Das Dynamiden-System

Redtenbacher, Ferdinand

Mannheim, 1857

Schwingungen eines linearen Systems oder einer vollkommen biegsamen Kette

urn:nbn:de:bsz:31-266496

Dies sind also die Differenzialgleichungen der Bewegung der Körperatome. Sie sind der Form nach identisch mit denjenigen, welche *Cauchy* für ein System von Körperpunkten aufgefunden, aber auch auf Aetherschwingungen angewendet hat, was, wie wir in der Folge sehen werden, ein Missbrauch genannt werden muss.

Ich werde mich mit der Integration dieser Gleichungen aus zwei Gründen nicht befassen; 1) könnte ich, wenn ich diese Integration bewerkstelligen wollte, nichts anderes thun, als dem wohlbekannten, von *Cauchy* gelehrten Weg nachgehen; 2) werde ich in der Folge genöthigt sein, die Differenzialgleichungen, welche ich für die Bewegung des Aethers aufstelle, zu integriren, und die Gleichungen (9) sind, wie sich zeigen wird, der Form nach nur spezielle Fälle von den Aethergleichungen; die Integration dieser letzteren schliesst also auch die Integration der ersteren in sich.

Der Zweck, weshalb ich hier diese Gleichungen für die Bewegung der Körperatome aufgestellt habe, ist, wie gesagt, nur der, um den Unterschied zwischen Aether- und Körperschwingungen klar hervorheben zu können.

Ich will nun noch bemerken, dass die Grössen $\mathfrak{A}_2$ $\mathfrak{B}_2$ $\mathfrak{C}_2$ $\mathfrak{D}_2$ $\mathfrak{E}_2$ $\mathfrak{F}_2$ mit dem Wachsen von r äusserst rasch abnehmen, weil sie theilweise von gegenseitigen Anziehungen der Körperatome abhängen, Anziehungen, welche wahrscheinlich viel rascher abnehmen, als die Abstossungen der Aetheratome.

Um den Gebrauch dieser Bewegungsgleichungen und der im vorigen Abschnitt aufgestellten Gleichgewichtsgleichungen zu erklären, will ich die Schwingungen eines linearen Systems (Saite oder Kette) und die Schwingungen eines ebenen Systems (Membrane) berechnen, werde mich jedoch in die Interpretation der Resultate nicht einlassen, weil es mir nur darum zu thun ist, zu zeigen, wie man und dass man zu richtigen Resultaten gelangt.

SCHWINGUNGEN EINES LINEAREN SYSTEMS ODER EINER VOLLKOMMEN BIEGSAMEN KETTE.

Denken wir uns, eine geradlinige Reihe von Dynamiden werde zuerst ähnlich wie eine Saite durch Kräfte, welche die letzten Dynamiden der Reihe anfassen, gespannt, hierauf aus ihrer gespannten Gleichgewichtslage gebracht und sich selbst überlassen, so werden gewisse Schwingungen entstehen, die wir berechnen wollen.

Lassen wir die Axe der $o\,x$ mit der Dynamidenreihe zusammenfallen, so ist für dieselbe $\Delta y = \Delta z = o$, daher sind die Gleichungen der Bewegung vermöge (9):

$$\left.\begin{aligned}
o &= 2\,\frac{d^2 \xi}{d t^2} + S\,\frac{m_1}{r}\left[f(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{d\,r}\,\Delta x^2\right]\Delta\xi \\
o &= 2\,\frac{d^2 v}{d t^2} + S\,\frac{m_1}{r}\,f(r)\,\Delta v \\
o &= 2\,\frac{d^2 \zeta}{d t^2} + S\,\frac{m_1}{r}\,f(r)\,\Delta\zeta
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Die zur Zeit t vorhandenen Verschiebungen $\xi\ \upsilon\ \zeta$ sind gewisse Funktionen von x; wir können daher vermöge des Taylor'schen Satzes annähernd schreiben:

$$\left.\begin{aligned}\Delta\xi &= \frac{d\,\xi}{d\,x}\,\Delta x + \frac{1}{2}\,\frac{d^2\,\xi}{d\,x^2}\,\Delta x^2\\ \Delta\upsilon &= \frac{d\,\upsilon}{d\,x}\,\Delta x + \frac{1}{2}\,\frac{d^2\,\upsilon}{d\,x^2}\,\Delta x^2\\ \Delta\zeta &= \frac{d\,\zeta}{d\,x}\,\Delta x + \frac{1}{2}\,\frac{d^2\,\zeta}{d\,x^2}\,\Delta x^2\end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ (2)$$

