pi c \sqrt{\left(\frac{i}{l}\right)^2 + \left(\frac{i_1}{l_1}\right)^2}\, t \right] \end{array} \right\} \sin. \frac{i \pi x}{l} \sin. \frac{i_1 \pi y}{l_1} \quad . \quad . \quad (15)$$

wobei sich die Summen $\Sigma\Sigma$ auf alle möglichen ganzen positiven Werthe von i und i_1 beziehen.

In die Interpretation der Gleichung (14) will ich mich nicht einlassen; man kann hierüber in *Lamé*, „Théorie de l'élasticité," pag. 116, nachsehen.