Führt man diese Werthe in (1) ein, so findet man:

$$o = 2\,\frac{d^2\,\xi}{d\,t^2} + S\,\frac{m_1}{r}\left[f(r) + \frac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{d\,r}\,\Delta x^2\right]\left(\frac{d\,\xi}{d\,x}\,\Delta x + \frac{1}{2}\,\frac{d^2\,\xi}{d\,x^2}\,\Delta x^2\right)$$

$$o = 2\,\frac{d^2\,\upsilon}{d\,t^2} + S\,\frac{m_1}{r}\,f(r)\left(\frac{d\,\upsilon}{d\,x}\,\Delta x + \frac{1}{2}\,\frac{d^2\,\upsilon}{d\,x^2}\,\Delta x^2\right)$$

$$o = 2\,\frac{d^2\,\zeta}{d\,t^2} + S\,\frac{m_1}{r}\,f(r)\left(\frac{d\,\zeta}{d\,x}\,\Delta x + \frac{1}{2}\,\frac{d^2\,\zeta}{d\,x^2}\,\Delta x^2\right)$$

Berücksichtigt man, dass $S\,m_1\,\frac{f(r)}{r}\,\Delta x = o$ ist, so werden diese Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}o &= 2\,\frac{d^2\,\xi}{d\,t^2} + \frac{d^2\,\xi}{d\,x^2}\,S\,\frac{m_1}{2}\left[\frac{f(r)}{r}\,\Delta x^2 + \frac{1}{r}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\,f(r)\right)}{d\,r}\,\Delta x^4\right]\\ o &= 2\,\frac{d^2\,\upsilon}{d\,t^2} + \frac{d^2\,\upsilon}{d\,x^2}\,S\,\frac{m_1}{2}\,\frac{f(r)}{r}\,\Delta x^2\\ o &= 2\,\frac{d^2\,\zeta}{d\,t^2} + \frac{d^2\,\zeta}{d\,x^2}\,S\,\frac{m_1}{2}\,\frac{f(r)}{r}\,\Delta x^2\end{aligned}\right\}\ \ldots\ (3)$$

Die in diesen Gleichungen vorkommenden Summen können auf folgende Weise bestimmt werden. Nennen wir $\mathfrak{X}$ die Spannung, p das Gewicht jeder Längeneinheit, l die Länge der Kette zwischen den Angriffspunkten der spannenden Kräfte, so können wir die erste der Gleichungen (17), Seite 76, auf den vorliegenden Fall anwenden, wenn wir in derselben setzen:

$$X = o \qquad\qquad \Sigma\,m\,X_2\,x_2 = \mathfrak{X}\,l \qquad\qquad \Sigma\,m = \frac{l\,p}{2\,g}$$

und dann findet man:

$$\mathfrak{T} l + \frac{lp}{2g}\, S\, \frac{m_1}{2}\, \frac{f(r)}{r}\, \Delta x^2 = 0$$

oder :

$$- S\, \frac{m_1}{2}\, \frac{f(r)}{r}\, \Delta x^2 = \frac{2\,g\,\mathfrak{T}}{p} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Nun ist vermöge der ersten der Gleichungen (41), Seite 86 :

$$+ \mathfrak{E} = - S\, \frac{m_1}{2}\, \frac{1}{r_0}\, \frac{d\left(\frac{1}{r_0}\, f(r_0)\right)}{d\, r_0}\, \Delta x_0^4 = \frac{2\, g\, \varepsilon}{p}$$

wobei ε den Modulus der Elastizität für den natürlichen ungespannten Zustand der Kette bedeutet; und weil sich dieser Modulus bei einer schwachen Ausdehnung nur äusserst wenig ändert, so darf man auch setzen :

$$- S\, \frac{m_1}{2}\, \frac{1}{r}\, \frac{d\left(\frac{1}{r}\, f(r)\right)}{d\, r}\, \Delta x^4 = \frac{2\, g\, \varepsilon}{p} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Hiermit sind die Werthe der in den Gleichungen (3) vorkommenden Summen bestimmt und man erhält folglich :

$$\left.\begin{aligned} 2\,\frac{d^2 \xi}{d\, t^2} &= \frac{2\, g}{p}\, (\mathfrak{T} + \varepsilon)\, \frac{d^2 \xi}{d\, x^2} \\ 2\,\frac{d^2 \upsilon}{d\, t^2} &= \frac{2\, g}{p}\, \mathfrak{T}\, \frac{d^2 \upsilon}{d\, x^2} \\ 2\,\frac{d^2 \zeta}{d\, t^2} &= \frac{2\, g}{p}\, \mathfrak{T}\, \frac{d^2 \zeta}{d\, x^2} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

Setzen wir zur Abkürzung :

$$\left.\begin{aligned} c\; &= \sqrt{\frac{g\,(\mathfrak{T} + \varepsilon)}{p}} \\ c_1 &= \sqrt{\frac{g\,\mathfrak{T}}{p}} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

so werden die Differenzialgleichungen der Bewegung :

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 \xi}{d\, t^2} &= c^2\, \frac{d^2 \xi}{d\, x^2} \\ \frac{d^2 \upsilon}{d\, t^2} &= c_1^2\, \frac{d^2 \upsilon}{d\, x^2} \\ \frac{d^2 \zeta}{d\, t^2} &= c_1^2\, \frac{d^2 \zeta}{d\, x^2} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

Die erste derselben bestimmt die Längenschwingungen, die letzte die Querschwingungen. Da ihre Formen übereinstimmen, so genügt es, eine derselben, z. B. die erste, zu integriren. Die Integrale der beiden andern Gleichungen ergeben sich dann, wenn man c mit c_1 vertauscht.

Um die erste der Gleichungen (8) zu integriren, versuchen wir durch die Annahme

$$\xi = XT \qquad (9)$$

zu genügen, indem wir voraussetzen, dass X nur eine Funktion von x und T nur eine Funktion von t ist. Unter dieser Voraussetzung ist:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = X\frac{d^2T}{dt^2} \qquad \frac{d^2\xi}{dx^2} = T\frac{d^2X}{dx^2}$$

Setzt man diese Werthe in die erste der Gleichungen (8), so wird dieselbe:

$$X\frac{d^2T}{dt^2} = c^2\ T\frac{d^2X}{dx^2}$$

oder:

$$\frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2} = c^2\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}$$

Da t und x von einander nicht abhängen, so kann diese Gleichung nur richtig sein, wenn jedes der beiden Glieder gleich ist einer gewissen Constante, die wir mit $-\alpha^2$ bezeichnen wollen. Wir erhalten daher:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2X}{dx^2} + \left(\frac{\alpha}{c}\right)^2 X &= 0 \\ \frac{d^2T}{dt^2} + \alpha^2 T &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Die Integrale dieser Gleichungen sind:

$$X = \mathfrak{A}\cos.\frac{\alpha x}{c} + \mathfrak{B}\sin.\frac{\alpha x}{c}$$

$$T = \mathfrak{C}\cos.\alpha t + \mathfrak{D}\sin.\alpha t$$

Setzen wir diese Werthe in (9), so folgt:

$$\xi = \left(\mathfrak{A}\cos.\frac{\alpha x}{c} + \mathfrak{B}\sin.\frac{\alpha x}{c}\right)(\mathfrak{C}\cos.\alpha t + \mathfrak{D}\sin.\alpha t) \qquad (11)$$

wobei $\mathfrak{A}\ \mathfrak{B}\ \mathfrak{C}\ \mathfrak{D}\ \alpha$ constante Grössen bezeichnen. Da wir annehmen, dass die Enden des linearen Systems festgehalten werden, so muss sowohl für $x = 0$ als auch für $x = l$ der Werth von ξ verschwinden, wie gross auch t sein mag. Man hat daher:

$$o = \mathfrak{A}\,(\mathfrak{C}\cos.\alpha t + \mathfrak{D}\sin.\alpha t)$$

$$o = \left(\mathfrak{A}\cos.\frac{\alpha l}{c} + \mathfrak{B}\sin.\frac{\alpha l}{c}\right)(\mathfrak{C}\cos.\alpha t + \mathfrak{D}\sin.\alpha t)$$

Diese Gleichungen können für jeden Werth von t nur dann bestehen, wenn

$$\mathfrak{A} = o \qquad \frac{\alpha l}{c} = i\pi$$

ist, wobei i irgend eine ganze Zahl bezeichnet. Hierdurch wird nun der Ausdruck (11)

$$\xi = \left(\mathfrak{C}\cos.\frac{i\pi c}{l}t + \mathfrak{D}\sin.\frac{i\pi c}{l}t\right)\sin.\frac{i\pi x}{l} \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

Dieser Werth von ξ entspricht sowohl der ersten der Gleichungen (8), als auch der Bedingung, dass die Endpunkte des linearen Systems keine Bewegung machen sollen. Wenn x um $2\frac{l}{i}$ zunimmt, ändert sich der Werth von ξ nicht; es ist mithin $2\frac{l}{i} = \lambda$ die Wellenlänge. Wenn ferner t um $2\frac{l}{ic}$ wächst, tritt abermals für ξ der gleiche Werth ein; es ist demnach $2\frac{l}{ic} = T$ die Zeit einer Schwingung.

Nun ist $\frac{\lambda}{T} = \frac{2\frac{l}{i}}{2\frac{l}{ic}} = c$. Allein dieser Quotient $\frac{\lambda}{T}$ ist nichts anderes als die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, und diese wird also durch die Constante c gemessen. Die Längenschwingungen des linearen Systems werden nun durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$\left.\begin{array}{ll} \multicolumn{2}{c}{\xi = \left(\mathfrak{C}\cos.\frac{i\pi c}{l}t + \mathfrak{D}\sin.\frac{i\pi c}{l}t\right)\sin.\frac{i\pi x}{l}} \\ \text{Wellenlänge} \ldots\ldots\ldots & \lambda = 2\frac{l}{i} \\ \text{Schwingungszeit} \ldots\ldots & T = 2\frac{l}{i}\sqrt{\frac{p}{g(\mathfrak{X}+\varepsilon)}} \\ \text{Fortpflanzungsgeschwindigkeit} & c = \sqrt{\frac{g(\mathfrak{X}+\varepsilon)}{p}} \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (13)$$

Die Gesetze der Querschwingungen ergeben sich aus (13), wenn man c mit c_1 vertauscht. Es ist daher für die Querschwingungen:

$$\left.\begin{array}{ll} \upsilon = \zeta = \left(\mathfrak{C}_1 \cos. \frac{i_1 \pi c_1}{l} t + \mathfrak{D}_1 \sin. \frac{i_1 \pi c_1}{l}\right) \sin. \frac{i_1 \pi x}{l} & \\ \text{Wellenlänge} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; & \lambda_1 = 2 \frac{l}{i_1} \\ \text{Schwingungszeit} \;.\;.\;.\;.\;.\; & T_1 = 2 \frac{l}{i_1} \sqrt{\frac{p}{g \mathfrak{X}}} \\ \text{Fortpflanzungsgeschwindigkeit} & c_1 = \sqrt{\frac{g \mathfrak{X}}{p}} \end{array}\right\} \;.\;.\;.\;.\; (14)$$

Da die Ausdrücke für c und c_1 weder l noch i und i_1 enthalten, so sind die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten sowohl von der Länge des eingespannten Stückes, als auch von der Theilung der Saite ganz unabhängig. In den Gleichungen (13) kann man sich erlauben, $\mathfrak{X}$ gegen ε zu vernachlässigen, denn die Spannung einer Kette oder Saite ist jederzeit sehr klein gegen den Modulus der Elastizität. So lange also die Spannung ein gewisses Maass nicht überschreitet, sind die Längenschwingungen von der Spannung nicht abhängig.

Die Gleichungen (13) und (14) sind nur partikuläre Integrale der Gleichungen (8); die allgemeinen Integrale wären :

$$\xi = \Sigma \left(\mathfrak{C} \cos. \frac{i \pi c}{l} t + \mathfrak{D} \sin. \frac{i \pi c}{l} t\right) \sin. \frac{i \pi x}{l}$$

$$\upsilon = \zeta = \Sigma \left(\mathfrak{C}_1 \cos. \frac{i_1 \pi c_1}{l} t + \mathfrak{D}_1 \sin. \frac{i_1 \pi c_1}{l} t\right) \sin. \frac{i_1 \pi x}{l}$$

wobei Σ Summenzeichen sind, welche ausdrücken, dass man sowohl für i als auch für i_1 alle ganzen positiven Zahlen von 1 bis ∞ setzen, und die sich hierdurch ergebende Reihe von Gliedern summiren soll.

SCHWINGUNGEN EINES EBENEN DYNAMIDENSYSTEMS ODER EINER MEMBRANE.

Denken wir uns, ein ebenes Dynamidensystem sei ähnlich wie ein Trommelfell nach allen Richtungen gleichmässig gespannt, werde hierauf erschüttert und dann sich selbst überlassen. Die dadurch entstehenden Bewegungen ergeben sich aus den bereits aufgestellten Gleichungen.

Legen wir die Axen $O x$ und $O y$ in die Ebene des Systems und $O z$ senkrecht auf dieselbe, so ist $\Delta z = 0$ und die Gleichungen (7), (8), (9), Seite 99, werden :